L'imagination joue un rôle crucial en mathématiques
Alain CONNES

Alain Connes, mathématicien, explique comment sa discipline peut décrypter le monde.

"Les maths c'est comme l'humour", osait l'un de vos collègues, "si on le comprend, on est du club, sinon, on est exclu". L'incommunicabilité des maths est-elle irréductible ?

Oui, et j'aborderai cette question en parallèle avec la notion d'imagination en mathématiques. Cette incommunicabilité est liée au fait qu'on ne peut comprendre les maths, ou simplement les percevoir, de manière passive mais seulement en les pratiquant. Si la géométrie peut donner l'illusion d'une perception, en raison du raffinement des aires cérébrales consacrées à la vision, tant qu'elle n'est pas travaillée, relayée par le langage formalisé et algébrique, cette perception reste une illusion, vague et confuse. L'imagination joue en fait un role crucial en mathématiques ; le chercheur ne l'utilise pas pour inventer des histoires farfelues, maispour créer des images mentales, à partir de la géométrie, bien sûr, mais aussi de l'écrit, des formules algébriques ou d'un texte qui sembleront opaques au profane, mais qui vont ainsi s'éclairer pour le mathématicien. Une page de formules n'acquiert de sens qu'à ce prix-là.

Difficile, alors, d'expliquer ce que fait un mathématicien...

On peut l'illustrer par une anecdote. Un jour, un journaliste se présente au domicile d'Henri Cartan - l'un des membres de Bourbaki [1] - et n'y trouve que sa femme de ménage. Il lui demande : "Que fait Henri Cartan lorsqu'il travaille ?". Elle répond qu'il passe son temps dans son bureau à écrire sur des bouts de papier qu'il froisse ensuite, avant de les jeter consciencieusement à la poubelle ! Décrire au non-mathématicien l'objet de la recherche mathématique pose un problème spécifique, qui a trait à la nature de la réalité mathématique. L'astronome peut désigner les étoiles, le physicien la matière, le géologue une pierre, mais le mathématicien...

Vous présentez souvent cette recherche comme une exploration géographique, à l'image de celle de la Terre. Est-ce plus qu'une métaphore ?

---

article de Sylvestre Huet, ou Week-end Rencontre du journal Libération, samedi 1er et dimanche 2 décembre 2001, p. 48.
https://next.liberation.fr/guide/2001/12/01/l-imagination-joue-un-role-crucial-en-mathematiques_385921

1. Un groupe de mathématiciens français qui, sous ce nom collectif, se fixa l'objectif de réécrire les bases des maths, dans les années 30.

Deux points de vue extrêmes s'opposent sur l'activité mathématique. Le premier, dans lequel je m'inscris volontiers est d'inspiration platonicienne : il postule qu'il existe une réalité mathématique, brute, primitive, qui préexiste à sa découverte. Un monde dont l'exploration passe par la création d'outils, comme il a fallu inventer les navires pour passer les océans. Le mathématicien va donc inventer, créer des théories dont le but est de lever un coin du voile sur cette réalité préexistante. Le second point de vue est celui des formalistes : il nie toute préexistence aux mathématiques, estimant qu'elles sont un jeu formel, fondé sur les axiomes et les déductions logiques, donc une pure création humaine. Ce point de vue paraît plus naturel au non-mathématicien, qui renâcle à postuler un monde inconnu dont il n'a aucune perception. Les gens comprennent que les mathématiques sont un langage, mais pas qu'elles constituent une réalité extérieure à l'esprit humain. Les grandes découvertes du XX$^{\text{ème}}$ siècle, en particulier les travaux de Gödel [2], ont pourtant montré que le point de vue formaliste n'est pas tenable. Quel que soit le moyen exploratoire, le système formel, il y aura toujours des vérités mathématiques qui lui échapperont, et on ne peut réduire la réalité mathématique aux conséquences logiques d'un système formel.

Radicalement distincts, pour vous, ce monde mathématique et celui exploré par les sciences de la nature se rencontrent toutefois ; comment est-ce possible ?

Les mathématiques représentent, de mon point de vue, la seule stratégie cohérente pour comprendre et désigner de manière non ambiguë la réalité matérielle extérieure. Toutes les autres stratégies, y compris la philosophie, reposent sur un système circulaire, analogue à celui des mots du dictionnaire. Ils ne sont compréhensibles que par référence à un autre mot. Si une intelligence extérieure, un jour, nous demande de spécifier où nous vivons dans l'Univers, répondre sur "la Terre" ne peut convenir, c'est un mot que nous avons choisi. Si l'on répond : "nous sommes sur la troisième planète d'un système planétaire autour d'une étoile, elle sera confondue avec les milliers d'autres planètes semblables. En mathématiques, on arrive à isoler certains objets par des considérations générales, et ce type de convergence n'a pas vraiment d'analogue ailleurs. Finalement, le langage mathématique est le meilleur instrument pour définir sans ambiguité ce qu'on lui oppose *a priori*, la réalité extérieure, dont l'existence nous paraît évidente.

Cela veut-il dire que nous pourrions parler maths avec n'importe quelle intelligence extraterrestre ?

Bien sûr ! La première chose que l'on peut transmettre, c'est le nombre. Un signal, absence de signal, à nouveau un signal : c'est clair... Mais si nous commençons par trans-

2. L'Autrichien Kurt Gödel démontra dans les années 30 l'"incomplétude" des systèmes formels.

mettre une phrase, nous n'avons aucune chance d'être compréhensible ! Alors qu'on peut communiquer la table d'addition ou de multiplication de manière non ambiguë. Même un spectre d'atome ne sera pas aussi fondamental, universel.

Même si les maths sont une exploration et non une pure création, elles ont tout de même une histoire où les relations avec les sciences de la nature semblent primordiales, au point qu'Eugène Wigner [3] a pu s'interroger sur leur efficacité "déraisonnable" en physique. Comment voyez-vous ces relations ?

D'abord à travers ce phénomène surprenant : ce sont souvent des développements mathématiques parmi les plus purs, les plus éloignés de toute application pratique qui se révèlent les plus utiles en sciences de la nature. A priori, quel problème plus gratuit que de savoir si l'un des axiomes de la géométrie est superflu ou pas ? En l'occurrence, celui de l'unique parallèle à une droite passant par un point. Au XIX$^{\text{ème}}$ siècle, des mathématiciens se sont aperçus que l'on pouvait construire des modèles cohérents où tous les axiomes de la géométrie euclidienne étaient vérifiés sauf celui-là. Pure théorie ? Mais c'est cette piste qui a conduit à la géométrie de Riemann [4], puis à la relativité générale d'Einstein, l'une des théories physiques majeures de notre temps. Le cheminement entre recherche mathématique et sciences de la nature est donc imprévisible et il ne faut surtout pas tenter de le conditionner par la rentabilité à court terme. Quand Jacobi [5] s'est vu reprocher, il y a plus d'un siècle et demi, de ne pas travailler sur des mathématiques "*utiles*", il répondit qu'il le faisait "*pour l'honneur de l'esprit humain*".

Que vouliez-vous dire par : "A bout de ressources, un physicien théoricien en arrive à devenir mathématicien, faute de mieux." ?

Il est rare que l'on soit en panne d'expériences, de données. Aujourd'hui, l'un des principaux défis des physiciens est de réconcilier la mécanique quantique (la théorie des particules élémentaires) et la gravitation (celle des relations de l'espace-temps avec la matière), aujourd'hui incompatibles. Ils disposent de nombreuses données expérimentales, comme les valeurs des masses des particules ou de l'intensité de leurs interactions. Ces paramètres sont livrés par l'expérience. Mais les physiciens ne disposent d'aucune explication théorique à ces valeurs. A court de concepts physiques, certains peuvent avoir tendance à se tourner vers les mathématiques, tant il est vrai que la frontière entre les deux est floue. Mais ce détour ne peut être productif, pour les physiciens, que s'il permet de développer un concept physique qui résistera à la confrontation avec l'expé-

3. L'Allemand Eugène Wigner fut Nobel de physique en 1963 pour ses travaux en mécanique quantique.

4. Bernhard Riemann, mathématicien allemand, créateur de la géométrie riemanienne qui fournit à Einstein le cadre géométrique nécessaire à la relativité.

5. Carl Jacobi, mathématicien allemand (1804-1851).

rience, sinon, au pire, il fera progresser les mathématiques.

Lui-même ou en provoquant la réflexion de mathématiciens ?

Dans mon propre travail, j'ai abordé, avec le physicien allemand Dirk Kreimer, le problème dit de la renormalisation, c'est-à-dire les tours de passe-passe opérés par les physiciens pour éliminer les infinis rencontrés lorsqu'ils font des calculs en théorie des champs, utilisée pour prévoir les interactions entre particules élémentaires comme l'électron, les quarks, etc. Evidemment, l'énergie d'une particule ne peut pas être infinie... Les physiciens ont trouvé une méthode, à la fin des années 40, baptisée "renormalisation", pour éliminer ces infinis des calculs. Du point de vue des concepts de la physique, elle est tout à fait justifiée. Pour prendre un exemple macroscopique, c'est comme pour le calcul de la force qui s'exerce sur une balle de ping-pong que l'on plonge sous cinq mètres d'eau. Si vous appliquez simplement la loi d'Archimède, le calcul dit qu'elle doit partir avec dix fois l'accélération de la pesanteur. C'est manifestement faux. Il faut corriger la loi de Newton en remplaçant la masse inerte ou "nue" de la balle par sa masse "effective" qui est différente en raison de la présence d'eau autour d'elle.

Au niveau microscopique, c'est pareil. Lorsque l'on prend en compte la masse "effective" de la particule, déterminée par son environnement, les infinis disparaissent des calculs, ce qui permet de parvenir à un résultat ayant un sens physique. Au plan mathématique, cela nous semblait horrible, dépourvu de sens ; essentiellement parce que la méthode n'avait rien d'analogue dans aucune branche des mathématiques. Or l'une de nos découvertes, avec Dirk, est que les physiciens avaient en réalité, et sans le savoir, utilisé un cas particulier d'une théorie mathématique connue. Autrement dit, la méthode, justifiée en physique, a rencontré un problème mathématique merveilleux, dont la résolution et la subtilité ouvrent la voie à une meilleure compréhension.

Parmi les interactions actuelles entre les sciences de la nature et les mathématiques, lesquelles vous semblent les plus fructueuses ?

Le dialogue entre physique et mathématiques est si serré que la frontière entre les deux est floue. Il existe cependant une différence notable dans le mode opératoire des physiciens et des mathématiciens. Les physiciens se comportent à l'instar des bosons (les particules portant les forces) et ont tendance à se regrouper autour d'un même problème. Les mathématiciens, eux, sont plutôt des fermions (les particules de matière) : ils s'excluent les uns les autres, travaillent rarement en groupe. L'un des sujets qui nous rapprochent est cette incompatibilité apparente entre mécanique quantique et théorie de la gravitation. Elle oblige les mathématiciens à réfléchir à ce qu'est la géométrie, à raffiner le paradigme de l'espace géométrique et du temps. C'est fondamental, y compris au plan philosophique. Les liens avec la biologie, l'exploration du génome, sont aussi une frontière intéressante, mais les mathématiques n'y ont pas encore montré la puissance qu'elles déploient en physique. Cela pourrait changer, comme le montrent des avancées récentes sous la direction de Misha Gromov qui travaille à l'IHES de Bures-sur-Yvette. Quelle partie des mathématiques leur sera utile ? Elles sont si riches, si complexes, offrent tant de facettes développées pour elles-mêmes qu'il est impossible de répondre. Je suis toutefois persuadé que ce sont les idées les plus abstraites qui seront les plus utiles aux biologistes pour percer les secrets de l'évolution comme la création de nouvelles fonctions.

Vous n'avez pas mentionné la simulation numérique, sur ordinateur, qui prend une importance considérable dans les laboratoires ?

On entend beaucoup de bêtises à cet égard. Comme la répétition simplette de la métaphore du battement de l'aile de papillon qui cause une tempête[6]... On peut se gargariser de modèles mathématiques possédant ce genre d'instabilité, mais si on se fie trop au modèle et au résultat mathématique qui en découle, calculé par l'ordinateur, on risque de graves déconvenues. Dans ce type de problèmes, comme celui de la simulation du climat et de son évolution, on se heurte à un nombre considérable de paramètres, dont une bonne part ne peut être prise en compte, et le modèle mathématique donne tout au plus une indication.

Il y a un autre danger, pour les mathématiciens, qui est le côté ludique de l'ordinateur. Je suis toujours un peu inquiet quand je pénètre maintenant dans un institut de mathématiques de voir les mathématiciens toujours plantés devant leur écran. Oppenheimer, dans les années 50, devait faire visiter l'institut de Princeton à un officiel très haut placé. Dans le deuxième bureau qu'ils ont ouvert, ils ont trouvé un mathématicien allongé sur sa table de travail apparemment en train de dormir. A l'époque, quand un mathématicien travaillait, il réfléchissait en regardant le plafond ! Cela dit, il n'en reste pas moins que l'ordinateur est un outil puissant comme aide au calcul dont on aurait tort de se priver. Si on l'utilise comme un esclave soumis, sans se laisser prendre par le côté ludique, c'est une aide extraordinaire.

6. Lire Raoul Robert dans la Gazette des mathématiciens d'octobre 2001.