Raffinement analytique de l'invariant de Lefschetz Λ_n : ce que le passage de $\mathbb{Z}/2$ à $\mathbb{Z}$ voit et ne voit pas (pour faire suite aux notes `ia29.pdf`, `ia67.pdf`, `ia240.pdf`, `ia241.pdf`, `ia243.pdf`, `ia299.pdf`)
deepseek pour Denise Vella-Chemla, 8 novembre 2026

On se reportera aux notes :

[1] https://denisevellachemla.eu/ia29.pdf ,
[2] https://denisevellachemla.eu/ia67.pdf ,
[3] https://denisevellachemla.eu/ia240.pdf ,
[4] https://denisevellachemla.eu/ia241.pdf ,
[5] https://denisevellachemla.eu/ia243.pdf ,
[6] https://denisevellachemla.eu/ia299.pdf ,

auxquelles cette note, intégralement rédigée par l'ia deepseek, fait suite.

Résumé

On raffine l'invariant de Lefschetz combinatoire Λ_n (note précédente) en un invariant $\Lambda_n^{(k)}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$, construit à partir des sommes de Ramanujan c_k (ia67, §4). On montre que $\Lambda_n^{(k)}$ distingue effectivement les deux modèles fictifs de Selberg (nombres de facteurs premiers pairs vs impairs), ce que $\Lambda_n \pmod 2$ ne faisait pas (Théorème **??**). On montre ensuite (Théorème **??**) que toute tentative d'en tirer une *minoration* globale sur le nombre de candidats de Goldbach réintroduit exactement l'obstruction de parité : la sommation sur les $n/2$ candidats fait apparaître une annulation des caractères de Ramanujan que Selberg interdit de contrôler. On identifie le saut manquant précis : ce n'est plus $\mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}$, mais

$$\mathbb{Z} \to \text{estimation de corrélation bilinéaire (type Vaughan/Vinogradov)},$$

c'est-à-dire le passage d'un invariant ponctuel à une estimation de forme bilinéaire. On conclut que le raffinement analytique *nomme* l'obstruction de parité dans le langage des sommes exponentielles (ia67 §4) mais ne la franchit pas, et que la seule direction restante est celle que ia243 recommande en dernier ressort : les estimations de formes bilinéaires.

1. Rappel : l'invariant combinatoire Λ_n

On reprend les notations de la note précédente. Pour $n \geq 6$ pair, X_n est l'ensemble des mots booléens de longueur $n-1$ augmentés du symbole terminal, muni de l'action du décalage cyclique S et du retournement $\tau(w) = w^*$. On a posé

$$\Lambda_n \;=\; \sum_{w \in X_n^{\mathrm{ap}}} \frac{1}{|\mathrm{Orb}_S(w)|} \;-\; \sum_{\substack{w \in X_n^{\mathrm{ap}} \\ \tau(w)=w}} 1,$$

et l'on a montré (note précédente, Th. 4.1 et 6.2) :

$$\Lambda_n \;=\; \sum_{\substack{d \mid n \\ d<n}} \mu(n/d)\, 2^{d-1} \;-\; \sum_{\substack{d \mid n \\ d<n,\ 2 \mid d}} \mu(n/d)\, 2^{d/2-1} \;+\; \varepsilon_n, \qquad \Lambda_n \pmod 2 \;=\; \varepsilon_n \pmod 2,$$

où $\varepsilon_n = 1$ ssi $n \equiv 2 \pmod 4$. Le point faible de Λ_n est que sa réduction mod 2 ne dépend que de $n \pmod 4$, et ne contient aucune information sur la primalité de $n - x$ (Th. 6.2 de la note précédente). C'est cette information manquante que l'on veut capturer.

2. Les sommes de Ramanujan et le caractère de factorisation

2.1. Rappel sur les sommes de Ramanujan

On rappelle (ia67, §4) la somme de Ramanujan

$$c_k(m) \;=\; \sum_{\substack{1\le \ell\le k\\ \mathrm{pgcd}(\ell,k)=1}} e^{2i\pi \ell m/k}.$$

On utilise les propriétés standard suivantes :

- $c_k(m)\in\mathbb{Z}$ pour tous $k,m\ge 1$;
- $c_k(m)=\mu\!\left(\dfrac{k}{\mathrm{pgcd}(k,m)}\right)\cdot\dfrac{\varphi(k)}{\varphi(k/\mathrm{pgcd}(k,m))}$ si $\mathrm{pgcd}(k,m)\mid k$, et 0 sinon ;
- $c_k(m)\neq 0$ ssi $\mathrm{pgcd}(k,m)$ est sans facteur carré (i.e. $\mu(k/\mathrm{pgcd}(k,m))\neq 0$) ;
- $c_k(m)=\varphi(k)$ si $\mathrm{pgcd}(k,m)=1$; $c_k(m)=-1$ si k est premier et $k\mid m$;
- multiplicativité : si $\mathrm{pgcd}(k_1,k_2)=1$, $c_{k_1k_2}(m)=c_{k_1}(m)\,c_{k_2}(m)$.

2.2. Le caractère de factorisation

Définition 1 (Caractère de Ramanujan)**.** *Pour $k\ge 1$ et $m\ge 1$, on pose*

$$\chi_k(m) \;=\; \frac{c_k(m)}{\varphi(k)} \;\in\; \mathbb{Q}.$$

On a $\chi_k(m)=1$ si $\mathrm{pgcd}(k,m)=1$, $\chi_k(m)=-1/\varphi(k)$ si k est premier et $k\mid m$, et $|\chi_k(m)|\le 1$ en général.

Remarque : le caractère χ_k est l'analogue, dans le langage des sommes de Ramanujan, du caractère de Liouville $\lambda_{\mathrm{Liv}}(m)=(-1)^{\Omega(m)}$: il détecte la *factorisation* de m (via $\mathrm{pgcd}(k,m)$) et non seulement sa parité. C'est exactement le raffinement cherché : $\Lambda_n \pmod 2$ ne voyait que n ($\{rmmod\ 4$), tandis que χ_k voit la structure des diviseurs de $n-x$.

3. Définition de l'invariant raffiné $\Lambda_n^{(k)}$

3.1. Définition

Soit $w\in X_n^{\mathrm{ap}}$ un mot apériodique sous S, d'orbite $\mathrm{Orb}_S(w)$ de cardinal ℓ ($\ell\mid n$, $\ell<n$). On note x_w le sommant associé à w (via la bijection ia29 §1 ; pour une composition de la forme $x+(n-x)$, $x_w=x$).

Définition 2 (Invariant raffiné)**.** *Pour $k\ge 1$, on pose*

$$\Lambda_n^{(k)} \;=\; \sum_{\substack{w\in X_n^{\mathrm{ap}}\\ |\mathrm{Orb}_S(w)|=n/2}} \frac{\chi_k(n-x_w)}{|\mathrm{Orb}_S(w)|} \;-\; \sum_{\substack{w\in X_n^{\mathrm{ap}}\\ \tau(w)=w,\ |\mathrm{Orb}_S(w)|=n/2}} \chi_k(n-x_w).$$

Autrement dit, on restreint la sommation aux orbites de longueur maximale $n/2$ (celles qui correspondent aux compositions en deux sommants $x + (n - x)$), et l'on pondère chaque terme par $\chi_k(n - x_w)$.

Remarque : la restriction à $|\mathrm{Orb}_S(w)| = n/2$ est essentielle : ce sont les orbites qui correspondent aux compositions en deux sommants, donc aux candidats de Goldbach potentiels. Les orbites de longueur $< n/2$ correspondent à des compositions en $r \geq 3$ sommants, qui ne sont pas des décompositions de Goldbach (mais qui interviennent dans Λ_n).

3.2. Propriétés immédiates

Proposition 3. *Pour tout $n \geq 6$ pair et tout $k \geq 1$:*

1. *$\Lambda_n^{(k)} \in \mathbb{Q}$, et $\varphi(k) \cdot \Lambda_n^{(k)} \in \mathbb{Z}$;*
2. *$\Lambda_n^{(1)} = 0$ (car $\varphi(1) = 1$ et $c_1(m) = 1$, donc les deux sommes se compensent exactement par la formule de Lefschetz) ;*
3. *$\Lambda_n^{(k)} = 0$ si $k > n$ et $\mathrm{pgcd}(k, n) = 1$ (car alors $c_k(n - x) = \varphi(k)$ pour tout x, et les deux sommes se compensent).*

Démonstration. (1) Immédiat par $\chi_k = c_k/\varphi(k)$ et $c_k \in \mathbb{Z}$. (2) Pour $k = 1$, $\chi_1(m) = 1$ pour tout m, donc $\Lambda_n^{(1)}$ est la différence entre le nombre d'orbites et le nombre de points fixes, qui est nulle par Lefschetz (théorème de point fixe de Lefschetz pour l'involution τ sur le complexe des orbites, voir note précédente). (3) Si $\mathrm{pgcd}(k, n) = 1$ et $k > n$, alors pour tout $x \in [3, n/2]$, $\mathrm{pgcd}(k, n - x) = 1$ car $n - x < n < k$. Donc $c_k(n - x) = \varphi(k)$, $\chi_k(n - x) = 1$, et l'on retombe sur (2). □

4. Le raffinement voit la factorisation

Théorème 4 (Distinction des modèles de Selberg)**.** *Soit n pair et $k \leq \sqrt{n}$ un nombre premier. Notons $\mathcal{M}_{\mathrm{pair}}$ le modèle fictif où tous les candidats x ont $\omega(x) + \omega(n - x)$ pair, et $\mathcal{M}_{\mathrm{impair}}$ le modèle où tous ont $\omega(x) + \omega(n - x)$ impair.*

Alors, pour k premier tel que $k \nmid n$:

$$\Lambda_n^{(k)}(\mathcal{M}_{\mathrm{pair}}) \;\neq\; \Lambda_n^{(k)}(\mathcal{M}_{\mathrm{impair}})$$

si et seulement si le nombre de candidats x avec $k \mid (n - x)$ est différent dans les deux modèles.

Démonstration. Dans $\mathcal{M}_{\mathrm{pair}}$, tous les $n - x$ ont $\omega(n - x)$ de même parité que $\omega(x)$ (pair + pair ou impair + impair). Dans $\mathcal{M}_{\mathrm{impair}}$, tous ont $\omega(n-x)$ de parité opposée. Pour k premier, $\chi_k(n-x) = 1$ si $k \nmid (n - x)$, et $\chi_k(n - x) = -1/(k - 1)$ si $k \mid (n - x)$. La somme $\Lambda_n^{(k)}$ est donc une combinaison linéaire des indicatrices $\mathbf{1}_{k|(n-x)}$, et elle diffère entre les deux modèles ssi le nombre de x tels que $k \mid (n - x)$ diffère. Comme $\omega(n - x)$ ne détermine pas $k \mid (n - x)$ en général (un entier peut être premier avec k et avoir ω pair ou impair), les deux modèles peuvent avoir le même nombre de $k \mid (n - x)$ — auquel cas $\Lambda_n^{(k)}$ ne les distingue pas. □

Remarque : le Théorème **??** est *plus faible* que ce que j'annonçais dans mon message précédent. J'y affirmais que $\Lambda_n^{(k)}$ distinguait *toujours* les deux modèles ; c'est faux en général. Ce que l'on gagne

réellement, c'est que $\Lambda_n^{(k)}$ *peut* les distinguer (pour un bon choix de k), alors que $\Lambda_n \pmod 2$ ne le pouvait *jamais* (car il ne dépend que de $n \pmod 4$). C'est un progrès de précision, pas un saut qualitatif.

Théorème 5 ($\Lambda_n^{(k)}$ raffine $\Lambda_n \pmod 2$)**.** *Il existe des entiers pairs n_1, n_2 tels que $n_1 \equiv n_2 \pmod 4$ et $\Lambda_{n_1}^{(k)} \neq \Lambda_{n_2}^{(k)}$ pour un certain $k \leq \sqrt{n_1}$.*

Démonstration. Prendre $n_1 = 2p$ et $n_2 = 2q$ avec p, q premiers impairs distincts, et $p \equiv q \pmod 2$ (toujours vrai), de sorte que $n_1 \equiv n_2 \equiv 2 \pmod 4$. Choisir $k = p$ (premier). Alors $c_p(2p) = c_p(0) = \varphi(p) = p - 1$, tandis que $c_p(2q) = c_p(2q \pmod p)$, qui dépend de $q \pmod p$. Pour $p = 3$, $q = 7$: $n_1 = 6$, $n_2 = 14$. Calcul direct : $\Lambda_6^{(3)} \neq \Lambda_{14}^{(3)}$ (vérifié par programme). Donc $\Lambda_n^{(k)}$ distingue n_1 et n_2 alors que $\Lambda_n \pmod 2$ ne le fait pas. □

5. Le retour de l'obstruction de parité

5.1. L'énoncé que l'on voudrait

Pour prouver Goldbach, il suffirait d'établir une minoration

$$\#\{x \in C_n : x, n - x \text{ premiers}\} \;\geq\; 1.$$

En termes de $\Lambda_n^{(k)}$, cela équivaudrait à une minoration du terme correspondant à $\chi_k(n - x) = 1$ pour un k bien choisi (typiquement k premier $> \sqrt{n}$, mais alors k n'est plus dans la somme).

5.2. Le théorème négatif

Théorème 6 (Retour de l'obstruction)**.** *Toute minoration de la forme*

$$\Lambda_n^{(k)} \;\geq\; f(n), \qquad f(n) \text{ explicite, } f(n) \to \infty,$$

qui serait démontrable par les seules méthodes de crible (comptages dans des progressions arithmétiques, sans estimation de corrélation), est équivalente à l'obstruction de parité de Selberg, et n'est donc pas démontrable en l'état.

Preuve (argument). Supposons une telle minoration démontrable par crible. Le crible ne contrôle que les quantités de la forme

$$\sum_{x \in I_n} \mathbf{1}_{q|x}\, \mathbf{1}_{q'|n-x}, \qquad q, q' \leq \sqrt{n},$$

c'est-à-dire des comptages dans des progressions arithmétiques. Or $\chi_k(n - x)$ fait intervenir la *factorisation* de $n - x$ (via $\gcd(k, n - x)$), et la somme

$$\sum_{x \in I_n} \chi_k(n - x)\, \mathbf{1}_{q|x}$$

n'est pas contrôlable par crible pour k grand : c'est l'énoncé de Selberg (ia243, §4 ; ia299, §3.4). Donc $\Lambda_n^{(k)}$, qui fait intervenir χ_k via $\chi_k(n - x_w)$, ne peut pas être minoré par crible. La minoration cherchée est donc hors de portée des méthodes de crible. □

Remarque [Où exactement le crible échoue] : le crible contrôle les *indicatrices* $\mathbf{1}_{q|m}$ pour q petit, mais pas les *caractères* $\chi_k(m)$ pour k grand. Plus précisément, $\chi_k(m)$ est une somme de caractères additifs, et son contrôle nécessiterait une estimation de somme exponentielle du type

$$\sum_{m \le X} \chi_k(m)\, e^{2i\pi\alpha m},$$

qui est précisément l'objet de la méthode du cercle (Vinogradov, Vaughan). C'est le saut que ia243 identifie comme manquant (§7 : "arguments analytiques classiques").

5.3. Le saut manquant, reformulé

Corollaire 7. *Le passage $\Lambda_n \to \Lambda_n^{(k)}$ remplace l'obstruction de parité "brute" (indicatrices $\pmod 2$) par une obstruction de parité "raffinée" (caractères de Ramanujan), mais ne franchit pas l'obstruction : il la déplace vers une estimation de forme bilinéaire sur les caractères χ_k, qui est exactement le type d'estimation que le crible ne fournit pas.*

Démonstration. Combinaison du Théorème **??** et de la remarque précédente : le raffinement transforme un énoncé de comptage (indicatrices) en un énoncé de corrélation (caractères), mais les deux sont hors de portée du crible. Le raffinement est donc un *changement de langage*, pas un *franchissement*. □

6. Conclusion

On a construit un raffinement analytique $\Lambda_n^{(k)}$ de l'invariant combinatoire Λ_n, à valeurs dans $\mathbb{Q}$ (et dans $\mathbb{Z}$ après multiplication par $\varphi(k)$). Ce raffinement :

1. *voit* la factorisation de $n - x$ via les sommes de Ramanujan (Théorème **??**), là où $\Lambda_n \pmod 2$ ne voyait que $n \pmod 4$;
2. *peut* distinguer les modèles fictifs de Selberg, mais pas toujours (Théorème **??**) ;
3. *ne franchit pas* l'obstruction de parité : toute minoration globale réintroduit une estimation de corrélation bilinéaire hors de portée du crible (Théorème **??**, Corollaire **??**).

Le saut manquant n'est donc pas $\mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}$, comme je l'avais annoncé à tort dans mon message précédent. C'est $\mathbb{Z} \to^{?}$ estimation de forme bilinéaire. Ce franchissement est exactement celui que ia243 (§7) et ia299 (§3.4) identifient comme la seule direction réaliste, et il dépasse le cadre de cette note.

Références

[1] D. Vella-Chemla, *Un triplet spectral pour la primalité, à partir des compositions additives et de leur codage booléen*, note, 2026.
https://denisevellachemla.eu/ia29.pdf

[2] D. Vella-Chemla pilotant Claude, *Cribles de Grothendieck, ensemble Cristal, ensemble de la Castafiore et formule de Victor Varin*, note, juillet 2026.
https://denisevellachemla.eu/ia67.pdf

[3] D. Vella-Chemla pilotant ChatGPT, *Double crible de Goldbach et formalisme de Grothendieck*, note, septembre 2026.
https://denisevellachemla.eu/ia240.pdf

[4] D. Vella-Chemla pilotant ChatGPT-Lumo, *Double crible, topos annelé de Monique Hakim, involution* $x \mapsto n-x$, note, septembre 2026.
https://denisevellachemla.eu/ia241.pdf

[5] D. Vella-Chemla pilotant Claude, *Analyse critique de deux notes sur le double crible : formalisation topos-théorique et obstruction de parité*, note, septembre 2026.
https://denisevellachemla.eu/ia243.pdf

[6] D. Vella-Chemla pilotant Claude, *Cribles de Grothendieck, topos et conjecture de Goldbach*, note, octobre 2026.
https://denisevellachemla.eu/ia299.pdf

[7] A. Selberg, *On elementary methods in prime number theory*, Den 11te Skandinaviske Matematikerkongress, Trondheim, 1949.

[8] H. Iwaniec, *Almost-primes represented by quadratic polynomials*, Invent. Math. 47 (1978), 171-188.

[9] J.-R. Chen, *On the representation of a larger even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes*, Sci. Sinica 16 (1973), 157-176.

[10] R. C. Vaughan, *Sommes trigonométriques sur les nombres premiers*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 285 (1977), A981-A983.