

On cherche des formules les plus simples possible pour calculer les valeurs des variables du tableau :

$n$	$\pi(n)$	$\Delta(n)$	$S(n)$	$C(n)$	$R(n)$	$n$	$\pi(n)$	$\Delta(n)$	$S(n)$	$C(n)$	$R(n)$	$n$	$\pi(n)$	$\Delta(n)$	$S(n)$	$C(n)$	$R(n)$
1	0	0	0	0	0	34	11	2	60	58	37	67	19	0	161	161	114
2	1	0	0	0	0	35	11	2	62	60	38	68	19	4	165	161	114
3	2	0	0	0	0	36	11	7	69	62	39	69	19	2	167	165	117
4	2	1	0	-1	0	37	12	0	69	69	45	70	19	6	173	167	118
5	3	0	1	1	0	38	12	2	71	69	45	71	20	0	173	173	123
6	3	2	3	1	0	39	12	2	73	71	46	72	20	10	183	173	123
7	4	0	3	3	1	40	12	6	79	73	47	73	21	0	183	183	132
8	4	2	5	3	1	41	13	0	79	79	52	74	21	2	185	183	132
9	4	1	6	5	2	42	13	6	85	79	52	75	21	4	189	185	133
10	4	2	8	6	2	43	14	0	85	85	57	76	21	4	193	189	136
11	5	0	8	8	3	44	14	4	89	85	57	77	21	2	195	193	139
12	5	4	12	8	3	45	14	4	93	89	60	78	21	6	201	195	140
13	6	0	12	12	6	46	14	2	95	93	63	79	22	0	201	201	145
14	6	2	14	12	6	47	15	0	95	95	64	80	22	8	209	201	145
15	6	2	16	14	7	48	15	8	103	95	64	81	22	3	212	209	152
16	6	3	19	16	18	49	15	1	104	103	71	82	22	2	214	212	154
17	7	0	19	19	10	50	15	4	108	104	71	83	23	0	214	214	155
18	7	4	23	19	10	51	15	2	110	108	74	84	23	10	224	214	155
19	8	0	23	23	13	52	15	4	114	110	75	85	23	2	226	224	164
20	8	4	27	23	13	53	16	0	114	114	78	86	23	2	228	226	165
21	8	2	29	27	16	54	16	6	120	114	78	87	23	2	230	228	166
22	8	2	31	29	17	55	16	2	122	120	83	88	23	6	236	230	167
23	9	0	31	31	18	56	16	6	128	122	84	89	24	0	236	236	172
24	9	6	37	31	18	57	16	2	130	128	89	90	24	10	246	236	172
25	9	1	38	37	23	58	16	2	132	130	90	91	24	2	248	246	181
26	9	2	40	38	23	59	17	0	132	132	91	92	24	4	252	248	182
27	9	2	42	40	24	60	17	10	142	132	91	93	24	2	254	252	185
28	9	4	46	42	25	61	18	0	142	142	100	94	24	2	258	254	186
29	10	0	46	46	28	62	18	2	144	142	100	95	24	2	258	256	187
30	10	6	52	46	28	63	18	4	148	144	101	96	24	10	268	258	188
31	11	0	52	52	33	64	18	5	153	148	104	97	25	0	268	268	197
32	11	4	56	52	33	65	18	2	155	153	108	98	25	4	272	268	197
33	11	2	58	56	36	66	18	6	161	155	109	99	25	4	276	272	200
												100	25	7	283	276	203

On a :

- $S(n) = \sum_{i=2}^{n-3} \left( \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor - 1 \right)$  ;
  - $\Delta(n) = \#\{d < n \text{ tel que } d \mid n\}$  ; dans l'article A032741<sup>1</sup> de l'OEIS (Open Encyclopedia of Integer Sequences), il est indiqué que  $\Delta(n)$  est le nombre de facteurs du nième polynôme de Fibonacci ou que  $\Delta(n+1)$  est le nombre de facteurs du polynôme du nième degré  $x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \dots$  ;
  - $C(n)$  est le nombre de produits d'entiers  $ij$  strictement inférieurs à  $n$ , pour  $i$  et  $j$  variant de 2 à  $n-2$ , diminué de 1 ;
  - on impose un ordre total lexicographique sur les produits de deux entiers :  $ab$  est avant  $a'b'$  selon cet ordre si et seulement si ( $a < a'$ ) ou ( $a = a'$  et  $b < b'$ ).
- $R(n)$  (pour nombre de redondances) est le nombre de produits d'entiers  $i'j'$  strictement inférieurs à  $n$ , pour  $i'$  et  $j'$  variant de 2 à  $n-2$  tels qu'il existe un produit de même valeur  $ij$  avec  $(i, j)$  qui est antérieur à  $(i', j')$  selon l'ordre lexicographique : on ne garde qu'un représentant par classe de produits de deux entiers de même valeur ;
- $C(n) = S(n) - \Delta(n)$  ;

<sup>1</sup>séquence à démarrer à 2.

- $\pi(n) = n - S(n) + \Delta(n) + R(n) - 2 = n - C(n) + R(n) - 2$  ;
- $C(n+1) = S(n)$  pour  $n \geq 5$ .

*Exemple :*

$C(10) = 6$  car 6 est le nombre de produits de la liste ci-dessous strictement inférieurs à 10 (on les a notés en rouge).

$2 \times 2$	$2 \times 3$	$2 \times 4$	$2 \times 5$	$2 \times 6$	$2 \times 7$	$2 \times 8$
$3 \times 2$	$3 \times 3$	$3 \times 4$	$3 \times 5$	$3 \times 6$	$3 \times 7$	$3 \times 8$
$4 \times 2$	$4 \times 3$	$4 \times 4$	$4 \times 5$	$4 \times 6$	$4 \times 7$	$4 \times 8$
$5 \times 2$	$5 \times 3$	$5 \times 4$	$5 \times 5$	$5 \times 6$	$5 \times 7$	$5 \times 8$
$6 \times 2$	$6 \times 3$	$6 \times 4$	$6 \times 5$	$6 \times 6$	$6 \times 7$	$6 \times 8$
$7 \times 2$	$7 \times 3$	$7 \times 4$	$7 \times 5$	$7 \times 6$	$7 \times 7$	$7 \times 8$
$8 \times 2$	$8 \times 3$	$8 \times 4$	$8 \times 5$	$8 \times 6$	$8 \times 7$	$8 \times 8$

$R(10) = 2$  car  $3 \times 2 = 2 \times 3$  et  $4 \times 2 = 2 \times 4$  : on dénombre 2 produits redondants. L'ordre lexicographique dont il a été question plus haut est ici l'ordre de lecture habituel, de gauche à droite puis de bas en haut.