On cherche à décomposer un nombre pair n en somme de 2 nombres premiers $p_1 + p_2$.

On ne peut pas faire référence à $\zeta(-1)$ comme on l'a fait dans [1]. On peut cependant, pour obtenir une minoration du nombre de décomposants de Goldbach de n , utiliser le cardinal $|\mathcal{P}_{\frac{n}{2}}|$ de l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à $\frac{n}{2}$ et le multiplier par le produit $\prod_{p \leq \sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ qui compte combien de chances a le nombre premier p_1 de ne pas partager son reste avec n selon chaque module p inférieur à $\sqrt{n}$ (le fait de ne pas partager son reste avec n permet à p_1 d'avoir un complémentaire à n (appelé p_2) qui est premier également).

La minoration¹ de $\pi(x)$ (le nombre de nombres premiers inférieurs à x) par $\frac{x}{\log x}$ est fournie dans [2], page 69, pour $x \geq 17$ (Corollaire 1, (3.5), du Théorème 2, dont la démonstration est fournie au paragraphe 7 de [2]).

On a en conséquence $|\mathcal{P}_{\frac{n}{2}}| > \frac{\frac{n}{2}}{\log(\frac{n}{2})}$.

La minoration de $\prod_{p \leq \sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ est également fournie dans [2], page 70 (c'est le corollaire (3.27) du Théorème 7 dont la démonstration est fournie au paragraphe 8 de [2], avec γ la constante d'Euler-Mascheroni).

$$(3.27) \quad \frac{e^{-\gamma}}{\log x} \left(1 - \frac{1}{\log^2 x}\right) < \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \quad \text{pour } 1 < x.$$

En multipliant ces expressions ensemble, on obtient que le nombre de décomposants de Goldbach de n doit être supérieur à :

$$\frac{n/2}{\log(n/2)} \frac{e^{-\gamma}}{\log \sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{\log^2 \sqrt{n}}\right)$$

qui est strictement supérieur à 1 à partir de 24.

Bibliographie

[1] <http://denisevellachemla.eu/denitac.pdf>.

[2] J. B. Rosser et L. Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, dedicated to Hans Rademacher for his seventieth birthday, Illinois J. Math., Volume 6, Issue 1 (1962), 64-94.

1. Cette minoration est à distinguer du Théorème des nombres premiers, prouvé indépendamment par Hadamard et La Vallée-Poussin, et qui fournit une tendance asymptotique pour $\pi(x)$.

Deux par classe (Denise Vella-Chemla, juillet 2022).

1. Caractérisation des décomposants de Goldbach de n supérieurs à $\sqrt{n}$ ¹

Soit $n \in 2\mathbb{N} + 6$ un entier pair supérieur à 6.

Pour tout $p \in \mathbb{P}^*$ premier impair inférieur à $\sqrt{n}$ (i.e. $3 \leq p \leq \sqrt{n}$), on définit l'ensemble :

$$F_n(p) = \{m \in 2\mathbb{N} + 1 : 3 \leq m \leq n/2, m \not\equiv 0 [p], m \not\equiv n [p]\}$$

L'intersection des ensembles $F_n(p)$ pour tout p premier compris entre 3 et $\sqrt{n}$ est notée :

$$D_n = \bigcap_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ 3 \leq p \leq \sqrt{n}}} F_n(p)$$

Nous allons montrer que D_n et son complémentaire $n - D_n$ ne contiennent que des nombres premiers.

Lemme 1 : Soit $m \in 2\mathbb{N} + 1$ un entier impair. Si m n'est divisible par aucun nombre premier compris entre 3 et $\sqrt{m}$, alors il est premier.

Démonstration : Si m est composé, on a $m = pq$, où p est le plus petit nombre premier intervenant dans la factorisation de m en nombres premiers et où q est le produit de tous les autres facteurs. Puisque m est impair, $p \geq 3$, et puisque $q \geq p$ (q étant le produit d'entiers $\geq p$), $m = pq \geq pp = p^2$ et donc $\sqrt{m} \geq p$ (la fonction racine carrée étant croissante). On a ainsi montré que si m impair est composé, il est divisible par un premier compris entre 3 et $\sqrt{m}$. Le lemme s'obtient par contraposition. $\square$

Lemme 2 : $D_n \subseteq \mathbb{P}$

Démonstration : Soit $m \in D_n$. Alors $m \in F_n(p)$ pour tout p premier compris entre 3 et $\sqrt{n}$. Par conséquent, m est impair et m n'est divisible par aucun nombre premier p compris entre 3 et $\sqrt{n}$ (puisque $m \not\equiv 0 [p]$), et donc *a fortiori* par aucun premier compris entre 3 et $\sqrt{m}$ (car $m \leq n/2 \implies m \leq n \implies \sqrt{m} \leq \sqrt{n}$). D'après le lemme 1, m est donc premier. $\square$

Lemme 3 : $n - D_n \subseteq \mathbb{P}$

Démonstration : Soit $m \in D_n$. Alors $m \in F_n(p)$ pour tout p premier compris entre 3 et $\sqrt{n}$. Par conséquent, $n - m$ est impair (car m est impair et n pair) et $n - m$ n'est divisible par aucun nombre premier p compris entre 3 et $\sqrt{n}$ (puisque $m \not\equiv n [p]$), et donc *a fortiori* par aucun premier compris entre 3 et $\sqrt{n - m}$ (car $n - m \leq n \implies \sqrt{n - m} \leq \sqrt{n}$). D'après le lemme 1, $n - m$ est donc premier. $\square$

Les ensembles D_n ne contiennent que des décomposants de Goldbach de n .

¹Leila Schneps a démontré que la caractérisation de certains décomposants de Goldbach que je proposais était justifiée.

Lemme 4 : Soit $n \in 2\mathbb{N} + 6$. Si $D_n \neq \emptyset$, alors n vérifie la conjecture de Goldbach.

Démonstration : Si $D_n \neq \emptyset$, il contient un entier p nécessairement premier (d'après le lemme 1), tel que $q = n - p$ est également premier (d'après le lemme 2), et donc $n = p + q$ vérifie la conjecture de Goldbach.

2. Minoration du nombre de décomposants de Goldbach

La caractérisation de la Section 1 suggère que $\frac{n}{2} \prod_{2 < p \leq n} \left(1 - \frac{2}{p}\right)$ doit minorer le nombre de décomposants de Goldbach d'un nombre pair : les "pires" des cas (ou cas "très criblants") adviennent lorsque le nombre pair est de la forme $2^k p$ avec p un nombre premier, car alors on élimine deux classes de congruences selon tout module premier inférieur à $\sqrt{n}$, et les cas "moins criblants" adviennent lorsque le nombre pair considéré a de nombreux diviseurs (comme le nombre 60 par exemple) car alors on ne doit éliminer qu'une seule classe de congruence au lieu de 2 selon chaque module premier divisant n .

On peut utiliser la formule 2.6 de [1] qui fournit l'estimation :

$$(2.6) \quad \prod_{\alpha < p \leq x} \left(1 - \frac{\alpha}{p}\right) = \exp \left\{ \sum_{\alpha < p \leq x} \log \left(1 - \frac{\alpha}{p}\right) \right\} \\ \cong \exp \left\{ c_1(\alpha) - \alpha \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \right\} \cong \frac{c(\alpha)}{(\log x)^\alpha},$$

où α est une constante réelle, habituellement prise comme étant égale à 1."

Il est expliqué dans le paragraphe suivant de l'article de Rosser et Schoenfeld qu'il est possible d'utiliser les constantes $c(\alpha)$ et $c_1(\alpha)$ parce que l'erreur absolue tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini.

Pour avoir une idée de la constante $c(2)$, il est possible² de démontrer que

$$\left(\prod_{2 < p \leq n} 1 - \frac{2}{p} \right)^{-1} = \frac{1}{4} e^{2\gamma \Pi_2^{-1}} \log^2 n + O(e^{-c\sqrt{\log n}})$$

avec $e = 2.71828$, $\gamma = 0.5772156649$, $\Pi_2 = 0.6601618158^3$.

On choisit de minorer le nombre de décomposants de Goldbach de n en utilisant la minoration

$$\#\{3 \leq dg \leq n/2 \mid n = dg + (n - dg) \text{ avec } dg \text{ et } n - dg \text{ premiers}\} \\ \geq \frac{n 4\Pi_2}{2 e^{2\gamma}} \frac{1}{\log^2 n}$$

²Se reporter à <https://math.stackexchange.com/questions/22411/computing-the-product-of-p-p-2-over-the-odd-primes?rq=1>.

³Voir <https://mathworld.wolfram.com/TwinPrimesConstant.html>.

3. Résultats numériques.

On utilise le programme suivant :

```
1 import math
2
3 def prime(atester):
4     k = 2 ;
5     if (atester in [0,1]): return False ;
6     if (atester in [2,3,5,7]): return True ;
7     while (True):
8         if ((k * k) > atester): return True
9         else:
10            if ((atester % k) == 0): return False
11            else: k=k+1
12
13 for n in range(6,100002,2):
14     moitié = int(n/2)
15     #if prime(moitié):
16     if True:
17         print('')
18         print(n)
19         nbdg = 0
20         for p in range(3, moitié+1,2):
21             if prime(p) and prime(n-p):
22                 nbdg += 1
23         print('nbdg', nbdg)
24         estimproddepmoinsdeuxsurp = 0.8324290656/(math.log(n)**2)
25         print('produit des p moins 2 sur p', estimproddepmoinsdeuxsurp)
26         res = n*estimproddepmoinsdeuxsurp/2
27         print(' que multiplie n/2 ', res)
28         if res < nbdg:
29             print('min réussi')
30         else:
31             print('min rate')
```

FIGURE 1 : Programme de minoration du nombre de décomposants de Goldbach d'un nombre pair.

pour vérifier que la minoration est effective pour tout n un nombre pair compris entre 6 et 10^5 .

Le résultat de ce programme est consultable à l'adresse <http://denise.vella.chemla.free.fr/resp-gm-prod-un-moins-deux-sur-p.pdf>.

Référence

- [1] J. B. Rosser, L. Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, Illinois J. Math., 6 (1962) 64-94.

Probabilité d'obtenir une décomposition de Goldbach d'un nombre pair (Denise Vella-Chemla, août 2022)

1. Un exemple illustratif

Prenons l'exemple de la recherche des décomposants de Goldbach de l'entier pair $n = 98$.

$$S_{98} = \begin{cases} 98 \equiv 0 \pmod{2} \\ 98 \equiv 2 \pmod{3} \\ 98 \equiv 3 \pmod{5} \\ 98 \equiv 0 \pmod{7} \end{cases}$$

Appelons d_{98} un décomposant de Goldbach potentiel de $n = 98$. d_{98} peut être congru, hormis 0, à tout ce à quoi $n = 98$ n'est pas congru. Le signe $\vee$ dans le système ci-dessous est à lire comme un ou exclusif, son emploi étendu est à comprendre comme le fait de vérifier autant de systèmes de congruences que la combinatoire le permet.

$$S_{d_{98}} = \begin{cases} d_{98} \equiv 1 \pmod{2} \\ d_{98} \equiv 1 \pmod{3} \\ d_{98} \equiv 1 \vee 2 \vee 4 \pmod{5} \\ d_{98} \equiv 1 \vee 2 \vee 3 \vee 4 \vee 5 \vee 6 \pmod{7} \end{cases}$$

Remarque : on note que le fait de respecter le système de systèmes de congruences ci-dessus est une condition suffisante mais non nécessaire pour obtenir un décomposant de Goldbach de n . La démonstration de la validité de cette caractérisation des décomposants de Goldbach d'un nombre pair n qui sont supérieurs à la racine carrée de n est fournie en section 2.

Comme on le comprend aisément, les modules qui ne divisent pas n "éliminent davantage de classes de congruences" (au nombre de 2 par module premier inférieur à $\sqrt{n}$) que les modules qui divisent n . Plaçons-nous dans le pire des cas, où l'on élimine deux classes de congruences par module premier inférieur à $\sqrt{n}$, on trouve tout de même

$$\prod_{\substack{p \text{ premier} \\ 3 \leq p \leq \sqrt{n}}} (p - 2)$$

classes de congruences *différentes* par l'application du théorème des restes chinois à chacun des systèmes de congruences combinatoirement trouvés (voir $S_{d_{98}}$ ci-dessus). Ces solutions sont inférieures à $D = \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ 3 \leq p \leq \sqrt{n}}} p$.

Serait-il possible de "rater l'intervalle visé", i.e. que toutes les solutions soient supérieures à n , comprises entre n et D ? À la section 3, on verra que la probabilité d'obtenir au moins une solution inférieure à n tend très vite vers 1.

2. Caractérisation des décomposants de Goldbach de n supérieurs à $\sqrt{n}$ ¹

Soit $n \in 2\mathbb{N} + 6$ un entier pair supérieur à 6.

¹Leila Schneps a démontré que la caractérisation de certains décomposants de Goldbach proposée était valide.

Pour tout $p \in \mathbb{P}^*$ premier impair inférieur à $\sqrt{n}$ (i.e. $3 \leq p \leq \sqrt{n}$), on définit l'ensemble :

$$F_n(p) = \{m \in 2\mathbb{N} + 1 : 3 \leq m \leq n/2, m \not\equiv 0 [p], m \not\equiv n [p]\}$$

L'intersection des ensembles $F_n(p)$ pour tout p premier compris entre 3 et $\sqrt{n}$ est notée :

$$D_n = \bigcap_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ 3 \leq p \leq \sqrt{n}}} F_n(p)$$

Nous allons montrer que D_n et son complémentaire $n - D_n$ ne contiennent que des nombres premiers.

Lemme 1 : Soit $m \in 2\mathbb{N} + 1$ un entier impair. Si m n'est divisible par aucun nombre premier compris entre 3 et $\sqrt{m}$, alors il est premier.

Démonstration : Si m est composé, on a $m = pq$, où p est le plus petit nombre premier intervenant dans la factorisation de m en nombres premiers et où q est le produit de tous les autres facteurs. Puisque m est impair, $p \geq 3$, et puisque $q \geq p$ (q étant le produit d'entiers $\geq p$), $m = pq \geq pp = p^2$ et donc $\sqrt{m} \geq p$ (la fonction racine carrée étant croissante). On a ainsi montré que si m impair est composé, il est divisible par un premier compris entre 3 et $\sqrt{m}$. Le lemme s'obtient par contraposition. $\square$

Lemme 2 : $D_n \subseteq \mathbb{P}$

Démonstration : Soit $m \in D_n$. Alors $m \in F_n(p)$ pour tout p premier compris entre 3 et $\sqrt{n}$. Par conséquent, m est impair et m n'est divisible par aucun nombre premier p compris entre 3 et $\sqrt{n}$ (puisque $m \not\equiv 0 [p]$), et donc *a fortiori* par aucun premier compris entre 3 et $\sqrt{m}$ (car $m \leq n/2 \implies m \leq n \implies \sqrt{m} \leq \sqrt{n}$). D'après le lemme 1, m est donc premier. $\square$

Lemme 3 : $n - D_n \subseteq \mathbb{P}$

Démonstration : Soit $m \in D_n$. Alors $m \in F_n(p)$ pour tout p premier compris entre 3 et $\sqrt{n}$. Par conséquent, $n - m$ est impair (car m est impair et n pair) et $n - m$ n'est divisible par aucun nombre premier p compris entre 3 et $\sqrt{n}$ (puisque $m \not\equiv n [p]$), et donc *a fortiori* par aucun premier compris entre 3 et $\sqrt{n - m}$ (car $n - m \leq n \implies \sqrt{n - m} \leq \sqrt{n}$). D'après le lemme 1, $n - m$ est donc premier. $\square$

Les ensembles D_n ne contiennent que des décomposants de Goldbach de n .

Lemme 4 : Soit $n \in 2\mathbb{N} + 6$. Si $D_n \neq \emptyset$, alors n vérifie la conjecture de Goldbach.

Démonstration : Si $D_n \neq \emptyset$, il contient un entier p nécessairement premier (d'après le lemme 1), tel que $q = n - p$ est également premier (d'après le lemme 2), et donc $n = p + q$ vérifie la conjecture de Goldbach. $\square$

3. Probabilité $P(n, k, p)$ de tirer un nombre inférieur ou égal à k , sans remise, quand on tire uniformément p entiers parmi les n premiers entiers.

La probabilité² $P(n, k, p)$ de tirer un nombre inférieur ou égal à k , sans remise, quand on tire uniformément p entiers parmi les n premiers entiers se calcule par la formule suivante :

$$P = \frac{k}{n} + \frac{n-k}{n} \left(\frac{k}{n-1} + \frac{n-k-1}{n-1} \left(\frac{k}{n-2} + \frac{n-k-2}{n-2} \left(\dots \left(\frac{k}{n-p+1} \right) \dots \right) \right) \right)$$

Le premier terme de la somme correspond au fait de trouver un nombre inférieur à k dès le premier tirage. Le deuxième terme de la somme correspond au fait d'avoir tiré un nombre supérieur à k lors du premier tirage, de ne pas avoir la possibilité de tirer à nouveau ce nombre, et de tenter sa chance sur les nombres restant, la probabilité restant uniforme sur les nombres restant, etc.

On calcule cette probabilité pour

$$p = \prod_{\substack{x \text{ premier} \\ 3 \leq x \leq \sqrt{k}}} (x - 2)$$

et

$$n = \prod_{\substack{x \text{ premier} \\ 3 \leq x \leq \sqrt{k}}} x.$$

Le programme python utilisé est le suivant :

```

import math

def P(n, k, p):
    assert(1 <= p and p <= n and k <= n-p)
    s, t = 0, 1
    for i in range(p):
        s += t*(k/(n-i))
        t *= (n-k-i)/(n-i)
    return s

for n, k, p in [(30, 26, 3),
                (210, 50, 15),
                (2310, 122, 135),
                (30030, 170, 1485),
                (510510, 290, 22275),
                (9699690, 362, 378675),
                (223092870, 530, 7952175),
                (6469693230, 842, 214708725),
                (200560490130, 962, 6226553025)]:
    print(f'n = {n}, k = {k}, p = {p} : P_n(k,p) = {P(n, k, p)}')

n = 30, k = 26, p = 3 : P_n(k,p) = 0.9990147783251231
n = 210, k = 50, p = 15 : P_n(k,p) = 0.9856514594832753
n = 2310, k = 122, p = 135 : P_n(k,p) = 0.9994752040784769
n = 30030, k = 170, p = 1485 : P_n(k,p) = 0.999824267526177
n = 510510, k = 290, p = 22275 : P_n(k,p) = 0.9999976037996607
n = 9699690, k = 362, p = 378675 : P_n(k,p) = 0.9999994514468453
n = 223092870, k = 530, p = 7952175 : P_n(k,p) = 0.999999955788792
n = 6469693230, k = 842, p = 214708725 : P_n(k,p) = 0.999999997119475
n = 200560490130, k = 962, p = 6226553025 : P_n(k,p) = 0.9999999921336346

```

²Merci Jacques.

Fournissons ses résultats dans le tableau ci-dessous :

$N = \sqrt{k-1}$	n	k	p	$P(n, k, p)$
5	30	26	3	0.9990147783251231
7	210	50	15	0.9856514594832753
11	2310	122	135	0.9994752040784769
13	30030	170	1485	0.999824267526177
17	510510	290	22275	0.9999976037996607
19	9699690	362	378675	0.9999994514468453
23	223092870	530	7952175	0.9999999955788792
29	6469693230	842	214708725	0.9999999997119475
31	200560490130	962	6226553025	0.9999999921336346

Pour confirmer les résultats du programme, on utilise une fonction qui calcule la probabilité des événements complémentaires, i.e. la probabilité qu'au cours des p tirages sans remise réalisés selon la loi uniforme discrète dans l'intervalle $1..n$, tous les entiers tirés soient strictement supérieurs à k selon la formule

$$\overline{P(n, p, k)} = 1 - P(n, p, k) = \frac{n-p}{n} \cdot \frac{n-p-1}{n-1} \cdots \frac{n-p-k+1}{n-k+1}.$$

La probabilité d'obtenir un décomposant de Goldbach d'un nombre pair est de 1 à partir du nombre premier 37 si l'on fixe la précision des calculs à 20 chiffres après la virgule.

The screenshot shows a Jupyter Notebook titled "Tirer p nombres.ipynb". The code defines a function `prod` for calculating the product of elements in an iterable. It then defines a function `Q(n, p, k)` that checks if n can be decomposed into a sum of p primes, all greater than k . The main code block iterates over n from 3 to 100, and for each n , it finds all possible p values and calculates the probability $Q(n, p, k)$ for $k=2$. The results are printed in a formatted string.

```
[ ] import functools

def prod(iterable):
    return functools.reduce(lambda x, y: x*y, iterable, 1)

P = [2]
Pmax = 100
for n in range(3, Pmax+1, 2):
    if all(n%p for p in P):
        P.append(n)

def Q(n, p, k):
    assert(1 <= p and p <= n and 1 <= k and k <= n-p)
    t, a, b = 1, n-p, n
    for i in range(k):
        t, a, b = t*a/b, a-1, b-1
    return t

print(f'{"N":>3} | {"n":>40s} | {"p":>40s} | {"k":>6} | {"1 - P(n,p,k)":>28} | {"P(n,p,k)":>28}')
print(f'{"-"*3}-+{"-"*40}-+{"-"*40}-+{"-"*6}-+{"-"*28}-+{"-"*28}')
for N in P:
    if N > 3:
        n, p, k = prod(x for x in P if x <= N), prod(x-2 for x in P if 2 < x and x <= N), N*N+1
        q = Q(n, p, k)
        print(f'{"N":3} | {"n":40d} | {"p":40d} | {"k":6} | {"q:28.26f} | {"1-q:28.26f}')
```

Les résultats de ce programme sont fournis dans le tableau ci-dessous :

N	n	p	k	P(n,p,k)
5	30	3	26	0.99901477832512319832147796
7	210	15	50	0.98565145948327537173128121
11	2310	135	122	0.99947520407847800782974446
13	30030	1485	170	0.99982426752617770127073982
17	510510	22275	290	0.9999760379966495804637816
19	9699690	378675	362	0.9999945144687962805818415
23	223092870	7952175	530	0.9999999557885699275061597
29	6469693230	214708725	842	0.999999999954458651529876
31	200560490130	6226553025	962	0.999999999993338661852249
37	7420738134810	217929355875	1370	1.000000000000000000000000
41	304250263527210	8499244879125	1682	1.000000000000000000000000
43	13082761331670030	348469040044125	1850	1.000000000000000000000000
47	614889782588491410	15681106801985625	2210	1.000000000000000000000000
53	32589158477190044730	799736446901266875	2810	1.000000000000000000000000
59	1922760350154212639070	45584977473372211875	3482	1.000000000000000000000000
61	117288381359406970983270	2689513670928960500625	3722	1.000000000000000000000000
67	7858321551080267055879090	174818388610382432540625	4490	1.000000000000000000000000
71	557940830126698960967415390	12062468814116387845303125	5042	1.000000000000000000000000
73	40729680599249024150621323470	856435285802263537016521875	5330	1.000000000000000000000000
79	3217644767340672907899084554130	65945517006774292350272184375	6242	1.000000000000000000000000
83	267064515689275851355624017992790	5341586877548717680372046934375	6890	1.000000000000000000000000
89	2376874189634550770650537601358310	464718058346738438192368083290625	7922	1.000000000000000000000000
97	2305567963945518424753102147331756070	44148215542940151628274967912609375	9410	1.000000000000000000000000

Si tous étaient bien répartis, Denise Vella-Chemla, 25.3.2023

On calcule le produit des $p_k - 2$ (on élimine au maximum 2 classes de congruences modulo p_k , pour les non-diviseurs de n , pour p_k nombre premier impair ; concernant le nombre premier 2, il faut le considérer au dénominateur, pour éliminer les nombres pairs, mais pas au numérateur car 2-2 annule tout !) sur le produit des p_k et on le multiplie par les bornes de l'intervalle auquel appartient n (du carré du dernier p_k au carré du nombre premier suivant).

$$\frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 3 \times 5 \times 7} = \frac{15}{210} \text{ pour les nombres compris entre } 50 (= 7^2 + 1) \text{ et } 120 (= 11^2 - 1);$$

$$\frac{1 \times 3 \times 5 \times 9}{2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11} = \frac{135}{2310} \text{ pour les nombres compris entre } 122 (= 11^2 + 1) \text{ et } 168 (= 13^2 - 1);$$

$$\frac{1 \times 3 \times 5 \times 9 \times 11}{2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13} = \frac{1485}{30030} \text{ pour les nombres compris entre } 170 (= 13^2 + 1) \text{ et } 288 (= 17^2 - 1);$$

$$\frac{1 \times 3 \times 5 \times 9 \times 11 \times 15}{2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17} = \frac{22275}{510510} \text{ pour les nombres compris entre } 290 (= 17^2 + 1) \text{ et } 360 (= 19^2 - 1);$$

Seul le fait que les solutions des systèmes d'incongruence soient toutes bien réparties dans l'intervalle source pourrait permettre de faire des calculs de proportion aux bornes successives, ces calculs donnent :

$$\frac{15}{210} \times 50 = 3.57 \quad \frac{15}{210} \times 120 = 8.57$$

$$\frac{135}{2310} \times 122 = 7.12 \quad \frac{135}{2310} \times 168 = 9.81818181818 \text{ (nombre rigolo à rapprocher du } \textit{Blues} \text{ du } \textit{bégayeur} \text{ de Dick Annegarn);}$$

$$\frac{1485}{30030} \times 170 = 8.4 \quad \frac{1485}{30030} \times 288 = 14.2$$

$$\frac{22275}{510510} \times 170 = 12.65 \quad \frac{22275}{510510} \times 360 = 15.7$$

Un nombre premier p compris entre 3 et $\sqrt{n}$ est un décomposant de Goldbach de n , un nombre pair supérieur ou égal à 6 (i.e. $n - p$ est un nombre premier également), s'il vérifie :

$$\forall q, 3 \leq q \leq \sqrt{n} \text{ et } q \text{ premier} \implies p \not\equiv n \pmod{q}.$$

En effet, l'assertion $p \not\equiv n \pmod{q}$ est équivalente à $n - p \not\equiv 0 \pmod{q}$ et cette dernière assertion entraîne que $n - p$ est un nombre premier (il n'est divisible par aucun nombre premier inférieur à sa racine carrée, puisque $a \not\equiv 0 \pmod{b}$ est équivalent au fait que $b \nmid a$). Ainsi, $n = p + (n - p)$ est une décomposition de n comme somme de deux nombres premiers, et n vérifie la conjecture de Goldbach.

Jusqu'à 100 000, 7,3 % des nombres pairs seulement ont comme plus petit décomposant de Goldbach un nombre qui est supérieur strictement à leur racine. La majorité des nombres semblent avoir chacun (du moins jusqu'à 10^8) un "petit" décomposant de Goldbach.

De 100 000 à 10^8 , par programme, on ne trouve aucun nombre pair qui aurait comme plus petit décomposant de Goldbach un nombre premier supérieur à sa racine, c'est le cas par exemple pour le nombre pair $81099776 = 139 + 81099637$ avec $139 < \sqrt{81099776}$ ($= 9005,54\dots$). En note, on fournit la liste des 70 nombres inférieurs à 100 000 ayant pour plus petit décomposant de Goldbach un nombre premier supérieur à leur racine¹.

Cette constatation amène à proposer le calcul suivant : si l'on pense que p a $\frac{1}{q}$ chances d'être congru à n modulo q , et que la probabilité d'être congru à n modulo q_1 ou bien à n modulo q_2 est la somme des probabilités $\frac{1}{q_1}$ et $\frac{1}{q_2}$, alors on obtient la probabilité pour l'ensemble des nombres premiers compris entre 3 et $\sqrt{n}$, qui sont au nombre de $\pi(\sqrt{n})^2$ de n'être, chacun, jamais congru à n selon tout module premier inférieur à $\sqrt{n}$ en ajoutant toutes les probabilités

$$S = \sum_{\substack{3 \leq q_k \leq \sqrt{n} \\ q_k \text{ premier}}} \left(1 - \frac{1}{q_k}\right)$$

Or on a $\sum_{\substack{3 \leq q_k \leq \sqrt{n} \\ q_k \text{ premier}}} \frac{1}{q_k} = \ln \ln \sqrt{n}$, ce qui permettrait d'obtenir pour S la valeur :

$$(\pi(\sqrt{n}) - 1) - \ln \ln \sqrt{n}$$

S est supérieur à 1 pour $n \geq 50$.

¹Les 73 nombres pairs inférieurs à 100 000 ayant pour plus petit décomposant de Goldbach un nombre premier qui est supérieur à leur racine : 6, 8, 12, 18, 24, 30, 38, 98, 122, 126, 128, 220, 302, 332, 346, 488, 556, 854, 908, 962, 992, 1144, 1150, 1274, 1354, 1360, 1362, 1382, 1408, 1424, 1532, 1768, 1856, 1928, 2078, 2188, 2200, 2438, 2512, 2530, 2618, 2642, 3458, 3818, 3848, 4618, 4886, 5372, 5978, 6002, 6008, 7426, 9596, 9602, 10268, 10622, 11438, 11642, 12886, 13148, 13562, 14198, 14678, 16502, 18908, 21368, 22832, 23426, 23456, 43532, 54244, 63274.

²On utilise la notation $\pi(x)$ habituelle pour désigner le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x .

On avait, à la place de cette idée d'ajouter les probabilités, proposé à l'été 2019 d'utiliser plutôt une multiplication du nombre de nombres premiers inférieurs à $n/2$ (ce nombre de nombres premiers étant égal à $A = \frac{n/2}{\ln(n/2)}$) par le produit $B = \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p \leq \sqrt{n}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ dont Mertens a démontré qu'il

est égal à $\frac{1}{e^\gamma \ln(p_{max})} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln p_{max}}\right)\right)$, ce théorème étant valable pour $n \geq 2$, où γ désigne la constante d'Euler-Mascheroni. Ce second produit B représente la probabilité qu'a chaque nombre premier, dont le nombre est compté par A , d'être congru à n selon un module premier inférieur à $\sqrt{n}$ (i.e. d'avoir le même reste, dans une division par un nombre premier inférieur à $\sqrt{n}$).

La formule pour la probabilité devient :

$$S' = \frac{n/2}{\ln(n/2)} \frac{1}{e^\gamma \ln(p_{max})} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right)$$

qui est supérieur à 1 pour 6 et 8, inférieur à 1 jusqu'à 2422, puis semble repasser définitivement au-dessus de 1 à partir de ce nombre 2422.

Factorisations des nombres dont le plus petit décomposant de Goldbach est supérieur à leur racine (où l'on voit tout l'alea associé aux nombres premiers) :

$$6 = 2 \times 3$$

$$8 = 2^3$$

$$12 = 2^2 \times 3$$

$$18 = 2 \times 3^2$$

$$24 = 2^3 \times 3$$

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

$$38 = 2 \times 19$$

$$98 = 2 \times 7^2$$

$$122 = 2 \times 61$$

$$126 = 2 \times 3^2 \times 7$$

$$128 = 2^7$$

$$220 = 2^2 \times 5 \times 11$$

$$302 = 2 \times 151$$

$$332 = 2^2 \times 83$$

$$346 = 2 \times 173$$

$$488 = 2^3 \times 61$$

$$556 = 2^2 \times 139$$

$$854 = 2 \times 7 \times 61$$

$$908 = 2^2 \times 227$$

$$962 = 2 \times 13 \times 37$$

$$992 = 2^5 \times 31$$

$$1144 = 2^3 \times 11 \times 13$$

$$1150 = 2 \times 5^2 \times 23$$

$$1274 = 2 \times 7^2 \times 13$$

$$1354 = 2 \times 677$$

$$1360 = 2^4 \times 5 \times 17$$

$$1362 = 2 \times 3 \times 227$$

$$1382 = 2 \times 691$$

$$1408 = 2^7 \times 11$$

$$1424 = 2^4 \times 89$$

$$1532 = 2^2 \times 383$$

$$1768 = 2^3 \times 13 \times 17$$

$$1856 = 2^6 \times 29$$

$$1928 = 2^3 \times 241$$

$$2078 = 2 \times 1039$$

$$2188 = 2^2 \times 547$$

$$2200 = 2^3 \times 5^2 \times 11$$

$$2438 = 2 \times 23 \times 53$$

$$2512 = 2^4 \times 157$$

$$2530 = 2 \times 5 \times 11 \times 23$$

$$2618 = 2 \times 7 \times 11 \times 17$$

$$2642 = 2 \times 1321$$

$$\begin{aligned}3458 &= 2 \times 7 \times 13 \times 19 \\3818 &= 2 \times 23 \times 83 \\3848 &= 2^3 \times 13 \times 37 \\4618 &= 2 \times 2309 \\4886 &= 2 \times 7 \times 349 \\5372 &= 2^2 \times 17 \times 79 \\5978 &= 2 \times 7^2 \times 61 \\6002 &= 2 \times 3001 \\6008 &= 2^3 \times 751 \\7426 &= 2 \times 47 \times 79 \\9596 &= 2^2 \times 2399 \\9602 &= 2 \times 4801 \\10268 &= 2^2 \times 17 \times 151 \\10622 &= 2 \times 47 \times 113 \\11438 &= 2 \times 7 \times 19 \times 43 \\11642 &= 2 \times 5821 \\12886 &= 2 \times 17 \times 379 \\13148 &= 2^2 \times 19 \times 173 \\13562 &= 2 \times 6781 \\14198 &= 2 \times 31 \times 229 \\14678 &= 2 \times 41 \times 179 \\16502 &= 2 \times 37 \times 223 \\18908 &= 2^2 \times 29 \times 163 \\21368 &= 2^3 \times 2671 \\22832 &= 2^4 \times 1427 \\23426 &= 2 \times 13 \times 17 \times 53 \\23456 &= 2^5 \times 733 \\43532 &= 2^2 \times 10883 \\54244 &= 2^2 \times 71 \times 191 \\63274 &= 2 \times 17 \times 1861\end{aligned}$$

Retour à l'indicatrice φ d'Euler (Denise Vella-Chemla, 29.4.2023)

On rappelle la définition suivante : A et B sont premiers l'un à l'autre si leur plus grand diviseur commun (pgcd) est égal à 1.

Si $n = p + (n - p)$ est une décomposition de Goldbach de n , un nombre pair supérieur à 4, alors p et $n - p$ sont deux nombres premiers. Considérons un nombre premier p supérieur à $\sqrt{n}$, il est premier au produit des nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$. Son complémentaire à n également est premier à ce produit. Et le produit $p(n - p)$ est lui aussi premier au produit en question des nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{n}$.

Cette constatation permet de trouver d'une façon particulière les décomposants de Goldbach p d'un nombre pair n (≥ 6) qui sont supérieurs à $\sqrt{n}$. On teste simplement que le produit $A = p(n - p)$ est premier à $B = \prod_{\substack{q \text{ premier} \\ 2 \leq q \leq \sqrt{n}}} q$. Si tel est le cas, p est un décomposant de Goldbach de n .

Pour n un nombre pair, on a $\left\lfloor \frac{n - 2}{4} \right\rfloor$ nombres impairs qui sont des décomposants de Goldbach potentiels de n .

L'indicatrice d'Euler, $\varphi(k)$ compte le nombre de nombres inférieurs à k et premiers à k , i.e. le nombre de nombres qui ont pour pgcd avec k le nombre 1 (on dit aussi qui n'ont pas de facteur commun qui soit supérieur à 1 avec k).

Question 1 : peut-on dire que la probabilité pour un nombre inférieur à k d'être premier à k est égale à $\frac{\varphi(k)}{k}$?

Question 2 : peut-on dire qu'un certain nombre de nombres inférieurs à un entier donné k , ces nombres étant en quantité x , ont $x \times \frac{\varphi(k)}{k}$ chances à eux tous que l'un d'entre eux au moins soit premier à k ?

Si l'on pouvait répondre par l'affirmative à ces deux questions, cela serait très arrangeant, car on pourrait alors dire que les $\left\lfloor \frac{n - 2}{4} \right\rfloor$ nombres impairs décomposants de Goldbach potentiels

du nombre n ont à eux tous $\left\lfloor \frac{n - 2}{4} \right\rfloor \times \frac{\varphi\left(\prod_{\substack{q \text{ premier} \\ 2 \leq q \leq \sqrt{n}}} q\right)}{\prod_{\substack{q \text{ premier} \\ 2 \leq q \leq \sqrt{n}}} q}$ chances que l'un d'entre eux soit premier à

$\prod_{\substack{q \text{ premier} \\ 2 \leq q \leq \sqrt{n}}} q$, i.e. soit un décomposant de Goldbach de n et ce nombre de chances d'être un décomposant de Goldbach de n est supérieur strictement à 1 à partir de $n = 10$ et au-delà, semble-t-il par programme.