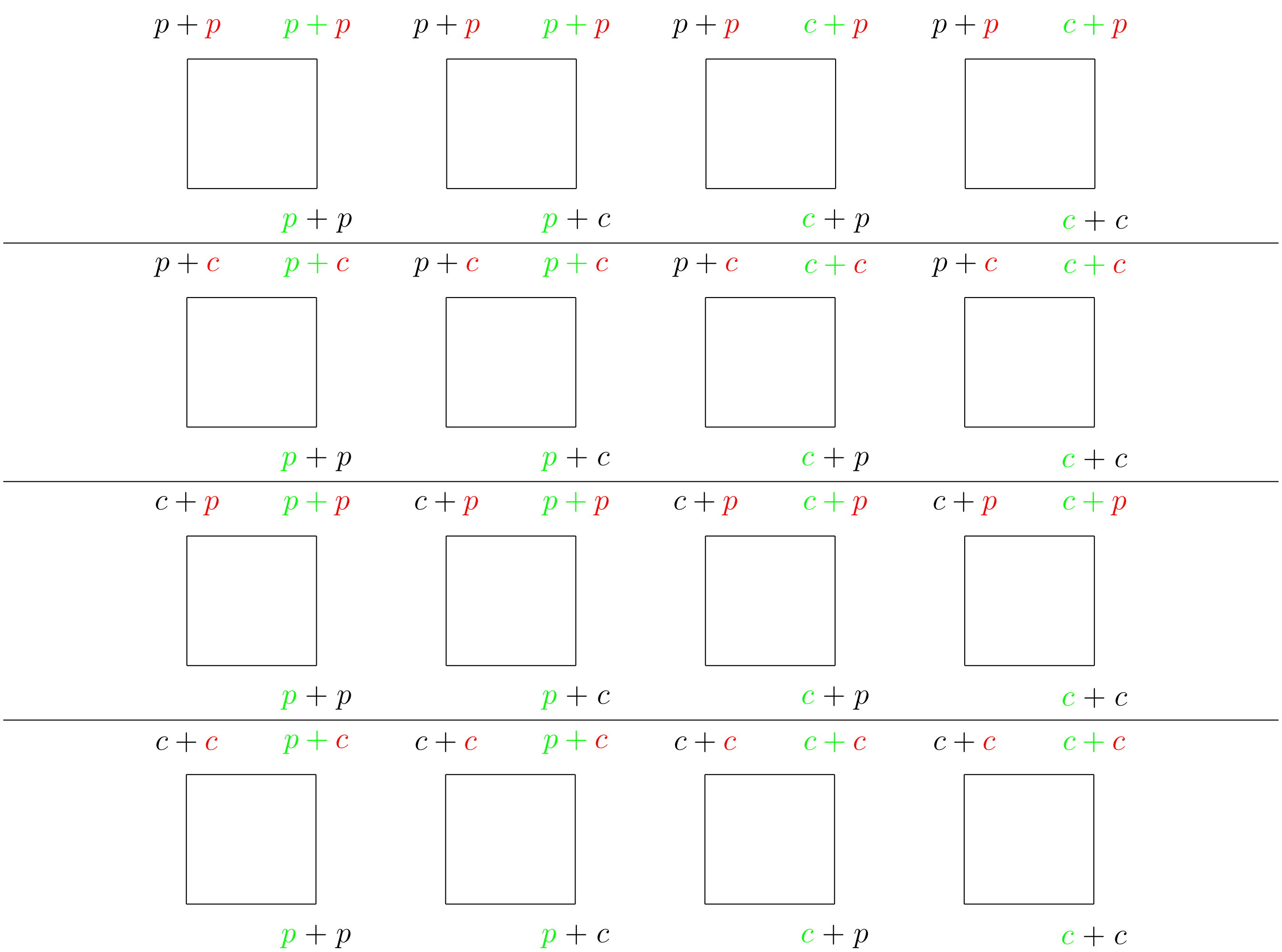
Une rencontre simple de l'inverse de la racine de 2 (Denise Vella-Chemla, mars 2024)

En 2014, puis en 2017 [1], on avait étudié une façon d'utiliser le plan cartésien pour représenter les décompositions de Goldbach, en utilisant 16 règles de passage sur un langage à 4 lettres $\{a, b, c, d\}$ qui étaient les suivantes :

$aa \to a$	$ba \to a$	$ca \to c$	$da \to c$
$ab \to b$	$bb \to b$	$cb \to d$	$db \to d$
$ac \to a$	$bc \to a$	$cc \to c$	$dc \to c$
$ad \to b$	$bd \to b$	$cd \to d$	$dd \to d$

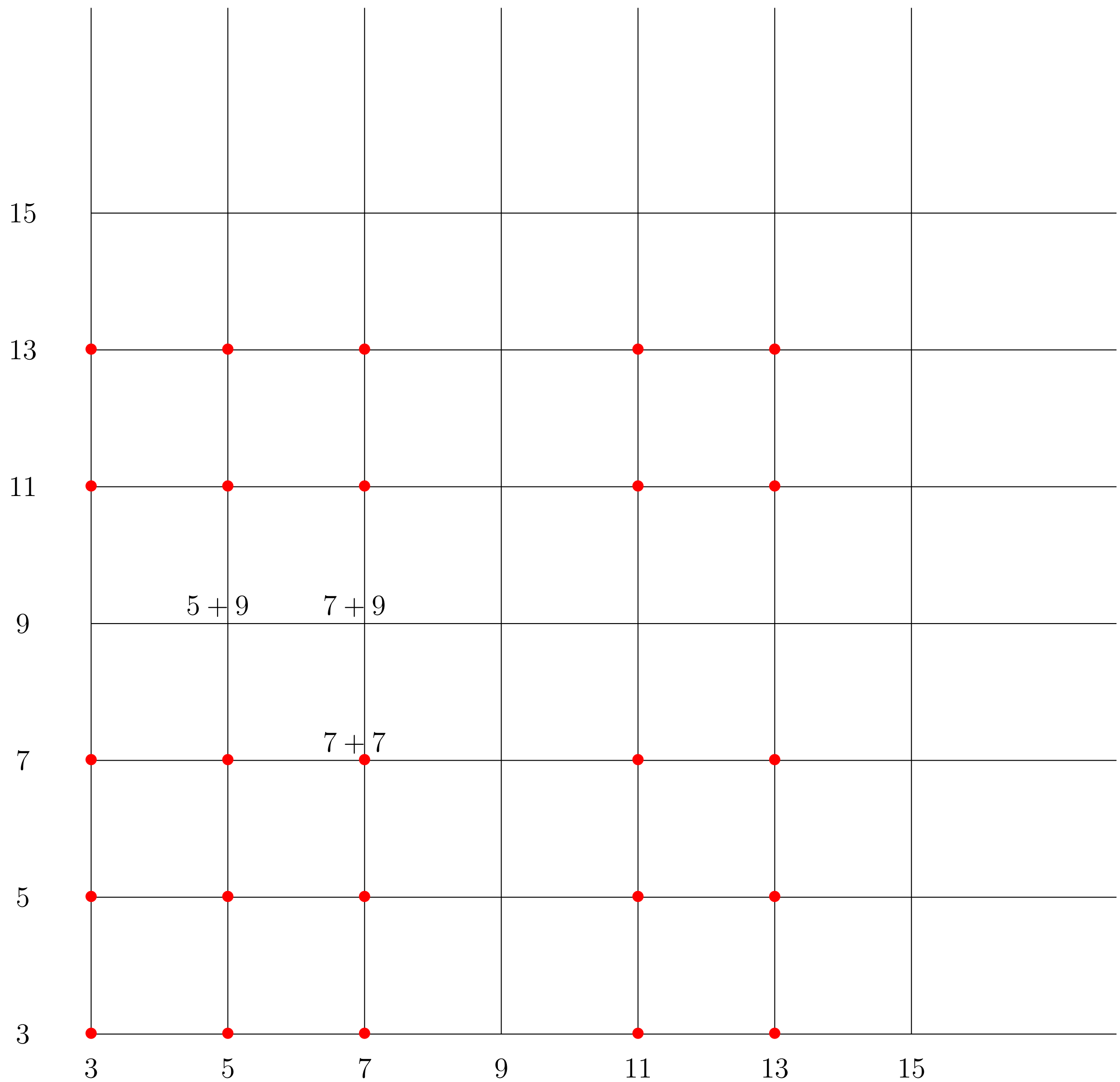
La lettre a correspondait aux décompositions de la forme premier + premier, comme $11 + 13$.
.... b .... composé + premier, comme $9 + 11$.
.... c .... premier + composé, comme $5 + 9$.
.... d .... composé + composé, comme $15 + 25$.

Les règles correspondent aux petits carrés locaux suivants dans le maillage de la page suivante :



[1] Voir cette note http://denise.vella.chemla.free.fr/merveilleuxmaillage.pdf, ou celle-là http://denise.vella.chemla.free.fr/pavages3.pdf.

Ces règles explicitent de manière ampoulée le fait que toutes les décompositions d'une ligne ont même second sommant, et que toutes les décompositions d'une colonne ont même premier sommant mais "de proche en proche". Elles expriment que la décomposition 7+9 s'obtient en prenant le premier sommant de la décomposition 7+7 et le second sommant de la décomposition 5+9, qui sont ses voisines immédiates sur le graphique ci-dessous. Dans notre représentation des décompositions de Goldbach dans le plan cartésien, cela correspond au fait que les points alignés horizontalement ont même ordonnée, tandis que les points alignés verticalement ont même abscisse.



En terme de coordonnées, on peut dire localement que la décomposition en haut à droite d'un carré $x_2 + y_1$ s'obtient à partir de la décomposition $x_1 + y_1$ immédiatement à sa gauche et de la décomposition $x_2 + y_2$ immédiatement en-dessous d'elle. Cela résume d'un coup d'un seul les 16 règles faisant intervenir les lettres a, b, c, d vues plus haut.

On note que la décomposition $3+7$ n'est pas positionnée sur le même point du graphique que la décomposition 7+3, de même que le point de coordonnées cartésiennes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ n'est pas le même que le point $\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$. On a positionné des points rouges aux intersections correspondant à des décompositions de Goldbach, dont les deux coordonnées sont des nombres premiers.

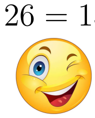
On peut représenter les 16 règles locales au moyen d'une matrice de transition : on a en quelque sorte une chance sur deux d'avoir un a et une chance sur deux d'avoir un b à partir d'un a, et de même à partir d'un b. On a également une chance sur deux d'obtenir un c et une chance sur deux d'obtenir un d à partir d'un c et il en est de même pour d. De par notre convention, il n'y a aucune chance d'avoir un a ou un b à partir d'un c ou d'un d, d'où les zéros dans la matrice.

La matrice de passage du graphe de transition est ainsi :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Cette matrice est égale à son carré, elle est idempotente.

Ses 4 valeurs propres sont 1, 0, 1 et 0 et ses 4 vecteurs propres sont : $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right)$; $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right)$; $\left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(0, 0, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

La projection sur la droite $x = y$ (ou rotation d'un angle $\frac{\pi}{4}$ ou $-\frac{\pi}{4}$ des vecteurs de base, dont les cosinus et sinus sont tous les deux égaux à $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$), correspond au fait que la convention qu'on a choisie positionne les décompositions dont les deux sommants sont égaux (et qui se trouvent être, entre autres, les décompositions de Goldbach, dites triviales, d'un nombre pair double d'un nombre premier en somme de deux nombres premiers identiques égaux à sa moitié, comme $26 = 13 + 13$), 

sur la diagonale du premier quadrant[2] .

[2] Au sujet de $\frac{\pi}{4}$ et du fait que cette fraction soit égale à la somme infinie $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} +$ etc., on peut consulter cette vidéo très pédagogique https://www.youtube-nocookie.com/embed/0$_e JlNVatsU$.