Une fonction de comptage des nombres premiers (Denise Vella-Chemla, 14.9.2018)

On définit ci-dessous une fonction $f_b(x)$ paramétrée par un entier b (la base, qui n'est pas forcément un nombre premier).

Cette fonction est définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$.

Elle permet d'"isoler" une puissance de la base dans l'écriture d'un nombre entier sous la forme d'un produit ainsi [*] :

$$f_b(kb^y) = y \text{ avec } b \not| \, k.$$

Cette fonction coïncide avec la valuation p-adique $v_p(n)$ qui est définie sur $\mathbb{Q}$ et selon p un nombre premier [†].

$$y \text{ est l'exposant maximum tel que } \; b^y \mid n.$$

Les images des 30 premiers entiers par les fonctions f_2, f_3, f_4, f_5 sont :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$f_2(x)$	0	1	0	2	0	1	0	3	0	1	0	2	0	1	0	4	0	1	0	2	0	1	0	3	0	1	0	2	0	1
$f_3(x)$	0	0	1	0	0	1	0	0	2	0	0	1	0	0	1	0	0	2	0	0	1	0	0	1	0	0	3	0	0	1
$f_4(x)$	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	2	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
$f_5(x)$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2	0	0	0	0	1

Ces fonctions ont un comportement similaire à celui du logarithme : par exemple, $f_k(kx) = f_k(x) + 1$. Cependant, elles ne coïncident avec les logarithmes en base k que pour les x qui sont des puissances des différents k. Entre ces puissances, les logarithmes en base k croissent lentement sur $\mathbb{R}$ tandis que les $f_k(x)$ sont très souvent nulles et entrecoupées de valeurs erratiques tous les k nombres.

On remarque dans chaque séquence les multiples occurrences d'une sous-séquence répétitive, qui rappelle la notion de motif musical, ces motifs étant palindromiques [‡] :

- multiples occurrences du "motif" 010 dans la séquence des $f_2(x)$, entre lesquelles s'intercalent les valeurs 2, 3, 2, 4, etc.
- multiples occurrences du "motif" 00100100 dans la séquence des $f_3(x)$, entre lesquelles s'intercalent les valeurs 2, 2, 3, 2, 2, 3, 2, 2, 4, etc.
- multiples occurrences du "motif" $(0^{p-1}1)^{p-1}0^{p-1}$ dans la séquence des $f_p(x)$, entre lesquelles s'intercalent les valeurs 2 ($p-1$ fois), etc.

La fonction $Sf(n)$ qui associe à n la somme des valeurs des $f_x(n)$ pour x un entier compris entre 2 et $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, associe comme image 0 aux nombres premiers (> 1) et associe comme image un entier non nul aux nombres composés.

$$Sf(n) = \sum_{2 \leq x \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} f_x(n)$$

Les valeurs $Sf(x)$ sont fournies ci-dessous pour les premiers entiers :

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$Sf(x)$	0	0	2	0	1	0	3	2	1	0	3	0	1	1	6	0	3	0	3	1	1	0	5	2	1	3	3	0	3

Maintenant qu'on a trouvé une fonction qui s'annule pour les nombres premiers et ne s'annule pas pour les autres nombres, on définit une fonction toute simple basée sur elle, et qui compte les nombres premiers inférieurs ou égaux à un entier donné :

$$\pi_D(x) = \sum \frac{1}{|1 - Sf(x)^{15}|}$$

L'exposant au dénominateur est destiné à augmenter la précision : s'il est trop petit, par exemple s'il est égal à 2, la fonction $\pi_D(x)$ dépasse trop $\pi(x)$; s'il vaut 10, la fonction $\pi_D(x)$ a une différence de 2 avec $\pi(x)$ (1231 au lieu de 1229) pour $x = 10^4$, une différence de 22 (9614 au lieu de 9592 et une différence de 124 (78622 au lieu de 78498) ; s'il vaut 15, il n'y a plus de différence entre $\pi_D(x)$ et $\pi(x)$ jusqu'à 10^6 [§]).

∗. La présente note reprend les idées d'une note de février 2006, Fractales, symétrie et conjecture de Goldbach, http://denisevellachemla.eu/fevrier2006.pdf.

†. Les fonctions définies ici ne doivent pas être confondues avec celles fournissant pour un entier les coefficients intervenant dans leur écriture en base p, i.e. leur écriture comme combinaison linéaire de puissances de p.

‡. Les fonctions discrètes proposées ici rappellent par leur forme les spectres de fréquences de *fonctions sinusoïdales modulées en amplitude. Cf. dessin en annexe et article wikipedia sur la Modulation d'amplitude https://fr.wikipedia.org/wiki/Modulation$'_d$amplitude*

§. Avec un exposant au dénominateur de 10, on obtient par $\pi_D(x)$ de meilleures approximations de $\pi(x)$ que celles obtenues

Annexe 1 : programme de calcul de $\pi_D(x)$

```
#include <iostream>
#include <stdio.h>
#include <cmath>
#include <math.h>

int prime(int atester) {
    bool pastrouve=true;
    unsigned long k = 2;

    if (atester == 1) return 0;
    if (atester == 2) return 1;
    if (atester == 3) return 1;
    if (atester == 5) return 1;
    if (atester == 7) return 1;
    while (pastrouve) {
        if ((k * k) > atester)
            return 1;
        else
            if ((atester % k) == 0)
                return 0 ;
            else k++;
    }
}

int main (int argc, char* argv[]) {
    int n, nmax, p, puiss, tempo, somme ;
    float compte ;
    int valpadique[1000002] ;

    compte = 0.0 ; nmax = 1000000 ;
    for (n = 2 ; n <= nmax ; ++n) {
        for (p = 2 ; p <= n/2 ; ++p)
            valpadique[p] = 0 ;
        somme = 0 ;
        for (p = 2 ; p <= n/2 ; ++p) {
            puiss = 1 ;
            tempo = n ;
            while ((tempo/p > 0) && ((tempo % p) == 0)) {
                tempo = tempo/p ;
                puiss = puiss+1 ;
            }
            valpadique[p] = puiss-1 ;
            somme = somme+valpadique[p] ;
        }
        std::cout << n << "-> " ;
        //ligne au-dessous : precision a 15
        compte = compte+1.0/abs(1.0-pow((float)somme,15)) ;
        if (prime(n))
            std::cout << "\npremier" ;
        else
            std::cout << "\ncompose" ;
        std::cout << " somme " << somme << "\n" ;
        std::cout << " compte " << compte << "\n" ;
    }
}
```

par la fonction $Li(10^4) = 1245$, $Li(10^5) = 9629$ ou $Li(10^6) = 78627$, fonction $Li(x)$ bien connue des mathématiciens [¶], ce qui est normal puisqu'on a utilisé les exposants de tous les facteurs intervenant dans les factorisations des nombres...

Annexe 2 : quelques illustrations pour fixer les idées
Dessin initial de février 2006

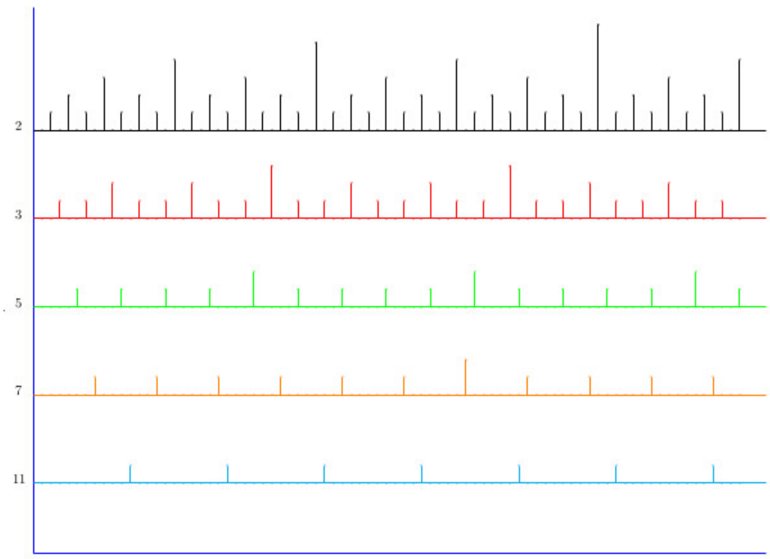
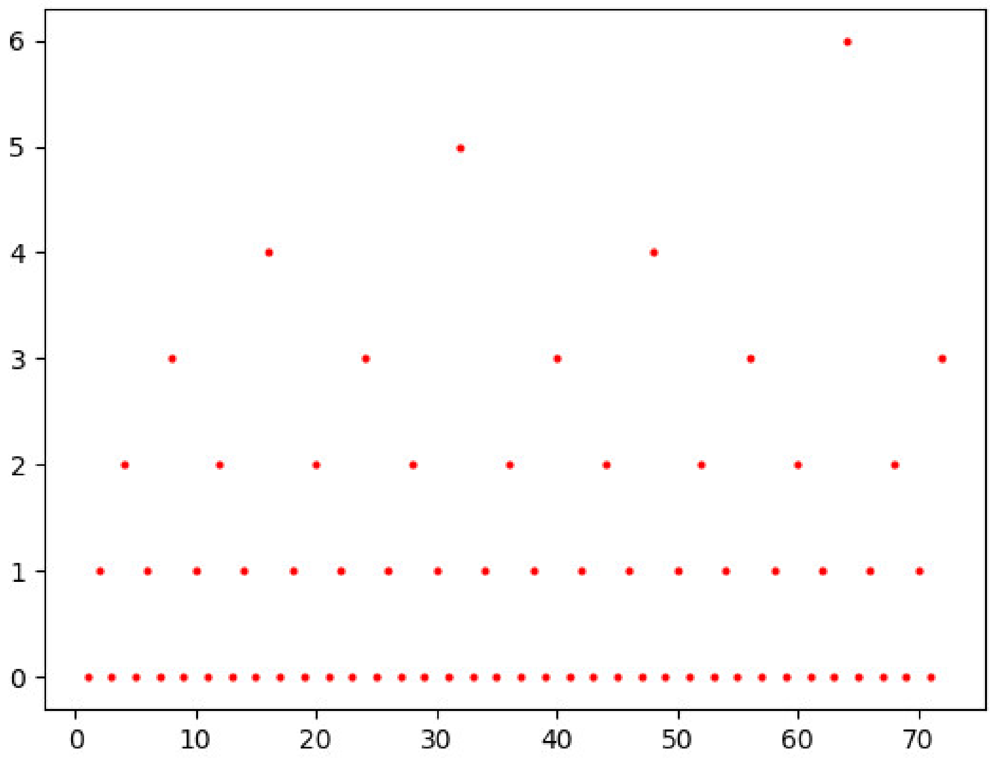
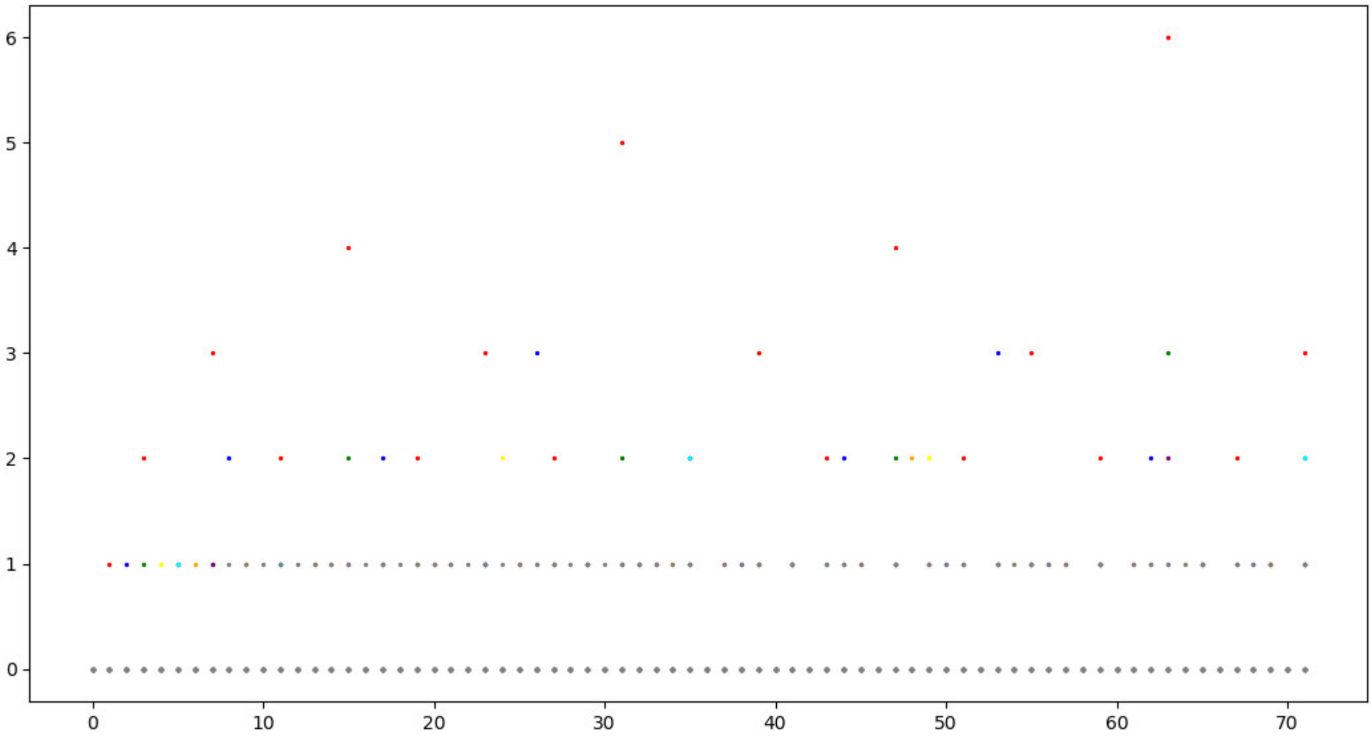


Figure 1 : Séquences fractales de valuations p-adiques

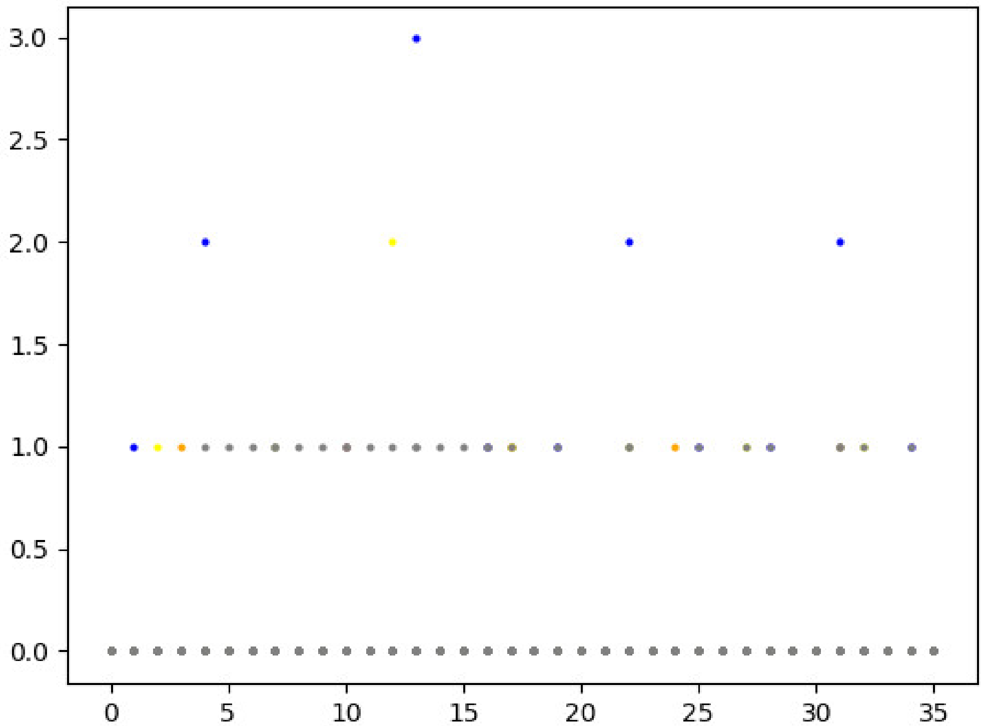
Sortes de valuations 2-adiques (i.e. plus grande puissance de 2 divisant un nombre) des entiers de 1 à 72



Valuations de 1 à 36-adiques des nombres de 1 à 72



Valuations pour les nombres impairs de 3-adiques à 35-adiques des entiers impairs compris entre 1 à 71



Les nombres premiers compris entre 36 et 72 apparaissent "sans points" sur la ligne d'ordonnée égale à 1, $p = 2x + 1$ étant à l'ordonnée x (37 à l'ordonnée 18, 41 à l'ordonnée 20, etc. jusqu'à 71 à l'ordonnée 35).