

Multiplication matricielle entrelacée bi-orientée et un opérateur de factorisation de l'oscillateur harmonique quantique

Jean-Pierre Gazeau

Résumé

Nous introduisons un produit matriciel entrelacé bi-orienté sur les matrices 2×2 à coefficients dans une algèbre unifère, éventuellement non associative, étendant un moyen mnémotechnique matriciel pour le doublement de Cayley-Dickson. Les orientations opposées $\diamond_R$ et $\diamond_L$ coïncident précisément lorsque l'algèbre sous-jacente est commutative. Pour les opérateurs canoniques de position et d'impulsion Q, P sur $L^2(\mathbb{R})$, une matrice $\mathcal{D}$ et sa compagne $\tilde{\mathcal{D}}$ satisfont, sur le domaine de Schwartz commun,

$$\tilde{\mathcal{D}} \diamond_R \mathcal{D} = \tilde{\mathcal{D}} \diamond_L \mathcal{D} = 2H \, 1_2, \quad H = \frac{1}{2}(P^2 + Q^2).$$

Nous étudions les équations aux valeurs propres entrelacées associées pour des colonnes à valeurs opératoriels. Les combinaisons $\Phi = A + iB$ et $\Psi = A - iB$ découplent les équations en équations de Sylvester bilatérales. Nous construisons des opérateurs propres généralisés explicites de rang un à partir des états propres de position et d'impulsion. Leurs noyaux distributionnels appartiennent à l'espace de Hilbert doublé truqué $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \subset L^2(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$; les opérateurs de position et d'impulsion correspondants agissent sur des facteurs tensoriels différents et commutent donc.

Les familles de rang un n'épuisent pas les solutions distributionnelles : des solutions généralisées d'ordre supérieur sont également exhibées. Nous distinguons les identités algébriques sur le cœur de Schwartz des questions concernant les réalisations d'opérateurs fermés.

1. Introduction

Cette note est offerte comme une contribution à la collection thématique en mémoire de Franciszek Hugon Szafraniec. L'auteur a eu le privilège d'écrire deux articles avec lui, sur les états cohérents construits à partir de polynômes d'Hermite holomorphes et sur le plan non commutatif [1], et sur l'opérateur d'angle quantique associé à un opérateur de nombre [2]. Dans les deux, l'insistance de Szafraniec sur des fondements précis en théorie des opérateurs - domaines, fermabilité, fait d'être auto-adjoint - a façonné le résultat final au moins autant que la motivation physique ; voir en particulier ses propres modèles analytiques rigoureux pour l'oscillateur harmonique quantique [3]. La présente note est écrite dans cet esprit : son objet central est à nouveau l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique $H = \frac{1}{2}(P^2 + Q^2)$, abordé ici par un nouveau dispositif de factorisation algébrique.

Les octonions et, plus généralement, la tour de Cayley-Dickson peuvent être écrits en termes de matrices blocs 2×2 à coefficients dans l'algèbre précédente de la tour. Dans ce cadre, la multiplication peut être encodée par une règle dans laquelle certains produits sont pris dans leur ordre habituel tandis que d'autres sont inversés [4] ; voir [5, 6, 7, 8] pour un arrière-plan sur les octonions et les algèbres non associatives.

Le but de la présente note est que cette règle doit être considérée comme un objet algébrique à part entière, indépendamment des octonions. Elle admet deux orientations naturelles, $\diamond_R$ et $\diamond_L$ (la première était notée par $\circ$ dans [4]), à étudier comme une paire (Section 2.), et elle s'applique aux matrices à coefficients dans *n'importe quelle* algèbre unifère, en particulier aux matrices d'opérateurs sur un espace de Hilbert. En prenant les coefficients comme les opérateurs de position et d'impulsion, on obtient les principaux nouveaux résultats de cette note :

- une factorisation entrelacée $\tilde{\mathcal{D}} \diamond_R \mathcal{D} = \tilde{\mathcal{D}} \diamond_L \mathcal{D} = 2H \mathbf{1}_2$ de l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique (Section 4., Proposition 4) ;
- des solutions généralisées explicites du problème aux valeurs propres entrelacé $\mathcal{D} \diamond_R V = \lambda V$ pour des vecteurs colonnes à valeurs opératoriels V , incluant des opérateurs de rang un construits à partir des états propres généralisés de position et d'impulsion d'un espace de Hilbert truqué (Section 6., Proposition 6), l'orientation opposée $\diamond_L$ produisant la famille image miroir (ket $\leftrightarrow$ bra échangés) pour les mêmes valeurs propres ; nous montrons que ce n'est pas un accident, mais la trace d'un problème aux valeurs propres à deux modes caché à l'intérieur de l'équation d'apparence unilatérale $\mathcal{D} \diamond_\sigma V = \lambda V$.

La Section 2. établit le cadre algébrique ; la Section 3. enregistre quelques faits structurels nécessaires plus loin ; les Sections 4.-6. contiennent le cœur opératoire de la note ; la Section 7. se termine par une perspective.

Bien que la plupart des résultats soient élémentaires, nous avons choisi de fournir des preuves explicites pour des raisons de complétude et de clarté.

2. Les deux produits entrelacés orientés

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre unifère, non supposée commutative et pas nécessairement associative. Pour

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix},$$

à coefficients dans $\mathcal{A}$, définissons le *produit entrelacé orienté à droite*

$$X \diamond_R Y = \begin{pmatrix} AE + GB & FA + BH \\ EC + DG & CF + HD \end{pmatrix}.$$

En lisant chaque coefficient comme une paire (premier terme, second terme), le motif des ordres est

$$(1, 1) : (X_1)(Y_1.) + (Y_2.)(X_2) \Rightarrow \text{naturel puis inversé},$$

et de même pour les autres coefficients. En étiquetant l'ordre naturel comme R (le facteur droit de X contracte en premier) et l'ordre inversé comme L, le motif en blocs est

$$\boxed{\begin{array}{cc} RL & LR \\ LR & RL \end{array}} \quad \text{ou de manière équivalente} \quad \boxed{\text{RLLR/LRRL}}.$$

Le produit opposé, ou *produit entrelacé orienté à gauche*, est

$$X \diamond_L Y = \begin{pmatrix} EA + BG & AF + HB \\ CE + GD & FC + DH \end{pmatrix}.$$

Son motif d'orientation est

$$\boxed{\begin{array}{cc} LR & RL \\ RL & LR \end{array}} \quad \text{ou de manière équivalente} \quad \boxed{\text{LRRL/RLLR}}.$$

Remarque 1 (Relation entre $\diamond_R$ et $\diamond_L$). *Une inspection directe des définitions montre que*

$$X \diamond_L Y = X \diamond_R Y$$

est vraie si et seulement si $\mathcal{A}$ est commutative. En général, les deux produits sont distincts. La relation qui est vraie inconditionnellement est purement formelle, et ne nécessite aucun élargissement du cadre algébrique pour être énoncée : si, dans chaque coefficient de la formule définissant $X \diamond_R Y$, on inverse l'ordre de chaque produit individuel ($pq \mapsto qp$, en utilisant la multiplication de $\mathcal{A}$), on obtient exactement la formule définissant $X \diamond_L Y$ - avec X et Y jouant les mêmes rôles tout du long, aucune matrice n'étant échangée ou autrement transformée. C'est une symétrie directe, coefficient par coefficient, entre les deux définitions encadrées ci-dessus, et on peut la vérifier terme à terme.

Définition 2. *Le triplet*

$$\mathfrak{J}(\mathcal{A}) = (M_2(\mathcal{A}), \diamond_R, \diamond_L)$$

sera appelé l'algèbre matricielle entrelacée bi-orientée sur $\mathcal{A}$. Le terme “algèbre” est utilisé de manière large : en général ni $\diamond_R$ ni $\diamond_L$ n'est associatif.

La matrice identité 1_2 est une unité bilatère pour les deux produits entrelacés :

$$1_2 \diamond_{R,L} X = X \diamond_{R,L} 1_2 = X, \quad X \in M_2(\mathcal{A}).$$

Ceci découle immédiatement des formules de définition.

3. Autres propriétés structurelles

Les deux produits ne sont pas indépendants ; ils représentent des orientations opposées du même principe d'entrelacement, formellement échangées par une involution $\mathcal{O}$ avec $\mathcal{O}^2 = 1$, $\mathcal{O}(\diamond_R) = \diamond_L$, $\mathcal{O}(\diamond_L) = \diamond_R$. Par la Remarque 1, $\mathcal{O}$ agit coefficient par coefficient, en inversant l'ordre de chaque produit individuel apparaissant dans la formule de définition. L'objet naturel est donc la paire $(\diamond_R, \diamond_L)$, et non un produit unique.

Pour des coefficients opératoriels, les deux orientations interagissent avec l'adjoint exactement comme la multiplication matricielle ordinaire, à condition que l'adjoint d'une matrice d'opérateurs blocs 2×2 soit pris correctement : non pas simplement en conjuguant chaque coefficient sur place, mais en échangeant aussi les positions des blocs hors diagonale, comme il se doit pour tout opérateur sur $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$.

Proposition 3 (Échange d'adjoint). *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} \in M_2(B(\mathcal{H}))$, considérés comme opérateurs sur $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ [9]. Écrivons*

$$X^* = \begin{pmatrix} A^* & C^* \\ B^* & D^* \end{pmatrix}$$

pour l'adjoint hilbertien de X - coefficients conjugués et positions hors diagonale échangées, exactement comme pour toute matrice d'opérateurs blocs - et de même pour Y^* . Alors, pour l'une ou l'autre orientation $\sigma \in \{R, L\}$,

$$(X \diamond_\sigma Y)^* = Y^* \diamond_\sigma X^*.$$

En particulier, si X et Y sont auto-adjoints en tant qu'opérateurs blocs (ce qui requiert $A^* = A$, $D^* = D$, et $C = B^*$ - et non simplement $B = C$), alors

$$(X \diamond_\sigma Y)^* = Y \diamond_\sigma X.$$

Démonstration. Nous donnons le cas $\sigma = R$; le cas $\sigma = L$ se prouve de la même manière. En conjuguant chaque coefficient de $X \diamond_R Y$ et en échangeant les positions des blocs hors diagonale, on obtient

$$(X \diamond_R Y)^* = \begin{pmatrix} E^* A^* + B^* G^* & C^* E^* + G^* D^* \\ A^* F^* + H^* B^* & F^* C^* + D^* H^* \end{pmatrix}.$$

D'autre part, en appliquant la formule de définition de $\diamond_R$ à $Y^* = \begin{pmatrix} E^* & G^* \\ F^* & H^* \end{pmatrix}$ et $X^* = \begin{pmatrix} A^* & C^* \\ B^* & D^* \end{pmatrix}$ - noter les coefficients hors diagonale échangés dans chacune - donne, coefficient par coefficient,

$$Y^* \diamond_R X^* = \begin{pmatrix} E^* A^* + B^* G^* & C^* E^* + G^* D^* \\ A^* F^* + H^* B^* & F^* C^* + D^* H^* \end{pmatrix},$$

ce qui coïncide avec $(X \diamond_R Y)^*$ terme à terme. Le cas particulier s'ensuit puisque $X^* = X$, $Y^* = Y$ sous les hypothèses qu'ils soient auto-adjoints énoncées. $\square$

Par conséquent, pour X, Y auto-adjoints, le produit symétrisé $X \circ_\sigma Y = \frac{1}{2}(X \diamond_\sigma Y + Y \diamond_\sigma X)$ est lui-même auto-adjoint :

$$(X \circ_\sigma Y)^* = \frac{1}{2}[(X \diamond_\sigma Y)^* + (Y \diamond_\sigma X)^*] = \frac{1}{2}[Y \diamond_\sigma X + X \diamond_\sigma Y] = X \circ_\sigma Y,$$

une propriété authentique de type algèbre de Jordan, dans l'esprit du produit opératoriel symétrisé de [10, 11]; une comparaison plus complète avec les algèbres de Jordan est laissée pour des travaux futurs.

Au-delà de l'adjoint, la structure bi-orientée supporte des translations à gauche et à droite $L_X^R(Y) = X \diamond_R Y$, $R_X^R(Y) = Y \diamond_R X$ (et de même pour $\diamond_L$), et, corrélativement, quatre notions d'inverse unilatéral et de structure de type boucle [12]. De même, puisque deux produits coexistent, les défauts d'associativité se déclinent en quatre saveurs $\mathcal{A}_{\sigma\tau}(X, Y, Z) = (X \diamond_\sigma Y) \diamond_\tau Z - X \diamond_\sigma (Y \diamond_\tau Z)$, $\sigma, \tau \in \{R, L\}$; déjà pour $\sigma = \tau$ et $\mathcal{A}$ associative, $\mathcal{A}_{RR}$ et $\mathcal{A}_{LL}$ ne s'annulent pas identiquement, de sorte que les produits entrelacés restent non associatifs même sur une algèbre de base associative. Nous enregistrons un seul problème représentatif et laissons autrement cette ligne d'investigation pour une étude purement algébrique séparée.

Classer les sous-espaces de $M_2(\mathcal{A})$ sur lesquels un ou plusieurs des quatre associateurs

$$\mathcal{A}_{RR}, \mathcal{A}_{RL}, \mathcal{A}_{LR}, \mathcal{A}_{LL}$$

s'annulent, et identifier l'analogue entrelacé des identités alternatives $[x, x, y] = 0$, $[y, x, x] = 0$.

4. Une factorisation entrelacée de $P^2 + Q^2$

Soient Q et P les opérateurs usuels de position et d'impulsion sur $L^2(\mathbb{R})$,

$$(Qf)(x) = xf(x), \quad (Pf)(x) = -i \frac{d}{dx} f(x),$$

définis initialement, et essentiellement auto-adjoints, sur l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ [13], sur lequel ils agissent de manière invariante et satisfont la relation de commutation canonique $[Q, P] = i1_{\mathcal{H}}$. Définissons

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} Q & -P \\ P & Q \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} Q & P \\ -P & Q \end{pmatrix}.$$

Proposition 4 (Carrés entrelacés). *Sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}(\mathbb{R})$,*

$$\mathcal{D} \diamond_R \mathcal{D} = \begin{pmatrix} Q^2 - P^2 & -2PQ \\ 2QP & Q^2 - P^2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D} \diamond_L \mathcal{D} = \begin{pmatrix} Q^2 - P^2 & -2QP \\ 2PQ & Q^2 - P^2 \end{pmatrix}.$$

Les produits mixtes, en revanche, sont indépendants de l'orientation :

$$\tilde{\mathcal{D}} \diamond_R \mathcal{D} = \tilde{\mathcal{D}} \diamond_L \mathcal{D} = (Q^2 + P^2) 1_2.$$

Démonstration. Les calculs de $\mathcal{D} \diamond_{R,L} \mathcal{D}$ sont des applications directes des définitions. Nous détaillons seulement le produit mixte $\tilde{\mathcal{D}} \diamond_R \mathcal{D}$, avec $\tilde{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} Q & P \\ -P & Q \end{pmatrix}$ jouant le rôle de $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $\mathcal{D}$ le rôle de $Y = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$, de sorte que $A = D = Q$, $B = P$, $C = -P$, $E = H = Q$, $F = -P$, $G = P$.

Le coefficient $(1, 1)$ est $AE + GB = Q^2 + P^2$; le coefficient $(1, 2)$ est $FA + BH = -PQ + PQ = 0$; le coefficient $(2, 1)$ est $EC + DG = -QP + QP = 0$; le coefficient $(2, 2)$ est $CF + HD = P^2 + Q^2$. Le calcul pour $\tilde{\mathcal{D}} \diamond_L \mathcal{D}$ donne le même résultat, les rôles de QP et PQ dans les coefficients hors diagonale étant échangés mais leur somme s'annulant toujours. $\square$

En posant $H = \frac{1}{2}(P^2 + Q^2)$ pour l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique,

$$\boxed{\tilde{\mathcal{D}} \diamond_R \mathcal{D} = \tilde{\mathcal{D}} \diamond_L \mathcal{D} = 2H \mathbf{1}_2.}$$

C'est l'analogie entrelacé de la factorisation classique $(x - iy)(x + iy) = x^2 + y^2$, avec le produit scalaire ordinaire remplacé par le produit matriciel entrelacé bi-orienté; ici il est indépendant de l'orientation bien que $\mathcal{D} \diamond_R \mathcal{D} \neq \mathcal{D} \diamond_L \mathcal{D}$. En conséquence, $\mathcal{D}$ peut être considéré comme une *racine carrée entrelacée* de $2H \mathbf{1}_2$, et, en ce sens précis, comme un opérateur de type Dirac entrelacé pour l'oscillateur harmonique.

Remarque 5 (Sur la rigueur). *Comme Q et P sont non bornés, la Proposition 4 est, à proprement parler, une identité d'opérateurs restreinte à $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}(\mathbb{R})$, le cœur invariant commun naturel sur lequel $\mathcal{D}$ et $\tilde{\mathcal{D}}$ agissent et sur lequel Q, P sont essentiellement auto-adjoints [13]. La promouvoir en une identité entre opérateurs fermés sur $L^2(\mathbb{R}) \oplus L^2(\mathbb{R})$, et régler le fait d'être auto-adjoint ou la normalité de $\mathcal{D}$ lui-même par rapport à une structure d'espace de Hilbert appropriée, est exactement le type de question qu'un traitement pleinement rigoureux doit aborder; c'est dans l'esprit des propres modèles opératoriels de Szafraniec pour l'oscillateur harmonique [3] et de nos constructions conjointes d'opérateurs d'états cohérents et d'angle rigoureusement définis associés à H [1, 2]. Nous enregistrons les deux questions naturelles comme problèmes ouverts.*

$\mathcal{D}$ est-il essentiellement auto-adjoint, anti-auto-adjoint, ou normal par rapport à une structure d'espace de Hilbert naturelle sur $L^2(\mathbb{R}) \oplus L^2(\mathbb{R})$?

L'identité entrelacée $\tilde{\mathcal{D}} \diamond_R \mathcal{D} = 2H \mathbf{1}_2$ peut-elle être promue d'une identité formelle sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}(\mathbb{R})$ à une identité entre opérateurs fermés sur $L^2(\mathbb{R}) \oplus L^2(\mathbb{R})$?

5. Opérateurs de création et d'annihilation

Introduisons les opérateurs standard de création et d'annihilation

$$a = \frac{Q + iP}{\sqrt{2}}, \quad a^\dagger = \frac{Q - iP}{\sqrt{2}},$$

satisfaisant $[a, a^\dagger] = \mathbf{1}_{\mathcal{H}}$ et $H = a^\dagger a + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\mathcal{H}}$. En termes de a et $a^\dagger$,

$$\mathcal{D} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a + a^\dagger & i(a - a^\dagger) \\ -i(a - a^\dagger) & a + a^\dagger \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{D}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a + a^\dagger & -i(a - a^\dagger) \\ i(a - a^\dagger) & a + a^\dagger \end{pmatrix}.$$

L'identité entrelacée $\tilde{\mathcal{D}} \diamond_R \mathcal{D} = 2H \mathbf{1}_2$ devient alors, après substitution,

$$\tilde{\mathcal{D}} \diamond_R \mathcal{D} = (2a^\dagger a + \mathbf{1}_{\mathcal{H}}) \mathbf{1}_2,$$

ce qui exhibe $\mathcal{D}$ comme la “racine carrée” de la matrice de l'opérateur de nombre $N \mathbf{1}_2$ (où $N = a^\dagger a$) au sens entrelacé bi-orienté, en analogie avec la racine carrée de Dirac de l'opérateur de Klein-Gordon [14]. Une représentation systématique de l'algèbre de Weyl-Heisenberg via $\diamond_{R,L}$ reste à développer.

6. Le problème aux valeurs propres opératoriels pour $\mathcal{D}$

Nous étudions maintenant l'équation aux valeurs propres entrelacée pour la matrice $\mathcal{D}$, où les “vecteurs propres” sont eux-mêmes des matrices colonnes 2×1 d'opérateurs. Les deux orientations se réduisent à des équations de type Sylvester, résolues par des opérateurs de rang un construits à partir des états propres (généralisés) de position et d'impulsion d'un espace de Hilbert truqué ; c'est le second résultat principal de la contribution.

Extension de $\diamond_{R,L}$ aux vecteurs colonnes

Pour une colonne 2×1 $V = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ à coefficients opératoriels A, B , nous étendons $\diamond_R$ et $\diamond_L$ en posant la seconde colonne du facteur droit à zéro dans les formules 2×2 . Une lecture directe des définitions donne

$$\mathcal{D} \diamond_R V = \begin{pmatrix} QA - BP \\ AP + QB \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D} \diamond_L V = \begin{pmatrix} AQ - PB \\ PA + BQ \end{pmatrix}.$$

La différence entre les deux orientations est maintenant claire et uniforme : sous $\diamond_R$, Q multiplie *par la gauche* et P multiplie *par la droite*, quel que soit celui de A, B sur lequel il agit ($QA, -BP, AP, QB$) ; sous $\diamond_L$ les deux rôles sont échangés, P toujours par la gauche et Q toujours par la droite ($AQ, -PB, PA, BQ$). Ceci affine, pour le cas vectoriel, la même asymétrie gauche/droite qui sous-tend les motifs RLLR et LRRL de la Section 2..

Les deux systèmes aux valeurs propres

Les équations aux valeurs propres entrelacées $\mathcal{D} \diamond_R V = \lambda V$ et $\mathcal{D} \diamond_L V = \lambda V$, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, donnent les systèmes opératoriels :

$$(\diamond_R) : \quad \begin{cases} QA - BP = \lambda A, \\ AP + QB = \lambda B, \end{cases} \quad (\diamond_L) : \quad \begin{cases} AQ - PB = \lambda A, \\ PA + BQ = \lambda B. \end{cases}$$

Complexification

Posons $\Phi = A + iB$, $\Psi = A - iB$, donc $A = (\Phi + \Psi)/2$, $B = (\Phi - \Psi)/(2i)$. En combinant la ligne 1 et i-ligne 2 de chaque système (pour Φ), et la ligne 1 moins i-ligne 2 (pour Ψ), on obtient après un calcul direct

$$\begin{aligned} (\diamond_R) : \quad & Q\Phi + i\Phi P = \lambda\Phi, & Q\Psi - i\Psi P = \lambda\Psi, \\ (\diamond_L) : \quad & \Phi Q + iP\Phi = \lambda\Phi, & \Psi Q - iP\Psi = \lambda\Psi. \end{aligned}$$

De manière équivalente, en termes des opérateurs d'échelle $a = (Q + iP)/\sqrt{2}$, $a^\dagger = (Q - iP)/\sqrt{2}$,

$$(\diamond_R) : \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\{\Phi, a\} - [\Phi, a^\dagger] \right) = \lambda\Phi, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\{\Psi, a^\dagger\} - [\Psi, a] \right) = \lambda\Psi, \quad (1)$$

$$(\diamond_L) : \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\{\Phi, a\} + [\Phi, a^\dagger] \right) = \lambda\Phi, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\{\Psi, a^\dagger\} + [\Psi, a] \right) = \lambda\Psi, \quad (2)$$

Dans les deux orientations Φ et Ψ sont *découplés l'un de l'autre* - chaque équation n'implique qu'un seul des deux - mais aucune ne se réduit à une équation aux valeurs propres unilatérale du type

familier $a\Phi = \mu\Phi$: chacune est une véritable *équation de Sylvester*, avec l'un de Q, P agissant sur Φ (ou Ψ) par la gauche et l'autre par la droite. Les deux orientations sont des images miroir l'une de l'autre sous l'échange gauche/droite : $\diamond_R$ a Q à gauche et P à droite ; $\diamond_L$ a les rôles inversés.

Solution via l'espace de Hilbert truqué

Pour les états propres généralisés de position et d'impulsion, nous utilisons le triplet de Gelfand à une particule

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}),$$

avec ses kets propres généralisés de position et d'impulsion $|q\rangle, |p\rangle \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $q, p \in \mathbb{R}$, satisfaisant $Q|q\rangle = q|q\rangle$ et $\langle p|P = p\langle p|$ au sens distributionnel [15, 16, 17, 18].

Pour le cadre d'analyse fonctionnelle des espaces de Hilbert truqués et le traitement algébrique des opérateurs non bornés, nous renvoyons aux monographies d'Antoine, Trapani et collaborateurs [17, 18].

Le théorème du noyau de Schwartz fournit le cadre naturel pour le problème aux valeurs propres à valeurs opératoriels considéré ici [19] : toute application linéaire continue $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est uniquement représentée par une distribution tempérée $K_T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ via

$$\langle T\varphi, \psi \rangle = \langle K_T, \psi \otimes \varphi \rangle, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Par conséquent, le problème aux valeurs propres à valeurs opératoriels peut être formulé comme une équation différentielle distributionnelle sur $\mathbb{R}^2$: en écrivant $\Phi(x, y)$ pour le noyau d'un opérateur $\Phi : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $Q\Phi$ agit sur lui comme la multiplication par x et ΦP comme $i\partial_y$.

Cette correspondance conduit naturellement à l'espace de Hilbert truqué doublé

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \subset L^2(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2),$$

où $L^2(\mathbb{R}^2)$ est identifié à l'espace de Hilbert des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur $L^2(\mathbb{R})$. Les opérateurs propres généralisés considérés ci-dessous appartiennent à l'extension distributionnelle de cet espace de Hilbert et ne sont pas nécessairement des opérateurs de Hilbert-Schmidt : précisément, les solutions de rang un ci-dessous sont des noyaux généralisés et non de Hilbert-Schmidt, puisque les opérateurs de multiplication correspondants sur $L^2(\mathbb{R}^2)$ n'ont aucune fonction propre non nulle de carré intégrable. Nous ne prétendons rien ici sur toutes les solutions opératoriels bornées possibles sans hypothèses de domaine supplémentaires.

Proposition 6 (Opérateurs propres truqués du système $\diamond_R$). *Écrivons $\lambda = q + ip \in \mathbb{C}$, $q, p \in \mathbb{R}$. Les opérateurs de rang un*

$$\Phi = |q\rangle\langle p|, \quad \Psi = |q\rangle\langle -p|$$

résolvent $Q\Phi + i\Phi P = \lambda\Phi$ et $Q\Psi - i\Psi P = \lambda\Psi$ respectivement, pour tous $q, p \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Puisque $Q|q\rangle = q|q\rangle$ et $\langle p|P = p\langle p|$,

$$Q\Phi + i\Phi P = q\Phi + ip\Phi = (q + ip)\Phi = \lambda\Phi;$$

de même $\langle -p|P = -p\langle -p|$ donne $Q\Psi - i\Psi P = q\Psi - i(-p)\Psi = (q + ip)\Psi = \lambda\Psi$. □

Remarque 7 (Unicité, et une mise en garde sur la chaîne de Jordan). *Sous forme de noyau, $Q\Phi + i\Phi P = \lambda\Phi$ se lit $\partial_y \Phi(x, y) = (x - \lambda)\Phi(x, y)$. Pour x fixé, la solution générale de cette EDO en y est $C(x)e^{(x-\lambda)y}$, qui est tempérée en y seulement si $\text{Re}(x - \lambda) = 0$, c'est-à-dire $x = q$; par conséquent $\Phi(x, \cdot)$ s'annule pour $x \neq q$, et Φ est une distribution en x supportée au point unique q . Les distributions les plus simples de ce type sont des multiples de $\delta(x - q)$, donnant exactement $\Phi = c|q\rangle\langle p|$ comme ci-dessus. Une distribution supportée en un point n'est pas nécessairement un pur delta, cependant : en utilisant $x\delta'(x - q) = q\delta'(x - q) - \delta(x - q)$, on vérifie directement que*

$$\Phi = c_1 \delta'(x - q) e^{-ipy} - c_1 y \delta(x - q) e^{-ipy} + c_0 \delta(x - q) e^{-ipy}$$

résout aussi l'équation pour tous $c_0, c_1 \in \mathbb{C}$, et cette chaîne de Jordan s'étend à tout ordre $\delta^{(k)}(x - q)$, $k \geq 0$. Donc $\Phi = |q\rangle\langle p|$ est la plus simple, mais pas la seule, solution pour un λ donné; une classification complète est laissée pour des travaux futurs (Problème 6.).

Récupération de A et B

En prenant les solutions de rang un de la Proposition 6, $\Phi = \alpha|q\rangle\langle p|$ et $\Psi = \beta|q\rangle\langle -p|$ pour des $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ arbitraires, et en inversant $A = (\Phi + \Psi)/2$, $B = (\Phi - \Psi)/(2i)$, on obtient le vecteur propre $\diamond_R$

$$V_{q,p}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} |q\rangle \begin{pmatrix} \alpha\langle p| + \beta\langle -p| \\ -i(\alpha\langle p| - \beta\langle -p|) \end{pmatrix}, \quad \lambda = q + ip, \quad q, p \in \mathbb{R}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \quad (3)$$

Les opérateurs Φ et Ψ ne portent aucune condition de normalisabilité bornée/Hilbert-Schmidt à imposer à l'un l'autre - aucun des deux n'est normalisable pour commencer - donc les deux survivent indépendamment : la famille de rang un exhibée pour chaque $\lambda = q + ip$ engendre un sous-espace de dimension complexe deux lorsque $p \neq 0$, engendré par $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ et $(0, 1)$, mais elle n'épuise pas l'espace des solutions distributionnelles, comme le montre la remarque précédente. Pour $p = 0$ les deux opérateurs de rang un exhibés coïncident et ce sous-espace est de dimension un.

Le cas $\diamond_L$, et comparaison

Le même argument, avec les rôles de ket et bra échangés (puisque $\diamond_L$ place Q, P du côté opposé de Φ, Ψ par rapport à $\diamond_R$), donne

$$\Phi = \alpha|p\rangle\langle q|, \quad \Psi = \beta|-p\rangle\langle q|$$

comme solutions de rang un $\diamond_L$ pour le même $\lambda = q + ip$. Les deux orientations sont donc d'honnêtes images miroir l'une de l'autre - $\diamond_R$ fixe l'étiquette de position sur le ket et porte la partie imaginaire de la valeur propre sur l'étiquette d'impulsion du bra, $\diamond_L$ fait l'inverse - plutôt que l'asymétrie "découple/ne découple pas" initialement conjecturée.

	$\diamond_R$	$\diamond_L$
Système	$Q\Phi + i\Phi P = \lambda\Phi,$ $Q\Psi - i\Psi P = \lambda\Psi$	$\Phi Q + iP\Phi = \lambda\Phi,$ $\Psi Q - iP\Psi = \lambda\Psi$
Φ, Ψ couplés ?	Non (chaque équation n'en implique qu'un)	Non
Type	Sylvester (bilatéral)	Sylvester (bilatéral)
Solution de rang un	$\Phi = q\rangle\langle p , \Psi = q\rangle\langle -p $	$\Phi = p\rangle\langle q , \Psi = -p\rangle\langle q $

Interprétation physique : une reformulation à deux modes

Pourquoi Q agissant d'un côté de Φ et P de l'autre, sans terme croisé, produirait-il des états propres simultanés *nets*, alors que l'équation unilatérale naïve (mais incorrecte) $a\Phi = \mu\Phi$ d'une première tentative forcerait plutôt Φ à être un véritable état cohérent, flou à la fois en Q et P de la quantité de Heisenberg ? L'équation bilatérale est secrètement un problème à deux modes déguisé.

Identifions un opérateur de Hilbert-Schmidt avec son noyau dans $L^2(\mathbb{R}^2) \simeq \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$; étendons la correspondance aux noyaux distributionnels tempérés lorsque les opérations sont définies. Le vecteur généralisé $|\Phi\rangle\rangle$ est donc dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$, pas généralement dans $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$. La multiplication à gauche par Q agit comme $Q \otimes 1_{\mathcal{H}}$; la multiplication à droite par P agit, après cette identification, comme $-(1_{\mathcal{H}} \otimes P)$, le signe venant de $P^T = -P$ (la transposée de $P = -i d/dx$ dans la représentation position, reflétant son caractère impair sous renversement du temps ; ceci et les identités de vectorisation sous-jacentes sont élémentaires à vérifier directement). L'équation $\diamond_R$ pour Φ devient exactement

$$(Q^{(1)} - iP^{(2)})|\Phi\rangle\rangle = \lambda|\Phi\rangle\rangle,$$

un véritable problème aux valeurs propres à deux modes, $Q^{(1)}$ agissant sur la première copie de $\mathcal{H}$ et $P^{(2)}$ sur la seconde. Puisque $Q^{(1)}$ et $P^{(2)}$ vivent sur des facteurs tensoriels *différents*, ils commutent exactement, $[Q^{(1)}, P^{(2)}] = 0$, en contraste marqué avec $[Q, P] = i1_{\mathcal{H}}$ dans une seule copie. Il n'y a donc pas d'obstruction de Heisenberg entre eux, et ils admettent une famille propre conjointe généralisée $|q\rangle \otimes |-p\rangle$ pour tous $q, p \in \mathbb{R}$ - ce qui est exactement $\Phi = |q\rangle\langle p|$ relu comme un opérateur. L'équation pour Ψ est l'énoncé conjugué, $(Q^{(1)} + iP^{(2)})|\Psi\rangle\rangle = \lambda|\Psi\rangle\rangle$, avec base propre $|q\rangle \otimes |p\rangle$, c'est-à-dire $\Psi = |q\rangle\langle -p|$.

C'est le sens précis dans lequel le présent résultat diffère de, tout en partageant la même valeur propre $\lambda = q + ip$ que, le cas de l'état cohérent : $a = (Q + iP)/\sqrt{2}$ est un opérateur véritablement à *un seul mode*, soumis à la relation d'incertitude complète, donc une équation $a\Phi = \mu\Phi$ ne peut être satisfaite que par le meilleur compromis disponible, l'état cohérent $|\mu\rangle$; tandis que $\mathcal{D} \diamond_{\sigma} V = \lambda V$, une fois correctement dérivée, est une équation à *deux* modes dont les deux moitiés n'interagissent jamais, et peut donc être satisfaite exactement, par le point de l'espace des phases classique lui-même. Échanger $\diamond_R \leftrightarrow \diamond_L$ échange quel facteur tensoriel porte Q et lequel porte P , correspondant à l'échange ket $\leftrightarrow$ bra déjà noté ci-dessus. Dans ce langage les solutions distributionnelles d'ordre supérieur de la remarque précédente sont des vecteurs propres généralisés de l'opérateur combiné $Q^{(1)} - iP^{(2)}$, pas nécessairement des vecteurs propres simultanés de $Q^{(1)}$ et $P^{(2)}$ séparément - un phénomène déjà familier de la théorie spectrale des espaces de Hilbert truqués, et le cadre naturel dans lequel poursuivre le Problème 6..

Une transformée de Fourier unidimensionnelle le rend explicite

L'image à deux modes ci-dessus peut être rendue complètement concrète - et la preuve de la Proposition 6 correspondamment élémentaire - par une transformée de Fourier unidimensionnelle ordinaire dans la *seconde* variable du noyau seule. Pour $\Phi : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de noyau $\Phi(x, y)$, posons

$$\widehat{\Phi}(x, k) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x, y) e^{-iky} dy.$$

Puisque $\partial_y \mapsto ik$ sous cette transformée, l'équation de noyau $\partial_y \Phi = (x - \lambda)\Phi$ établie dans la preuve de la Proposition 6 devient simplement

$$(x - ik) \widehat{\Phi}(x, k) = \lambda \widehat{\Phi}(x, k),$$

une équation aux valeurs propres ordinaire pour un opérateur de *multiplication* sur $L^2(\mathbb{R}^2)$. Sa solution est immédiate : $\widehat{\Phi}$ doit être supporté au point unique où $x - ik = \lambda$, c'est-à-dire, en écrivant $\lambda = q + ip$, en $(x, k) = (q, -p)$ - retrouvant $\Phi = |q\rangle\langle p|$ sans résoudre aucune équation différentielle.

En identifiant $\mathbb{R}_{(x,k)}^2$ à $\mathbb{C}$ via $z = x + ik$, l'opérateur $Q\Phi + i\Phi P$ devient, après cette unique transformée, la multiplication par $\bar{z}$; les opérateurs propres de rang un sont des masses ponctuelles $\delta^{(2)}(z - \bar{\lambda})$, et Q, P sont littéralement devenus les deux composantes de l'opérateur de position ordinaire sur $L^2(\mathbb{R}^2)$. En ce sens précis, le problème aux valeurs propres entrelacé est une mécanique quantique construite directement sur le plan de phase classique (q, p) lui-même, dans l'esprit du formalisme de la fonction d'onde dans l'espace des phases de Torres-Vega et Frederick [20], de l'approche de l'espace de Liouville commun d'Ali et Prugovečki [21], et du programme plus large des états cohérents, des observables covariantes de l'espace des phases et des mesures conjointes de position-impulsion développé par Ali, Beneduci et leurs collaborateurs [22, 23].

Ceci affine aussi la remarque sur la chaîne de Jordan ci-dessus : en transformant la solution $k = 1$ de la même manière, on obtient

$$\widehat{\Phi}_1 \propto c_0 \delta^{(2)}(z - \bar{\lambda}) + c_1 \partial_z \delta^{(2)}(z - \bar{\lambda}), \quad \partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_k),$$

une dérivée dans la direction *holomorphe* seulement, et non la grille générique à deux paramètres de dérivées ∂_x, ∂_k qu'une distribution supportée en un point dans $\mathbb{R}^2$ permettrait en général - parce que l'opérateur en question est la multiplication par $\bar{z}$ spécifiquement, et non par x ou k séparément. Ceci identifie le Problème 6. avec le "problème de division" classique pour la tour holomorphe $\partial_z^j \delta^{(2)}(z - z_0)$, $j \geq 0$, une voie prometteuse vers une réponse complète.

Classer complètement l'espace des solutions de $Q\Phi + i\Phi P = \lambda\Phi$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$: est-ce exactement la tour de chaînes de Jordan engendrée par $\delta^{(k)}(x - q) e^{-ipy}$, $k \geq 0$, ou y a-t-il d'autres solutions qui ne sont pas de cette forme ?

Généraliser le problème aux valeurs propres à $\mathcal{D} \diamond_R \mathcal{D} \diamond_R V = \lambda^2 V$ en utilisant la Proposition 4 et l'équation (1), et interpréter le résultat en termes des états propres du nombre de l'oscillateur harmonique.

7. Perspectives

Cinq directions futures semblent valoir la peine d'être brièvement enregistrées. Premièrement, la non-associativité notée dans la Section 3. soulève la question naturelle d'une enveloppe associative universelle engendrée par les translations à gauche et à droite de $\diamond_R, \diamond_L$; pour des coefficients opératoriels, une telle enveloppe se situerait vraisemblablement dans $B(\mathcal{H})$, mais rendre ceci précis est laissé ouvert. Deuxièmement, l'interpolation à deux paramètres $X \diamond_\theta Y = \cos \theta X \diamond_R Y + \sin \theta X \diamond_L Y$ entre les deux orientations (Appendice A) suggère une déformation à un paramètre de la factorisation de la Section 4., et, plus spéculativement, une connexion avec le programme plus large de la géométrie non commutative [24]. Troisièmement, l'interprétation à deux modes de la Section 6., fondée sur la vectorisation des opérateurs, émerge naturellement des équations de Sylvester bilatérales obtenues dans le problème aux valeurs propres entrelacé.

Alors que la matrice d'opérateurs entrelacée agit naturellement sur $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, son problème aux valeurs propres à valeurs opératorielles conduit à une représentation en produit tensoriel par les actions indépendantes à gauche et à droite de Q et P .

Il serait intéressant de déterminer si cette structure de produit tensoriel peut être dérivée intrinsèquement de la construction algébrique entrelacée, indépendamment de la formulation ultérieure du problème aux valeurs propres.

Une telle compréhension intrinsèque pourrait aussi éclairer le problème des puissances supérieures discuté dans la Section 6. et la classification des opérateurs propres généralisés soulevée dans le Problème 6..

Quatrièmement, le mécanisme derrière cette commutativité est complètement général : pour *n'importe quels* Q, P quels qu'ils soient, la multiplication à gauche $\mathcal{L}_Q$ et la multiplication à droite $\mathcal{R}_P$ sur l'espace des opérateurs commutent, puisque $(QX)P = Q(XP)$, indépendamment de $[Q, P]$. C'est le même mouvement structurel qui sous-tend le théorème de dilatation de Naimark [25] : une POVM construite à partir d'effets non commutants est toujours la compression d'une véritable mesure à valeurs projections, commutative, sur un espace plus grand. Sa réalisation classique pour la position et l'impulsion, le schéma de mesure simultanée d'Arthurs-Kelly [26], et le traitement rigoureux des dilatations de Naimark pour les observables covariantes de l'espace des phases et de position-impulsion [27, 23], atteignent la même structure doublée et commutative à partir d'un point de départ entièrement différent, fondé sur la théorie de la mesure. Nous enregistrons cette résonance sans prétendre à une identification terme à terme.

Cinquièmement, puisque la preuve de la Proposition 4 n'utilise aucune propriété d'être auto-adjoint ou de commutation de Q, P au-delà de leur apparition dans les formules de définition, la même factorisation entrelacée s'applique mot pour mot aux hamiltoniens non hermitiens construits à partir de Q, P par substitution formelle - par exemple l'oscillateur $\mathcal{PT}$ -symétrique exactement résoluble $H_{\mathcal{PT}} = \frac{1}{2}(P^2 + Q^2) + i\alpha Q$, $\alpha \in \mathbb{R}$, se factorise identiquement avec Q remplacé partout par le $Q + i\alpha 1_{\mathcal{H}}$ décalé complexe. Un traitement systématique des factorisations entrelacées pour les hamiltoniens $\mathcal{PT}$ -symétriques de base est laissé pour des travaux futurs.

Ces cinq questions sont laissées pour une investigation future.

A Déformations à deux orientations

La présence de deux orientations suggère le produit interpolant

$$X \diamond_{\theta} Y = \cos \theta X \diamond_R Y + \sin \theta X \diamond_L Y,$$

avec $\diamond_{\theta}|_{\theta=0} = \diamond_R$ et $\diamond_{\theta}|_{\theta=\pi/2} = \diamond_L$. On peut aussi interpoler entre la multiplication matricielle ordinaire et le produit entrelacé,

$$X \diamond_t Y = (1-t)XY + t(X \diamond_R Y), \quad t \in [0, 1].$$

Remarque 8. $\diamond_{\theta}$ ne reste pas dans la classe des produits “entrelacés” pour $\theta \notin \{0, \pi/2\}$: une combinaison linéaire générique de $\diamond_R$ et $\diamond_L$ n’a plus la propriété que chaque coefficient contient exactement deux termes, chacun un produit de coefficients de X et Y dans un ordre déterminé. En tant que déformation dans le but d’étudier l’associateur, cependant, elle est bien définie.

Étudier l’associateur $\mathcal{A}_{\theta}(X, Y, Z) = (X \diamond_{\theta} Y) \diamond_{\theta} Z - X \diamond_{\theta} (Y \diamond_{\theta} Z)$. À $\theta = \pi/4$, y a-t-il une simplification due à la symétrie $\diamond_R \leftrightarrow \diamond_L$?

Remerciements

L’auteur est redevable à Alice Barbara Tumpach pour sa question perspicace sur la (non ?)-unicité du produit entrelacé orienté, et à Catherine Lacape pour son accueil chaleureux à Montplaisir (Marvejols, FR), où une partie de ce travail a été réalisée. La note est dédiée à la mémoire de Franciszek Hugon Szafraniec, dont la rigueur, il l’espère, est honorée ici, même modestement.

Références

- [1] J.-P. Gazeau, F. H. Szafraniec, Holomorphic Hermite polynomials and a non-commutative plane, J. Phys. A : Math. Theor. **44**, 495201 (2011). <https://doi.org/10.1088/1751-8113/44/49/495201>
- [2] J.-P. Gazeau, F. H. Szafraniec, Three paths toward the quantum angle operator, Ann. Phys. **375**, 16-35 (2016). <https://doi.org/10.1016/j.aop.2016.09.010>
- [3] F. H. Szafraniec, Analytic models for the quantum harmonic oscillator, in : *Operator Theory for Complex and Hypercomplex Analysis* (Mexico City, 1994), Contemporary Mathematics vol. 212, eds. E. Ramírez de Arellano, N. Salinas, M. V. Shapiro, N. L. Vasilevski, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998, pp. 269-276.
- [4] J.-P. Gazeau, A Matrix Mnemonic for Octonions and Cayley-Dickson Tower, Adv. Appl. Clifford Algebras **36**, 34 (2026).
- [5] J. C. Baez, The octonions, Bull. Amer. Math. Soc. **39**, 145-205 (2002).
- [6] R. D. Schafer, *An Introduction to Nonassociative Algebras*, Academic Press, New York, 1966.
- [7] S. Okubo, *Introduction to Octonion and Other Non-Associative Algebras in Physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [8] T. A. Springer, F. D. Veldkamp, *Octonions, Jordan Algebras and Exceptional Groups*, Springer, Berlin, 2000.
- [9] R. V. Kadison, J. R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, Vol. I*, Academic Press, 1983.
- [10] P. Jordan, J. von Neumann, E. Wigner, On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism, Ann. of Math. **35**, 29-64 (1934).

- [11] K. McCrimmon, *A Taste of Jordan Algebras*, Springer, New York, 2004.
- [12] H. O. Pflugfelder, *Quasigroups and Loops : Introduction*, Heldermann Verlag, Berlin, 1990.
- [13] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. II : Fourier Analysis, Self-Adjointness*, Academic Press, 1975.
- [14] P. A. M. Dirac, The quantum theory of the electron, Proc. Roy. Soc. Lond. A **117**, 610-624 (1928).
- [15] I. M. Gelfand and N. Ya. Vilenkin, *Generalized Functions, Vol. 4 : Applications of Harmonic Analysis*, Academic Press, New York, 1964.
- [16] A. Bohm, *The Rigged Hilbert Space and Quantum Mechanics*, Lecture Notes in Physics vol. 78, Springer, Berlin, 1978.
- [17] J.-P. Antoine, C. Trapani, *Partial Inner Product Spaces : Theory and Applications*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1986, Springer, Berlin, 2009. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-05136-4>
- [18] J.-P. Antoine, A. Inoue, C. Trapani, *Partial *-Algebras and Their Operator Realizations*, Mathematics and Its Applications, Vol. 553, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002. <https://doi.org/10.1007/978-94-017-0065-8>
- [19] F. Trèves, *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*, Academic Press, New York, 1967.
- [20] G. Torres-Vega, J. H. Frederick, Quantum mechanics in phase space : New approaches to the correspondence principle, J. Chem. Phys. **93**, 8862-8874 (1990). <https://doi.org/10.1063/1.459225>
- [21] S. T. Ali, E. Prugovečki, Classical and quantum statistical mechanics in a common Liouville space, Physica A **89**, 501-521 (1977).
- [22] S. T. Ali, J.-P. Antoine, J.-P. Gazeau, *Coherent States, Wavelets, and Their Generalizations*, 2nd edn., Theoretical and Mathematical Physics, Springer, New York, 2014.
- [23] R. Beneduci, F. E. Schroeck Jr., A note on the relationship between localization and the norm-1 property, J. Phys. A : Math. Theor. **46**, 305303 (2013).
- [24] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, 1994.
- [25] M. A. Naimark, On a representation of additive operator set functions, C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.) **41**, 359-361 (1943).
- [26] E. Arthurs, J. L. Kelly Jr., On the simultaneous measurement of a pair of conjugate observables, Bell Syst. Tech. J. **44**, 725-729 (1965).
- [27] R. Beneduci, E. Frion, J.-P. Gazeau, A. Perri, Quantum formalism on the plane : POVM-Toeplitz quantization, Naimark theorem and linear polarization of the light, Ann. Phys. **447**, 169134 (2022).