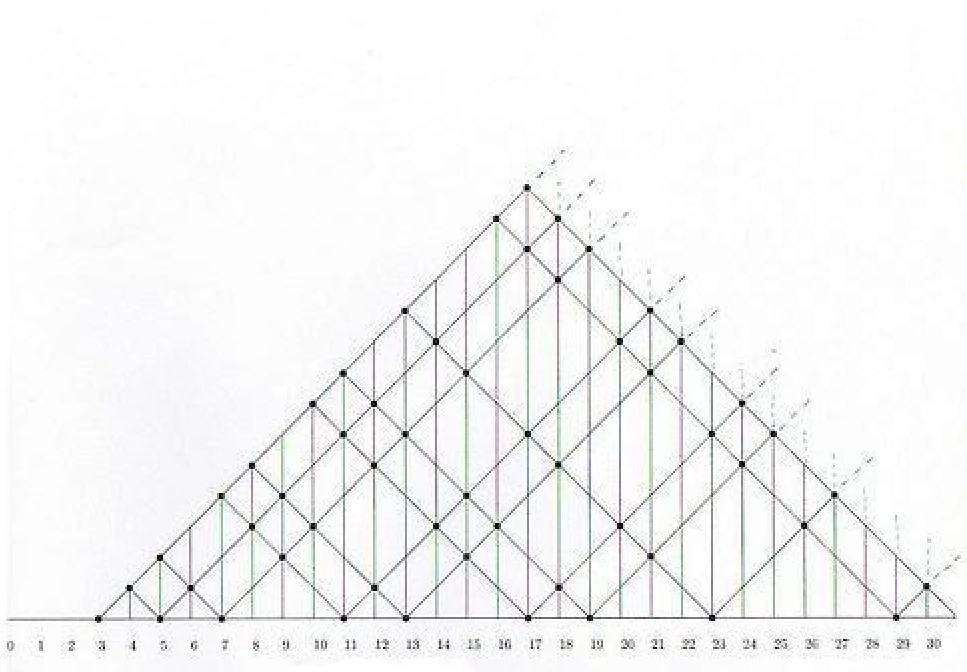
1 Introduction

La conjecture de Goldbach (1742) énonce que tout nombre pair $2x$ supérieur ou égal à 4 est la somme de deux nombres premiers.

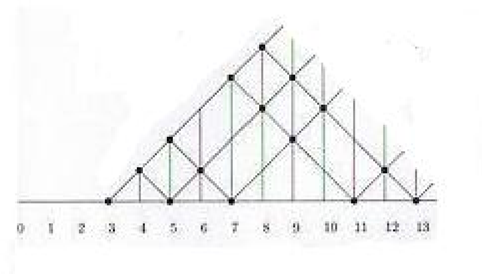
2 Représentation géométrique des décompositions



Le graphique ci-dessus permet la visualisation simultanée de toutes les décompositions Goldbach des nombres pairs successifs. A chaque nombre premier sont associées deux droites de pentes 45° et 135°. A chaque abscisse est associée une verticale. Lorsqu'il y a croisement de trois droites (la verticale associée à x et deux diagonales), on est "sur une" décomposition Goldbach de $2x$. Les croisements sur l'axe des abscisses sont dûs au fait que tout nombre premier, étant trivialement la moitié de son double, les nombres pairs double de nombres premiers vérifient la conjecture.

Le fait de passer d'un point du graphique au point qui en est immédiatement au nord-est ou bien immédiatement au sud-est correspond au fait qu'on est passé d'une décomposition Goldbach de $2n$ à une décomposition de $2n+2$ et que l'un des deux nombres premiers intervenant dans la décomposition de $2n$ avait un jumeau.

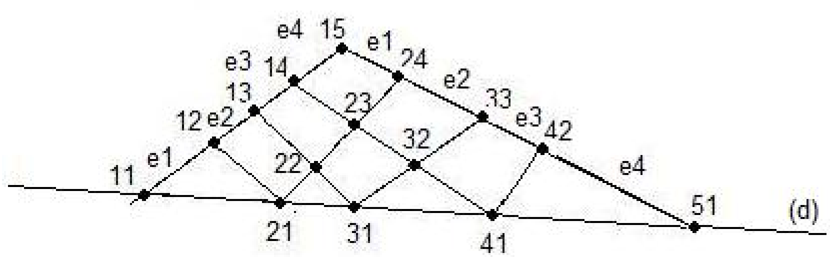
Intéressons-nous au triangle extrait en bas à gauche du graphique infini ci-dessus :



Ce triangle contient les décompositions $3+3$ à $13+13$, que l'on peut compter en les séparant en cinq, quatre, trois, deux et une sommes des deux façons suivantes (cf théorème du double-comptage simplifié) :

- séparation selon le premier sommant :
  - $3+3,\ 3+5,\ 3+7,\ 3+11,\ 3+13$
  - $5+5,\ 5+7,\ 5+11,\ 5+13$
  - $7+7,\ 7+11,\ 7+13$
  - $11+11,\ 11+13$
  - $13+13$
- séparation selon le deuxième sommant :
  - $3+13,\ 5+13,\ 7+13,\ 11+13,\ 13+13$
  - $3+11,\ 5+11,\ 7+11,\ 11+11$
  - $3+7,\ 5+7,\ 7+7$
  - $3+5,\ 5+5$
  - $3+3$

3 Problème géométrique



Posons-nous le problème suivant : on a $\frac{i(i+1)}{2}$ points dont on veut qu'ils respectent des contraintes d'alignement et dont on veut également qu'ils respectent des contraintes d'espacement entre certains points. Les contraintes d'alignement sont :

– $\forall x,\ \forall y_i,\ \forall y_j,\ (x,\ y_i)$ est aligné avec $(x,\ y_j)$
– $\forall x_i,\ \forall y_i,\ \forall x_j,\ \forall y_j,\ (x_i,\ y_i)$ aligné avec $(x_j,\ y_j) \iff x_i + y_i = x_j + y_j$

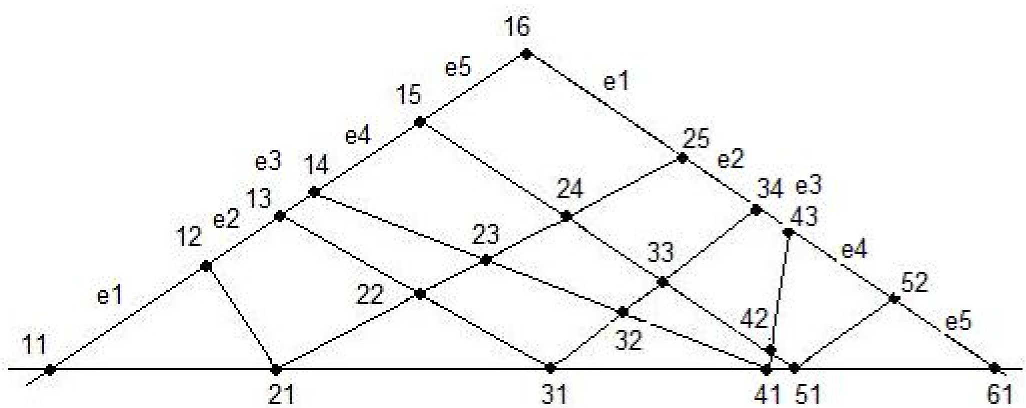
Peut-être cela aura-t-il pour conséquence les autres contraintes d'alignement suivantes ou peut-être ces nouvelles contraintes d'alignement pourraient-elles ne pas être vérifiées.

– $\forall x_i,\ \forall x_j,\ \forall y,\ (x_i,\ y)$ est aligné avec $(x_j,\ y)$

Les contraintes d'espacement (notées par les écarts $e1, e2, e3$ et $e4$ sur le schéma) sont :

– l'espacement entre les points $(1,1)$ et $(1,2)$ est le même que l'espacement entre les points $(1,5)$ et $(2,4)$;
– l'espacement entre les points $(1,2)$ et $(1,3)$ est le même que l'espacement entre les points $(2,4)$ et $(3,3)$;
– l'espacement entre les points $(1,3)$ et $(1,4)$ est le même que l'espacement entre les points $(3,3)$ et $(4,2)$;
– l'espacement entre les points $(1,4)$ et $(1,5)$ est le même que l'espacement entre les points $(4,2)$ et $(5,1)$;

Ces contraintes d'espacement entraînent que le triangle est forcément isocèle. Il pourrait ressembler à cela :



Plusieurs questions se posent alors :

– les contraintes identifiées ont-elles pour conséquence d'autres alignements entre certains points ?
– ces contraintes entraînent-t-elles le parallélisme de certaines droites ?

On peut peut-être considérer qu'une projection selon une certaine direction à définir envoie les points sur la droite des entiers, symbolisée par la base du triangle. Cette projection doit vraisemblablement projeter plusieurs points sur le même entier parce que sinon, l'intervalle borné $[3, p_i]$ se trouverait contenir plus d'entiers qu'il n'est possible.

La question cruciale est alors :

– nos contraintes auraient-elles pour conséquence que les points projetés sont tous à égale distance les uns des autres, et qu'il n'y a pas de point intermédiaire sur lequel personne ne se projetterait ?

On remarque que le graphique initialement présenté, par la perpendicularité des lignes qui le caractérise, garantit que chaque entier est "au milieu", au sens géométrique du terme, de deux nombres premiers.