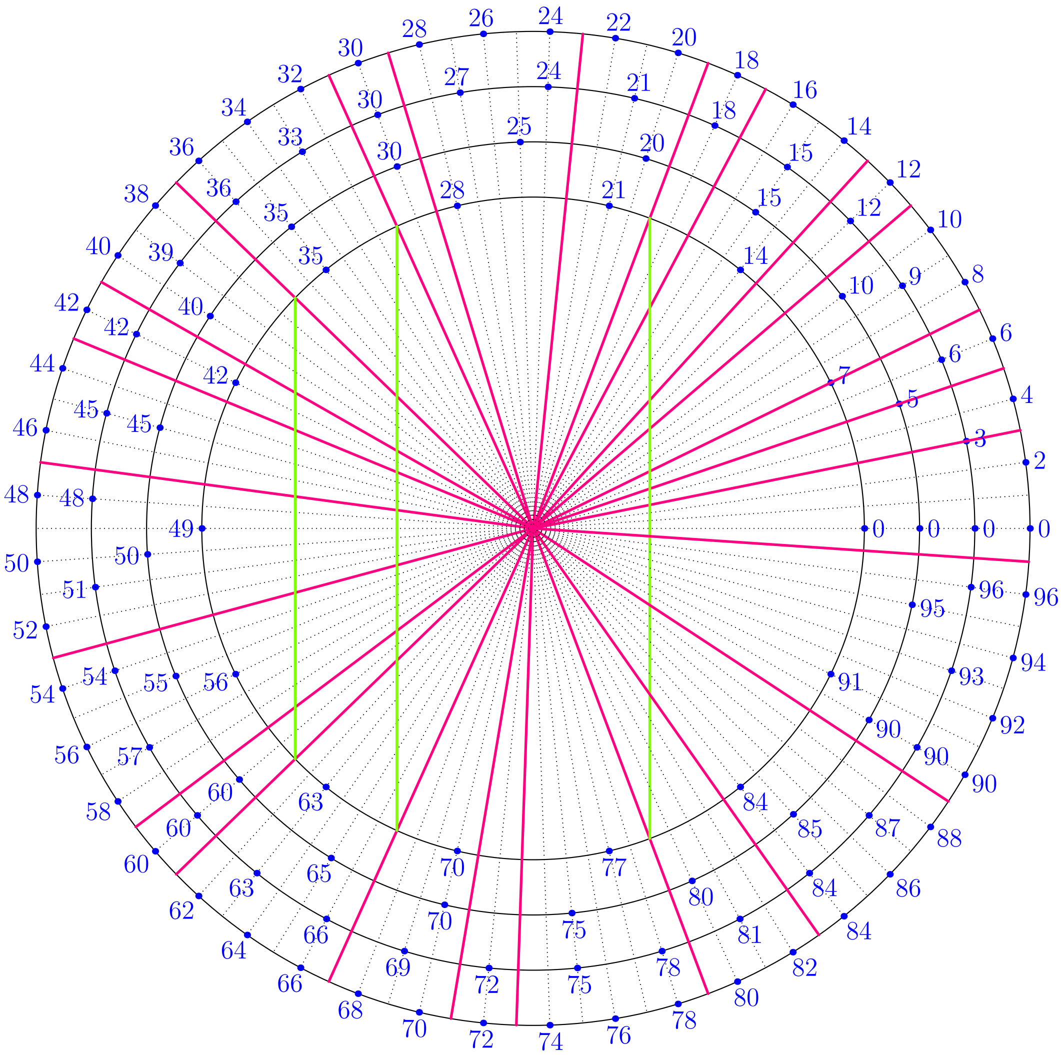
*Conjecture de Goldbach sur le cercle (Denise Vella-Chemla, 21.01.2021)*

On propose ici une reformulation de la conjecture de Goldbach utilisant les homéomorphismes du cercle.

On a démontré, dans le fichier [1] (et dans une réécriture légèrement différente [2]) que les décomposants de Goldbach d'un nombre pair $n$ (supérieurs à $\sqrt{n}$) sont les nombres premiers inférieurs à $n/2$ qui ne partagent aucun reste avec ce nombre pair dans toute division euclidienne par les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$.

On a choisi de représenter ces propriétés sur des cercles concentriques. Un exemple est fourni ci-dessous, la visualisation de la recherche des décomposants de Goldbach du nombre pair 98 (qui sont 19(+79), 31(+67) et 37(+61)). On trouve deux autres exemples ici [3] et [5]




Cette modélisation par cercles concentriques peut être transposée en une modélisation par homéomorphismes du cercle (voir les travaux d'Etienne Ghys [4], [5]).

Si l'on représente le nombre 98 par un cercle de longueur $2\pi$, et que l'on visualise les nombres divisibles par 3 par des petits "plots" placés le long du cercle-unité (la représentation ci-dessus utilise autant de cercles que de nombres premiers inférieurs à $\sqrt{98}$ pour que la lecture soit facilitée, la divisibilité par 3 est représentée ici sur le deuxième cercle en allant de l'extérieur des cercles vers le centre), sur les points d'affixes les complexes $e^{\frac{2i\pi 3k}{98}}$, avec $k \leqslant \frac{98}{3} = 32$, on comprend aisément que les nombres divisibles par 3 appartiennent tous à un même groupe, contenant 0, en considérant l'opération rotation d'angle $\theta = \frac{2\pi 3}{98}$ ou $\theta = -\frac{2\pi 3}{98}$, on fait attention de "ne pas dépasser 0 en effectuant les rotations, dans un sens ou dans l'autre", i.e. d'effectuer moins d'un tour complet ou juste un tour complet et pas plus.

On peut procéder identiquement pour les divisibilités par 5, 7 et 2, seules divisibilités nécessaires en plus de la divisibilité par 3, pour trouver les décomposants de Goldbach de 98, car 2, 3, 5, 7 sont les seuls nombres premiers inférieurs à la racine carrée de 98.

On a ainsi sur le cercle des ensembles de nombres (les $3k$, les $3k+1$, les $ax+b$), qui peuvent "s'atteindre les uns les autres" par application réitérée de rotations (par puissances de rotations donc) ou bien au contraire, ne jamais s'atteindre les uns les autres.

Les nombres divisibles par $p_m$ sont dans les noyaux pour l'opération $k$-ième puissance de rotation selon le nombre premier $p_m$ ($k$ est choisi pour ne pas dépasser un tour), quand les rotations sont prises dans le sens négatif (inverse des aiguilles d'une montre).

Les nombres $x$ dont le complémentaire $n-x$ à $n$, est divisible par $p_m$ sont dans les noyaux pour l'opération puissance de rotation selon le nombre premier $p_m$ quand les rotations sont prises dans le sens positif.

Les décomposants de Goldbach de $n$ supérieurs à $\sqrt{n}$ sont ainsi à chercher dans le complémentaire de l'union des noyaux, dans les sens positif ou négatif (sans dépasser le tour complet) ; pour l'exemple du nombre 98, il s'agit des noyaux selon quatre rotations différentes, ces rotations étant les multiplications par les complexes $\{e^{\pm\frac{2i\pi 2}{98}}, e^{\pm\frac{2i\pi 3}{98}}, e^{\pm\frac{2i\pi 5}{98}}, e^{\pm\frac{2i\pi 7}{98}}\}$ et leurs puissances.

On ne sait pas si les connaissances acquises sur les homéomorphismes du cercle permettent d'assurer que le complémentaire de l'union des noyaux selon les différentes rotations n'est jamais vide, quel que soit le nombre pair considéré.

On peut également modéliser les mêmes idées en utilisant la notion de treillis distributif (voir fichier [6]).

Références

[4] E. Ghys, V. Sergiescu, Sur un groupe remarquable de difféomorphismes du cercle, Comment. Math. Helvetici 62 (1987), p. 185-239.

[5], E. Ghys, Groupes d'homéomorphismes du cercle et cohomologie bornée, Contemporary mathematics, Vol. 58, Part III, 1987.