

Une formule de sommation sur les nombres premiers

A. P. Guinand

1945

1. Introduction

Il est connu depuis longtemps qu'il existe une connexion étroite entre les nombres premiers et les zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann,¹ mais la nature précise de cette connexion n'a pas été élucidée. Cependant, des relations sont connues² entre certaines sommes portant sur les nombres premiers et d'autres sommes portant sur les zéros de $\zeta(s)$.

Dans cet article, il est montré que, si l'hypothèse de Riemann est vraie, alors il existe une formule de sommation générale reliant des sommes des types ci-dessus. Sous des conditions appropriées sur $f(x)$, le résultat principal est

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\sum_{0 < m \log p < T} \frac{\log p}{p^{im}} f(m \log p) - \int_0^T f(t) e^{it} dt \right) - \frac{1}{2} \int_0^\infty f(t) \left(\frac{1}{t} - \frac{e^{-it}}{\sinh t} \right) dt \\ = -(2\pi)^i \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\sum_{0 < \gamma < T} g(\gamma) - \frac{1}{2\pi} \int_0^T g(t) \log \frac{t}{2\pi} dt \right), \end{aligned} \quad (1.1)$$

où³

$$g(x) = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \int_0^{+\infty} f(t) \cos xt \, dt,$$

p parcourt les nombres premiers, m les entiers positifs, et $\frac{1}{2} + i\gamma$ les zéros non triviaux⁴ de $\zeta(s)$.

Ce résultat ressemble à la formule de sommation de Poisson, et la méthode de démonstration utilisée ici a été initialement appliquée à cette dernière formule.⁵

Une expression est dérivée pour le reste dans la formule de Riemann-von Mangoldt⁶ pour $N(T)$, le nombre de zéros de $\zeta(s)$ dans $0 < \text{Im}(s) < T$.

Quelques exemples et applications de la formule de sommation (1.1) sont donnés dans la dernière section.

La vérité de l'hypothèse de Riemann est supposée dans tout l'article.

1. A. P. Guinand, *Annals of Math.* **42** (1941), 591-603.

2. E. Landau, *loc. cit.* chapitre xx.

3. $g(x) = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \int_0^{+\infty} f(t) \cos xt \, dt,$

4. § Voir la convention expliquée plus loin si des zéros multiples de $\zeta(s)$ se produisent.

5. A. P. Guinand, *Annals of Math.* **42** (1941), 591-603.

6. E. Landau, *loc. cit.* chapitre xx.

2. Une paire de transformées de Hankel

Considérons l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} (xt)^{1/2} J_{1/2}(xt) \left\{ N(t) - \left(\frac{t}{2\pi} \log \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2\pi} \right) \right\} \frac{dt}{t}. \quad (2.1)$$

Or

$$J_{1/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi z} \right)^{1/2} \left(\frac{\sin z}{z} - \cos z \right),$$

et donc

$$\left(\frac{x}{t} \right)^{1/2} J_{1/2}(xt) = - \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin xt}{xt} \right).$$

Aussi, par définition,

$$N(t) = \sum_{0 < \gamma < t} 1,$$

en utilisant la convention expliquée plus tôt si des zéros multiples de $\zeta(s)$ se produisent. Donc l'intégrale (2.1) peut s'écrire

$$- \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \int_0^{+\infty} \left\{ \sum_{0 < \gamma < t} 1 - \left(\frac{t}{2\pi} \log \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2\pi} \right) \right\} \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin xt}{xt} \right) dt.$$

Si nous écrivons maintenant γ_r pour distinguer la r -ième valeur de γ , cela devient

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\gamma_{N+1}} \left(\sum_{0 < \gamma_r < t} 1 - \left(\frac{t}{2\pi} \log \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2\pi} \right) \right) \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin xt}{xt} \right) dt \\ &= \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{r=1}^N \int_{\gamma_r}^{\gamma_{r+1}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin xt}{xt} \right) dt + \left[\frac{\sin xt}{xt} \left(\frac{t}{2\pi} \log \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2\pi} \right) \right]_0^{\gamma_{N+1}} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\gamma_{N+1}} \frac{\sin xt}{xt} \log \frac{t}{2\pi} dt \right) \\ &= \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \sum_{r=1}^N \frac{\sin x \gamma_r}{\gamma_r} - \frac{\sin x \gamma_{N+1}}{x \gamma_{N+1}} \left(N - \frac{\gamma_{N+1}}{2\pi} \log \frac{\gamma_{N+1}}{2\pi} + \frac{\gamma_{N+1}}{2\pi} \right) \right) \\ & \quad - \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2\pi} \right) \int_0^{+\infty} \frac{\sin xt}{xt} \log \frac{t}{2\pi} dt. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Or

$$\int_0^{+\infty} \sin u \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\pi, \quad \int_0^{+\infty} \sin u \log u \frac{du}{u} = -\frac{1}{2}\pi C,$$

où C est la constante d'Euler. Donc le terme intégral dans (2.2) est égal à

$$- \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2\pi x} \right) \int_0^{+\infty} \sin u (\log u - \log 2\pi x) \frac{du}{u} = \frac{1}{2x(2\pi)^{1/2}} (C + \log 2\pi x),$$

et (2.2) devient

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \sum_{r=1}^N \frac{\sin x \gamma_r}{\gamma_r} - \frac{\sin x \gamma_{N+1}}{x \gamma_{N+1}} \left(N - \frac{\gamma_{N+1}}{2\pi} \log \frac{\gamma_{N+1}}{2\pi} + \frac{\gamma_{N+1}}{2\pi} \right) \right) + \frac{1}{2x(2\pi)^{1/2}} (C + \log 2\pi x). \quad (2.3)$$

Or, ⁷ lorsque $t \rightarrow \infty$

$$N(t) - \left(\frac{t}{2\pi} \log \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2\pi} \right) = O(\log t). \quad (2.4)$$

Donc, lorsque $N \rightarrow \infty$

$$\frac{\sin x \gamma_{N+1}}{\gamma_{N+1}} \left(N - \frac{\gamma_{N+1}}{2\pi} \log \frac{\gamma_{N+1}}{2\pi} + \frac{\gamma_{N+1}}{2\pi} \right) = O\left(\frac{\log \gamma_{N+1}}{\gamma_{N+1}}\right)$$

et (2.3) devient

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{x}\right) \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\sin x \gamma_r}{\gamma_r} + \frac{1}{4}(C + \log 2\pi x) \right), \quad (2.5)$$

si cette série converge. Or il est connu que

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) n^{-s} - \frac{x^{1-s}}{1-s} - \sum_{q=1}^{\infty} \frac{x^{-2q-s}}{2q+s} + \sum_{\rho} \frac{x^{\rho-s}}{\rho-s} \quad (x > 1, s \neq 1, \rho, -2n), \quad (2.6)$$

où le prime indique que le terme $n = x$, s'il se produit, doit être divisé par deux, et ρ parcourt les zéros non triviaux de $\zeta(s)$. La série $\sum_{\rho}$ doit être interprétée comme

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left(\sum_{T < \text{Im}(\rho) < T} \right).$$

En posant $s = \frac{1}{2}$, $x = e^z$, et $\rho = \frac{1}{2} + i\gamma$, cela devient

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta'(\frac{1}{2})}{\zeta(\frac{1}{2})} &= \sum_{n \leq e^z} \Lambda(n) n^{-1/2} - 2e^{z/2} - \sum_{q=1}^{\infty} \frac{e^{-(2q+1/2)z}}{2q + \frac{1}{2}} + \sum_{\gamma} \frac{e^{i\gamma z}}{i\gamma} \\ &= \sum_{\log n \leq z} \Lambda(n) n^{-1/2} - 2e^{z/2} + 2e^{-z/2} - \frac{1}{2} \log \coth \frac{1}{2}z - \arctan e^{-z/2} + 2 \sum_{\gamma > 0} \frac{\sin \gamma z}{\gamma}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Donc la série dans (2.5) converge, et il s'ensuit que l'intégrale (2.1) existe. En utilisant la définition ⁸ de $\Lambda(n)$ nous obtenons

$$\sum_{\gamma > 0} \frac{\sin \gamma z}{\gamma} = -\frac{1}{2} \sum_{m \log p \leq z} \frac{\log p}{p^{1/2m}} + 2 \sinh \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} \log \coth \frac{1}{2}z + \frac{1}{2} \arctan e^{-z/2} - \frac{1}{4}C - \frac{1}{8}\pi - \frac{1}{4} \log 8\pi, \quad (2.7)$$

7. Voir, par exemple, E. C. Titchmarsh, *The Theory of Functions*, 2e éd., p. 318.

8. Voir, par exemple, E. C. Titchmarsh, *The Theory of Functions*, 2e éd., p. 318.

puisque⁹

$$\frac{\zeta'(\frac{1}{2})}{\zeta(\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}C + \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\log 8\pi.$$

En substituant (2.7) dans (2.5) nous obtenons

Théorème 1. *Si l'hypothèse de Riemann est vraie et $x > 0$, alors*

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} (xt)^{1/2} J_{1/2}(xt) \left\{ N(t) - \left(\frac{t}{2\pi} \log \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2\pi} \right) \right\} \frac{dt}{t} \\ &= -\frac{1}{x(2\pi)^{1/2}} \left\{ \sum_{0 < m \log p \leq x} \frac{\log p}{p^{1/2m}} - 4 \sinh \frac{1}{2}x \right\} \\ &+ \frac{1}{x(2\pi)^{1/2}} \left\{ \frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{2} \cosh \frac{1}{2}x \right) + \arctan e^{-x/2} - \frac{1}{4}\pi \right\}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Si nous posons

$$F(x) = \frac{1}{x} \left\{ N(x) - \left(\frac{x}{2\pi} \log \frac{x}{2\pi} - \frac{x}{2\pi} \right) \right\}, \quad (2.8)$$

et

$$\begin{aligned} G(x) &= -\frac{1}{x(2\pi)^{1/2}} \left\{ \sum_{0 < m \log p \leq x} \frac{\log p}{p^{1/2m}} - 4 \sinh \frac{1}{2}x \right\} \\ &+ \frac{1}{x(2\pi)^{1/2}} \left\{ \frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{2} \cosh \frac{1}{2}x \right) + \arctan e^{-x/2} - \frac{1}{4}\pi \right\}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

alors le théorème 1 implique que $G(x)$ est la transformée de Hankel¹⁰ d'ordre $\frac{3}{2}$ de $F(x)$.

Nous pouvons déduire la transformation inverse du théorème 1 en utilisant les lemmes suivants :

Lemme 2. *Si $F(x)$ appartient à $L^p(0, \infty)$ pour un certain p dans $1 < p \leq 2$, alors il existe une fonction $G(x)$ appartenant à $L^{p'}(0, \infty)$ pour $p' = p/(p-1)$, définie presque partout par*

$$G(x) = \text{l.i.m.}_{T \rightarrow \infty} \int_0^T (xt)^{1/2} J_{1/2}(xt) F(t) dt. \quad (2.10)$$

De plus

$$F(x) = \text{l.i.m.}_{T \rightarrow \infty} \int_0^T (xt)^{1/2} J_{1/2}(xt) G(t) dt,$$

et si $f(x), g(x)$ est une autre paire de telles transformées pour la même valeur de p , alors

$$\int_0^\infty f(x) G(x) dx = \int_0^\infty F(x) g(x) dx. \quad (2.11)$$

Lemme 3. *Si $F(x)$ appartient à $L^2(0, \infty)$ et est à variation bornée dans un voisinage de $x = y$, et $G(x)$ est définie par (2.10), alors*

$$\frac{1}{2} \{F(y+0) + F(y-0)\} = \int_0^{+\infty} (yt)^{1/2} J_1(yt) G(t) dt.$$

9. E. C. Titchmarsh, *The Theory of Functions*, 2e éd., p. 318.

10. Voir G. N. Watson, *Theory of Bessel Functions*, p. 453.

Or si $F(x)$ est définie par (2.8), alors il s'ensuit de (2.4) que $F(x)$ appartient à $L^p(0, \infty)$ pour tout $p > 1$, et les conditions des lemmes α et β sont remplies pour tout $y > 0$. Donc

$$\begin{aligned} & \frac{1}{y} \left[\frac{1}{2} \{N(y+0) + N(y-0)\} - \left(\frac{y}{2\pi} \log \frac{y}{2\pi} - \frac{y}{2\pi} \right) \right] \\ &= \int_0^{+\infty} (yt)^{1/2} J_1(yt) \left[-\frac{1}{t(2\pi)^{1/2}} \left\{ \sum_{0 < m \log p \leq t} \frac{\log p}{p^{1/2m}} - 4 \sinh \frac{1}{2}t \right\} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{t(2\pi)^{1/2}} \left\{ \frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{2}t \cosh \frac{1}{2}t \right) + \arctan e^{-t/2} - \frac{1}{2}\pi \right\} \right] dt. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Nous pouvons traiter la première partie de cette intégrale comme nous avons traité l'intégrale (2.1). La seconde partie de l'intégrale peut être évaluée par intégration par parties et l'utilisation d'intégrales connues. Nous obtenons :

Théorème 4. *Si l'hypothèse de Riemann est vraie et $T \geq 0$, alors*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{N(T+0) + N(T-0)\} - \left(\frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} \right) \\ &= -\frac{1}{\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=1}^N \Lambda(n) \frac{\sin(T \log n)}{n^{1/2} \log n} - \int_1^N \frac{\sin(T \log t)}{t^{1/2} \log t} dt \right. \\ & \quad \left. - \frac{\sin(T \log N)}{\log N} \left(\sum_{n=1}^N \Lambda(n) n^{-1/2} - 2N^{1/2} \right) \right] + \frac{1}{2\pi} \{ \text{am } \Gamma(\frac{1}{2} + iT) - T \log T + T \} \\ & \quad + \frac{1}{\pi} \arctan 2T - \frac{1}{4\pi} \arctan(\sinh \pi T), \end{aligned} \quad (2.12)$$

où $\text{am } \Gamma(\frac{1}{2} + iT)$ est définie en posant $\text{am } \Gamma(\frac{1}{2}) = 0$ et en prolongeant analytiquement le long de tout chemin ne rencontrant pas l'axe réel.

D'autres auteurs ont déjà remarqué qu'une connexion existe entre $N(T)$ et la première série dans (2.12), mais autant que je sache, aucune formule exacte de ce type pour $N(T)$ n'a été donnée auparavant.

Or il a été montré¹¹ que, si l'hypothèse de Riemann est vraie, alors lorsque $N \rightarrow \infty$

$$\sum_{n=1}^N \Lambda(n) - N = O(N^{1/2} \log^\alpha N) \quad (2.13)$$

est valable pour $\alpha = 2$, et aussi que l'expression de gauche est

$$\Omega \pm (N^{1/2} \log \log \log N).$$

Ces résultats sont les meilleurs de leur genre prouvés jusqu'à présent, donc il est encore possible que (2.13) puisse être valable pour un certain α dans $0 < \alpha < 2$.

11. Voir, par exemple, E. C. Titchmarsh, *The Theory of Functions*, 2e éd., p. 318.

Si nous posons $s = 0$ et $s = \frac{1}{2}$ successivement dans (2.6), alors nous pouvons montrer que

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{n=1}^N \Lambda(n) n^{-1/2} - 2N^{1/2} \right\} - N^{-1/2} \left(\sum_{n=1}^N \Lambda(n) - N \right) \\ &= - \sum_{\rho} N^{\rho-1/2} \left(\frac{1}{\rho - \frac{1}{2}} - \frac{1}{\rho} \right) + O(1) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\gamma} \frac{N^{i\gamma}}{i\gamma(\frac{1}{2} + i\gamma)} + O(1) \\ &= O(1), \end{aligned}$$

puisque $\sum \gamma^{-2}$ est absolument convergente.

Donc

$$\sum_{n=1}^N \Lambda(n) n^{-1/2} - 2N^{1/2} = O(\log^{\alpha} N). \quad (2.14)$$

Si cela est valable pour un certain $\alpha < 1$, alors dans le théorème 2

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sin(T \log N)}{\log N} \left(\sum_{n=1}^N \Lambda(n) n^{-1/2} - 2N^{1/2} \right) = 0,$$

donc ce terme pourrait être omis de (2.11).

3. La formule de sommation

Nous avons maintenant besoin des lemmes suivants : ¹²

Lemme 5. *Si $f(x)$ est une intégrale, tend vers zéro lorsque x tend vers l'infini, et $xf'(x)$ appartient à $L^p(0, \infty)$ pour un certain $p > 1$, alors $f(x)$ appartient à $L^p(0, \infty)$ et $x^{1/p}f(x)$ tend vers zéro lorsque x tend vers $+0$ ou vers l'infini.*

Lemme 6. *Si $f(x)$ satisfait aux conditions du lemme γ pour un certain p dans $1 < p \leq 2$, alors elle a une transformée en cosinus de Fourier $g(x)$ donnée pour tout x positif par*

$$g(x) = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \int_0^{+\infty} f(t) \cos xt \, dt.$$

$$f(x) = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \int_0^{\infty} g(t) \cos xt \, dt,$$

$g(x)$ est une intégrale, $g(x)$ et $xg'(x)$ appartiennent à $L^{p'}(0, \infty)$, $x^{1/p'}g(x)$ tend vers zéro lorsque x tend vers $+0$ ou vers l'infini, et $xf'(x)$, $xg'(x)$ est une paire de transformées de Hankel d'ordre $\frac{3}{2}$

12. Voir G. N. Watson, *Theory of Bessel Functions*, p. 453.

au sens du lemme α .

Or si $f(x)$ et $g(x)$ satisfont aux conditions du lemme δ et si $F(x)$ et $G(x)$ sont définies par (2.7) et (2.8), alors par (2.10)

$$\int_0^\infty x f'(x) G(x) dx = \int_0^\infty x g'(x) F(x) dx. \quad (3.1)$$

Le côté gauche de (3.1) est

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^\infty f'(x) \left\{ - \sum_{0 < m \log p < x} \frac{\log p}{p^{1/2m}} + 4 \sinh \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{2}x \coth \frac{1}{2}x \right) \right. \\ & \left. + \arctan e^{-x/2} - \frac{1}{2}\pi \right\} dx. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Or

$$\frac{1}{x} \left\{ \frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{2}x \coth \frac{1}{2}x \right) + \arctan e^{-x/2} - \frac{1}{2}\pi \right\} \quad (3.3)$$

appartient à $L^p(0, \infty)$ pour tout $p > 1$. Donc l'intégrale

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^\infty f'(x) \left\{ \frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{2}x \coth \frac{1}{2}x \right) + \arctan e^{-x/2} - \frac{1}{2}\pi \right\} dx \quad (3.3)$$

converge absolument. En intégrant par parties, les termes intégrés disparaissent par le lemme γ , et (3.3) devient

$$-\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^\infty f(x) \left(\frac{1}{2x} - \frac{\operatorname{cosech}^2 \frac{1}{2}x}{8 \coth \frac{1}{2}x} - \frac{\frac{1}{2}e^{-x/2}}{1 + e^{-x/2}} \right) dx = \frac{1}{2(2\pi)^{1/2}} \int_0^\infty f(x) \left(\frac{e^{x/2}}{\sinh x} - \frac{1}{x} \right) dx.$$

Les autres termes dans (3.2) sont

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^\infty f'(x) \left(\sum_{0 < m \log p < x} \frac{\log p}{p^{1/2m}} - 4 \sinh \frac{1}{2}x \right) dx \\ & = - \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\int_0^T f(x) \left(\sum_{0 < m \log p < x} \frac{\log p}{p^{1/2m}} - 4 \sinh \frac{1}{2}x \right) \right) \Big|_0^T \\ & \quad - \int_0^T f(x) d \left(\sum_{0 < m \log p < x} \frac{\log p}{p^{1/2m}} \right) + 2 \int_0^T f(x) \cosh \frac{1}{2}x dx \\ & = - \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \lim_{T \rightarrow \infty} \left(f(T) \left(\sum_{0 < m \log p < T} \frac{\log p}{p^{1/2m}} - 2e^{T/2} \right) \right. \\ & \quad \left. - \sum_{0 < m \log p < T} \frac{\log p}{p^{1/2m}} f(m \log p) + \int_0^T f(x) e^{x/2} dx \right) \\ & \quad - \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^\infty f(x) e^{-x/2} dx, \end{aligned}$$

puisque la dernière intégrale converge absolument. En ajoutant (3.4) et (3.5) nous trouvons que (3.2) est égal à

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{0 < m \log p < T} \frac{\log p}{p^{1/2m}} f(m \log p) - \int_0^T f(x) e^{x/2} dx \right. \\ \left. - f(T) \left(\sum_{0 < m \log p < T} \frac{\log p}{p^{1/2m}} - 2e^{T/2} \right) \right\} \\ - \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^\infty f(x) e^{-x/2} dx + \frac{1}{2(2\pi)^{1/2}} \int_0^\infty f(x) \left(\frac{e^{x/2}}{\sinh x} - \frac{1}{x} \right) dx. \end{aligned}$$

La somme des deux dernières intégrales est égale à

$$\frac{1}{2(2\pi)^{1/2}} \int_0^\infty f(x) \left(\frac{e^{-x/2}}{\sinh x} - \frac{1}{x} \right) dx.$$

Considérons maintenant le côté droit de (3.1). Il est égal à

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g'(x) \left\{ N(x) - \left(\frac{x}{2\pi} \log \frac{x}{2\pi} - \frac{x}{2\pi} \right) \right\} dx \\ = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \left[g(x) \left(N(x) - \frac{x}{2\pi} \log \frac{x}{2\pi} + \frac{x}{2\pi} \right) \right]_0^T - \int_0^T g(x) dN(x) \right. \\ \left. + \frac{1}{2\pi} \int_0^T g(x) \log \frac{x}{2\pi} dx \right\} \\ = - \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{0 < \gamma < T} g(\gamma) - \frac{1}{2\pi} \int_0^T g(x) \log \frac{x}{2\pi} dx \right\}, \end{aligned}$$

puisque les termes intégrés disparaissent par (2.4) et le lemme δ . Donc nous avons, au total :

Théorème 7. *Si (i) l'hypothèse de Riemann est vraie, (ii) $f(x)$ est une intégrale, tend vers zéro lorsque x tend vers l'infini, et $xf'(x)$ appartient à $L^p(0, \infty)$ pour un certain p dans $1 < p \leq 2$, et*

$$g(x) = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \int_0^\infty f(t) \cos xt dt,$$

alors

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{0 < m \log p < T} \frac{\log p}{p^{1/2m}} f(m \log p) - \int_0^T f(x) e^{x/2} dx \right. \\ \left. - f(T) \left(\sum_{0 < m \log p < T} \frac{\log p}{p^{1/2m}} - 2e^{T/2} \right) \right\} - \frac{1}{2} \int_0^\infty f(x) \left(\frac{1}{x} - \frac{e^{-x/2}}{\sinh x} \right) dx \\ = -(2\pi)^{1/2} \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{0 < \gamma < T} g(\gamma) - \frac{1}{2\pi} \int_0^T g(x) \log \frac{x}{2\pi} dx \right\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Nous pouvons simplifier ce résultat légèrement en faisant des hypothèses supplémentaires. Par le lemme γ et (2.14)

$$f(T) \left(\sum_{0 < m \log p < T} \frac{\log p}{p^{1/2m}} - 2e^{T/2} \right) = O(T^\alpha f(T)) = o(T^{\alpha-(1/p)}). \quad (3.7)$$

Donc :

Théorème 8. *Si, en plus des hypothèses du théorème 3, soit (2.13) est valable pour $\alpha = 1/p$, soit $T^\alpha f(T)$ tend vers zéro lorsque T tend vers l'infini, alors le terme (3.7) peut être omis de (3.6).*

De plus, si on le souhaite, le côté gauche de (3.6) peut être exprimé en termes de $\Lambda(n)$. En posant $x = \log t$, $U = e^T$ nous avons

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left(\sum_{0 < m \log p < T} \frac{\log p}{p^{1/2m}} f(m \log p) - \int_0^T f(x) e^{x/2} dx \right) = \lim_{U \rightarrow \infty} \left(\sum_{n < U} \frac{\Lambda(n)}{n^{1/2}} f(\log n) - \int_1^U f(\log t) \frac{dt}{t^{1/2}} \right).$$

4. Exemples et applications

De nombreux exemples de fonctions auxquelles la formule (3.6) est applicable peuvent être facilement trouvés, correspondant aux nombreuses applications connues de la formule de sommation de Poisson.¹³ Deux exemples choisis pour leur intérêt particulier sont donnés ici.

(A) Supposons $\frac{1}{2} < \operatorname{Re}(s) < 1$, et

$$f_1(x) = x^{-s}, \quad f_2(x) = x^{-s}.$$

Alors $f_1(x)$ satisfait aux conditions du théorème 3 pour $1 < p < 1/\operatorname{Re}(s)$, et $f_2(x)$ les satisfait pour $p = 2$. Donc le résultat (3.6) est valable pour les deux fonctions, et par addition il est aussi valable pour la fonction

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = x^{-s}.$$

Cela donne

$$\begin{aligned} g(x) &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} t^{-s} \cos xt \, dt \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \{\Gamma(1-s) \sin \frac{1}{2}\pi s\} x^{s-1}. \end{aligned}$$

Aussi si nous écrivons pour l'intégrale infinie dans (3.6)

$$I(s) = \frac{1}{2} \int_0^\infty x^{-s} \left(\frac{1}{x} - \frac{e^{-x/2}}{\sinh x} \right) dx,$$

alors ceci définit une fonction analytique de s pour $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$, et dans cette bande

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^{-s} \left(\frac{1}{x} - \frac{e^{-x/2}}{\sinh x} \right) dx + \frac{1}{2} \int_1^\infty x^{-1-s} dx - \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{x^{-s} e^{-x/2}}{\sinh x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^{-s} \left(\frac{1}{x} - \frac{e^{-x/2}}{\sinh x} \right) dx + \frac{1}{2s} - \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{x^{-s} e^{-x/2}}{\sinh x} dx. \end{aligned}$$

13. Voir, par exemple, E. C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, chapitre 3.

Ceci définit le prolongement analytique de $I(s)$ pour $\text{Re}(s) < 0$, où il est

$$\begin{aligned}
I(s) &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^{-s-1} dx + \frac{1}{2s} - \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{x^{-s} e^{-x/2}}{\sinh x} dx \\
&= - \int_0^\infty \frac{x^{-s} e^{-x/2}}{e^x - e^{-x}} dx \\
&= - \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty x^{-s} e^{-(2n+1)x} dx \\
&= -\Gamma(1-s) \sum_{n=0}^\infty (2n+1)^{s-1} \\
&= -2^{1-s} \Gamma(1-s) \sum_{n=1}^\infty (4n+1)^{s-1}.
\end{aligned}$$

Or, si nous écrivons

$$\eta(s) = 1^{-s} - 3^{-s} + 5^{-s} - \dots \quad \{\text{Re}(s) > 1\} = \sum_{n=0}^\infty (4n+1)^{-s} - \sum_{n=0}^\infty (4n+3)^{-s},$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^\infty (4n+1)^{-s} &= \frac{1}{2} \eta(s) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^\infty (4n+1)^{-s} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^\infty (4n+3)^{-s} - 1 \\
&= \frac{1}{2} \eta(s) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^\infty (2n+1)^{-s} - 1 \\
&= \frac{1}{2} \eta(s) + \frac{1}{2} (1 - 2^{-s}) \zeta(s) - 1.
\end{aligned}$$

$$\text{Donc } I(s) = \Gamma(1-s) \left\{ 2^{1-s} - 2^{-s} \eta(1-s) - \left(2^{-s} - \frac{1}{2} \right) \zeta(1-s) \right\}.$$

Si (2.13) est valable pour un certain $\alpha < \text{Re}(s)$, alors (3.6) donne

$$\begin{aligned}
\lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{0 < m \log p < T} \frac{\log p}{p^{1/2m}} (m \log p)^{-s} - \int_0^T x^{-s} e^{x/2} dx \right\} &= \Gamma(1-s) \left\{ 2^{1-s} - 2^{-s} \eta(1-s) - \left(2^{-s} - \frac{1}{2} \right) \zeta(1-s) \right\} \\
&= -2\Gamma(1-s) \sin \frac{1}{2} \pi s \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\sum_{0 < \gamma < T} \gamma^{s-1} - \frac{T^s}{2\pi s} \log \frac{T}{2\pi} + \frac{T^s}{2\pi s^2} \right).
\end{aligned}$$

(B) Posons $y > 0$ et

$$f(x) = \begin{cases} \cos yx - \cos yX, & 0 < x < X, \\ 0, & x > X. \end{cases}$$

Les conditions du théorème 3' sont satisfaites, et

$$g(x) = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{y}{x(y^2 - x^2)} (x \sin yX \cos xX - y \cos yX \sin xX)$$

si $x \neq y$. Si $x = y$ alors cela devient

$$g(y) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \left(X - \frac{\sin 2yX}{2y} \right). \quad (4.1)$$

En substituant ceci dans (3.6) nous obtenons

$$\begin{aligned} & \sum_{0 < m \log p < X} \frac{\log p}{p^{1/2m}} \{ \cos(y m \log p) - \cos yX \} \\ & \quad - \int_0^X (\cos yx - \cos yX) e^{x/2} dx \\ & \quad - \frac{1}{2} \int_0^X (\cos yx - \cos yX) \left(\frac{1}{x} - \frac{e^{-x/2}}{\sinh x} \right) dx \\ & = -2 \sum_{\gamma > 0} \frac{y}{\gamma(y^2 - \gamma^2)} (\gamma \sin yX \cos \gamma X - y \cos yX \sin \gamma X) \\ & \quad + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{y}{x(y^2 - x^2)} (x \sin yX \cos xX - y \cos yX \sin xX) \log \frac{x}{2\pi} dx, \end{aligned} \quad (1)$$

où le terme $\gamma = y$, s'il se produit, doit être interprété comme dans (4.1).

Maintenant, laissons X tendre vers l'infini. Pour y fixé

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^X (\cos yx - \cos yX) \left(\frac{1}{x} - \frac{e^{-x/2}}{\sinh x} \right) dx = O(1) - \frac{1}{2} \cos yX \int_1^X \frac{dx}{x} \\ & = O(1) - \frac{1}{2} \cos yX \log X. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Aussi

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{\gamma > 0, \gamma \neq y} \frac{y}{\gamma(y^2 - \gamma^2)} (\gamma \sin yX \cos \gamma X - y \cos yX \sin \gamma X) \right| \\ & \leq \sum_{\gamma > 0, \gamma \neq y} \frac{y(\gamma + y)}{y^2 - \gamma^2} = y \sum_{\gamma > 0, \gamma \neq y} \frac{1}{\gamma|y - \gamma|} \\ & = O(1), \end{aligned} \quad (4.2)$$

puisque cette dernière série converge.¹⁴ Le terme $\gamma = y$, s'il se produit, donne un terme

$$-X + \frac{\sin 2yX}{2y} = -X + O(1).$$

14. Voir, par exemple, E. C. Titchmarsh, *The Theory of Functions*, 2e éd., p. 318.

De plus

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{y}{x(y^2 - x^2)} (x \sin yX \cos xX - y \cos yX \sin xX) \log \frac{x}{2\pi} dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{y}{x(y^2 - x^2)} \{ (x - y) \cos yX \sin xX - x \sin(x - y)X \} \log \frac{x}{2\pi} dx \\
&= -\frac{1}{\pi} y \cos yX \int_0^\infty \frac{\sin xX}{x(y + x)} \log \frac{x}{2\pi} dx + \frac{1}{\pi} y \int_0^\infty \frac{\sin(x - y)X}{(x^2 - y^2)} \log \frac{x}{2\pi} dx \\
&= \frac{1}{\pi} \cos yX \int_0^\infty \frac{\sin xX}{y + x} \log \frac{x}{2\pi} dx - \frac{1}{\pi} \cos yX \int_0^\infty \frac{\sin xX}{x} \log \frac{x}{2\pi} dx \\
&\quad + \frac{1}{\pi} y \int_0^\infty \frac{\sin(x - y)X}{x^2 - y^2} \log \frac{x}{2\pi} dx.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Par le théorème de l'intégrale simple de Fourier¹⁵ la première de ces intégrales tend vers zéro lorsque X tend vers l'infini, et la dernière tend vers

$$\frac{1}{\pi} \log(y/2\pi) = O(1).$$

Il reste dans (4.3)

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\pi} \cos yX \int_0^\infty \frac{\sin xX}{x} \log \frac{x}{2\pi} dx = -\frac{1}{\pi} \cos yX \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} \log \left(\frac{t}{2\pi X} \right) dt \\
&= -\frac{1}{2} \cos yX (C + \log 2\pi X) \\
&= O(1) + \frac{1}{2} \cos yX \log X.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Donc (4.2) devient

$$\begin{aligned}
& \sum_{0 < m \log p < X} \frac{\log p}{p^{1/2m}} \{ \cos(y m \log p) - \cos yX \} - \int_0^X (\cos yx - \cos yX) e^{x/2} dx \\
&= \begin{cases} -X + O(1) & (y = \gamma), \\ O(1) & (y \neq \gamma). \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc nous avons :

Théorème 9. *Si l'hypothèse de Riemann est vraie, alors lorsque X tend vers l'infini*

$$\begin{aligned}
& \sum_{0 < m \log p < X} \frac{\log p}{p^{1/2m}} \cos(y m \log p) - \frac{e^{X/2}}{\frac{1}{4} + y^2} \left(\frac{1}{2} \cos yX + y \sin yX \right) \\
&\quad - \cos yX \left\{ \sum_{0 < m \log p < X} \frac{\log p}{p^{1/2m}} - 2e^{X/2} \right\} \\
&= \begin{cases} -X + O(1) & (y = \gamma), \\ O(1) & (y \neq \gamma). \end{cases}
\end{aligned}$$

15. Voir, par exemple, E. C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, chapitre 3.

Inversement, si nous intervertissons $f(x)$ et $g(x)$ nous pouvons prouver :

Théorème 10. *Si l'hypothèse de Riemann est vraie, alors lorsque X tend vers l'infini*

$$\sum_{0 < \gamma < X} \cos(\gamma y) - \frac{X}{2\pi} \log \frac{X}{2\pi} \cos yX + \frac{X}{2\pi} \cos yX - \frac{1}{2\pi} \sin yX = O(1).$$

Cependant, ce résultat est une conséquence simple du résultat connu ¹⁶ pour $x > 1$

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) - x = O(x^{1/2} \log^2 x).$$

NEW COLLEGE
OXFORD

16. Voir, par exemple, E. C. Titchmarsh, *The Theory of Functions*, 2e éd., p. 318.