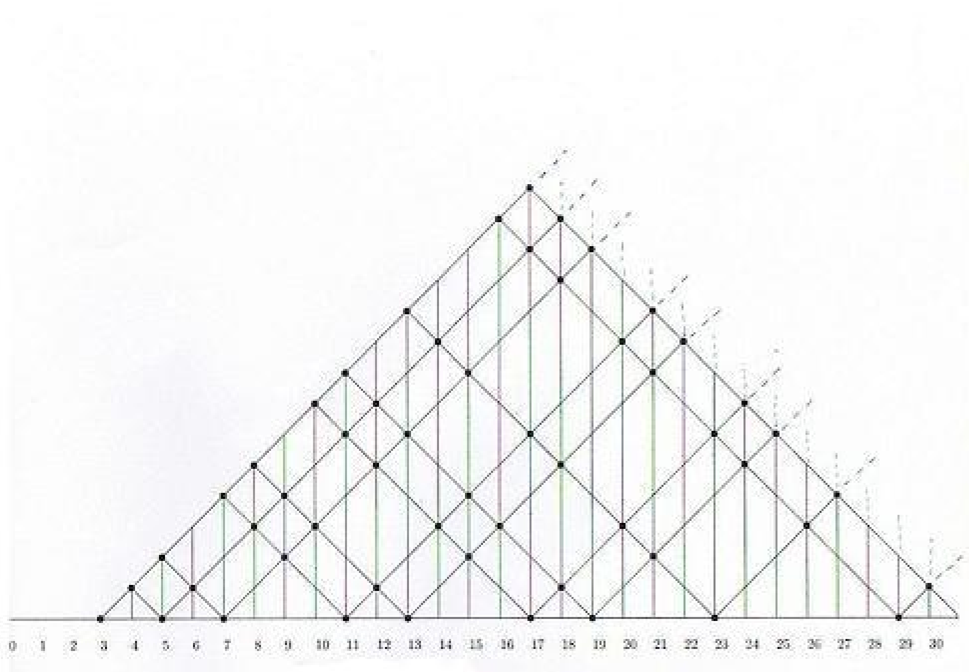
1 Introduction

La conjecture de Goldbach (1742) énonce que tout nombre pair $2x$ supérieur ou égal à 4 est la somme de deux nombres premiers.

2 Représentation géométrique des décompositions



Le graphique ci-dessus permet la visualisation simultanée de toutes les décompositions Goldbach des nombres pairs successifs. A chaque nombre premier sont associées deux droites de pentes 45° et 135°. A chaque abscisse est associée une verticale. Lorsqu'il y a croisement de trois droites (la verticale associée à x et deux diagonales), on est "sur une" décomposition Goldbach de $2x$. Les croisements sur l'axe des abscisses sont dûs au fait que tout nombre premier, étant trivialement la moitié de son double, les nombres pairs double de nombres premiers vérifient la conjecture.

Le fait de passer d'un point du graphique au point qui en est immédiatement au nord-est ou bien immédiatement au sud-est correspond au fait qu'on est passé d'une décomposition Goldbach de $2n$ à une décomposition de $2n+2$ et que l'un des deux nombres premiers intervenant dans la décomposition de $2n$ avait un jumeau.

3 Coordonnées des points des différentes sortes de droites

On peut considérer que tous les points du graphique sont des points à 3 coordonnées :

- la première coordonnée correspond au nombre impair associé à la diagonale ascendante à laquelle appartient le point (on considère que 3 est l'impair de rang 1, 5 est celui de rang 2, etc) ;
- la deuxième coordonnée correspond au nombre impair associé à la diagonale descendante à laquelle appartient le point (nota : même remarque sur le rang des impairs),
- la troisième coordonnée correspond au "rang" du nombre pair considéré (6 est le nombre pair de rang 1 qui nous intéresse, 8 celui de rang 2, 10 celui de rang 3, etc).

Tous les points ont leur triplet de coordonnées qui est de la forme $(i, j, i+j-1)$. Une diagonale ascendante contient des points qui ont tous la même première coordonnée. Une diagonale descendante contient des points qui ont tous la même deuxième coordonnée. Une verticale contient des points qui ont tous la même troisième coordonnée.
Seules sont décompositions de Goldbach d'un nombre pair les sommes de deux nombres premiers. On doit donc éliminer dans le graphique tous les points qui sont associés à un nombre composé - que celui-ci soit le premier sommant (première coordonnée, diagonale ascendante) ou le deuxième sommant (deuxième coordonnée, diagonale descendante)[1].
Pour éliminer les points correspondant au nombre composé 9 par exemple, on élimine les points de la diagonale descendante de 9 et ceux de la diagonale ascendante de 9. En l'occurrence, on éliminera tous les points qui ont 4 comme première coordonnée, ainsi que tous ceux qui ont 4 comme deuxième coordonnée. Cela équivaut à exclure de notre espace de points deux plans d'équations respectives $\{x = 4\}$ et $\{y = 4\}$.
En éliminant les points de ces deux plans, on espère qu'un point est conservé dans chacun des plans verticaux, fournissant une décomposition pour chaque nombre pair. En fait, ceci n'est pas tout à fait le cas : on voit par exemple qu'en considérant le triangle qui traite des nombres premiers jusqu'à 29, la verticale de 22 ne contient plus aucun point. Cependant, dans la moitié gauche du triangle isocèle, il semblerait qu'on ne risque pas d'éliminer tous les points de chaque plan. Il s'agit de bien comprendre pourquoi, puis peut-être de mettre au point une démonstration par récurrence.

[1]Il est amusant de visualiser la chose en considérant qu'éliminer un nombre composé consiste à envoyer une boule de billard selon une diagonale descendante depuis le point sur le côté en haut à gauche du triangle isocèle, faire rebondir la boule de billard sur la base du triangle isocèle, et lui faire alors emprunter la diagonale ascendante vers le côté en haut à droite du triangle isocèle.

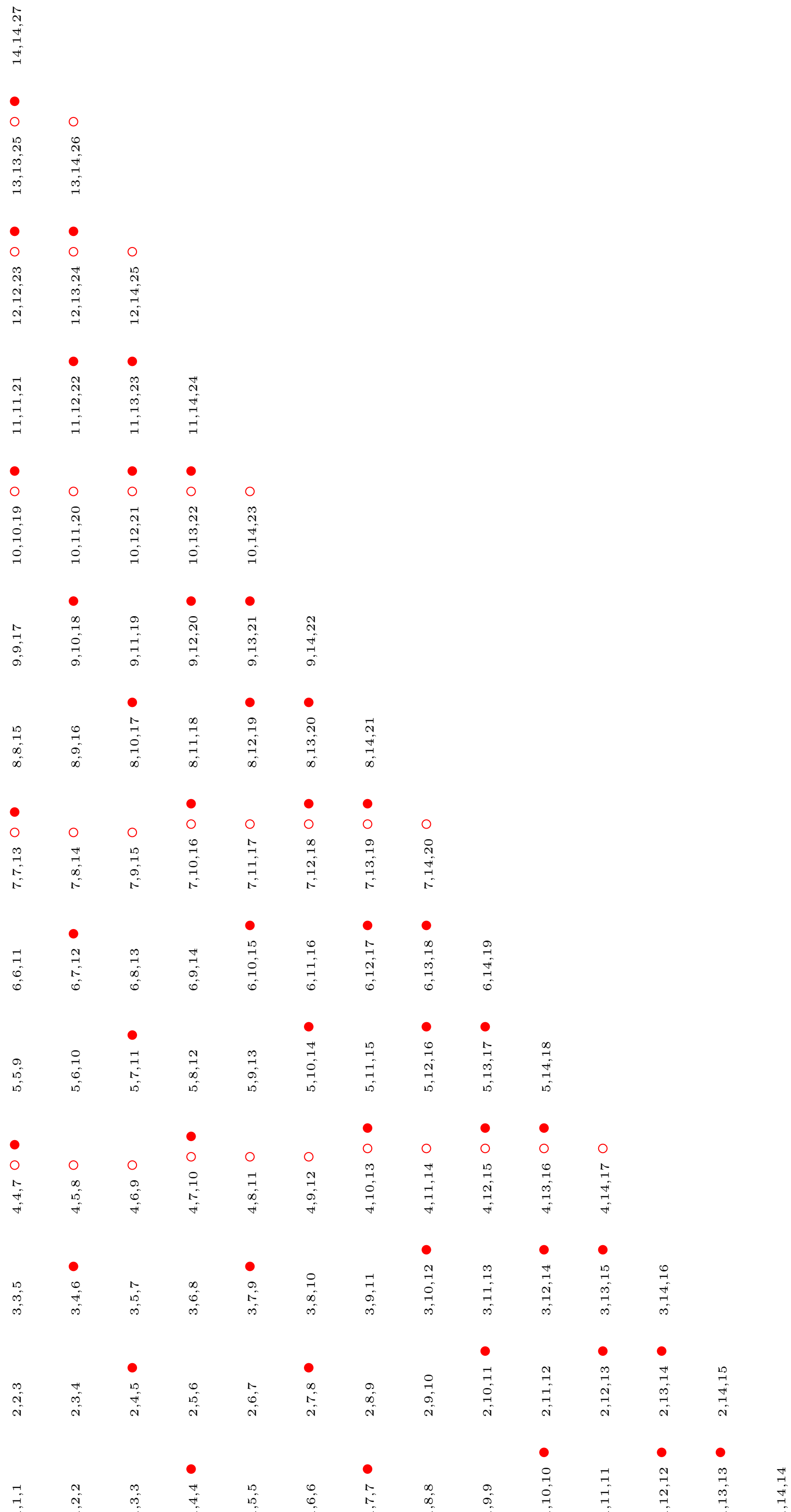
4 Elimination des sommes dont l'un des sommants est composé : traitement d'un exemple

Dans le tableau de la page suivante, on constate que le nombre de points enlevés à cause d'un nombre composé est toujours le même, si on ne se préoccupe pas des doublons : en l'occurrence 15, la moitié de $29+1=30$ si 29 est le dernier nombre premier du triangle considéré. On constate que ce nombre est également le nombre des doublons.
On constate que dans chaque plan de la troisième coordonnée z, pour z inférieur ou égal à 14 (14 étant la taille du triangle), on enlève dans chaque plan moins d'éléments qu'il n'y en a.
Chaque plan contient $\lceil \frac{i}{2} \rceil$ points pour un triangle donné. Fournissons dans le tableau suivant le nombre de points du plan et le nombre de points enlevés pour un z donné :

z	*nb points du plan*	*nb points enlevés*
1	1	0
2	1	0
3	2	0
4	2	1
5	3	1
6	3	1
7	4	2
8	4	2
9	5	2
10	5	2
11	6	3
12	6	4
13	7	4
14	7	5
15	7	4
16	6	3
17	6	5
18	5	3
19	5	3
20	4	4
21	4	2
22	3	2
23	3	3
24	2	1
25	2	2
26	1	1
27	1	0

Par contre, il peut arriver qu'on enlève tous les points d'un plan pour $z > 14$, par exemple ici pour les plans $\{z=20\}, \{z=23\}, \{z=25\}, \{z=26\}$. Quand on augmente de 1 la taille du triangle isocèle lorsqu'on ajoute un nombre premier, on est sûr d'ajouter 1 au nombre de plans qui contiennent au moins un point, et le plan ajouté est le successeur du dernier plan qu'on avait alors. Les points supprimés viennent d'être ajoutés. Le solde des décompositions de Goldbach est strictement positif en quelque sorte (si on est en train d'ajouter le plan $z=29$, on a un solde net de $\Pi(29)-1$ décompositions de Goldbach sur les $\frac{29-1}{2}$ points qui ont été ajoutés au triangle). Quand on augmente de 1 la taille du triangle isocèle alors qu'on ajoute un nombre composé, tout point ajouté ne pouvant être décomposition de Goldbach, le solde des décompositions de Goldbach est nul.

Le problème que je n'arrive pas du tout à résoudre est celui du prolongement d'une verticale ne contenant aucune décomposition de Goldbach (celle de $z=20$ déjà citée par exemple). Dans les faits, son plan va être satisfait par un nombre premier ultérieur 31 (point de coordonnées $(6,15,20)$ pour le nombre pair 22) mais ne pourrait-on pas imaginer que l'ajout successif de multiples nombres composés (on sait seulement par le postulat de Bertrand qu'un nombre premier est toujours strictement inférieur au double du nombre premier précédent) laisse la ligne vide dans le même état jusqu'à ce qu'elle atteigne le haut du triangle, ce qui correspondrait à un entier sans décomposition de Goldbach ?


1,1,1
2,2,3
3,3,5
4,4,7
5,5,9
6,6,11
7,7,13
8,8,15
9,9,17
10,10,19
11,11,21
12,12,23
13,13,25
14,14,27
1,2,2
2,3,4
3,4,6
4,5,8
5,6,10
6,7,12
7,8,14
8,9,16
9,10,18
10,11,20
11,12,22
12,13,24
13,14,26
1,3,3
2,4,5
3,5,7
4,6,9
5,7,11
6,8,13
7,9,15
8,10,17
9,11,19
10,12,21
11,13,23
12,14,25
1,4,4
2,5,6
3,6,8
4,7,10
5,8,12
6,9,14
7,10,16
8,11,18
9,12,20
10,13,22
11,14,24
1,5,5
2,6,7
3,7,9
4,8,11
5,9,13
6,10,15
7,11,17
8,12,19
9,13,21
10,14,23
1,6,6
2,7,8
3,8,10
4,9,12
5,10,14
6,11,16
7,12,18
8,13,20
9,14,22
1,7,7
2,8,9
3,9,11
4,10,13
5,11,15
6,12,17
7,13,19
8,14,21
1,8,8
2,9,10
3,10,12
4,11,14
5,12,16
6,13,18
7,14,20
1,9,9
2,10,11
3,11,13
4,12,15
5,13,17
6,14,19
1,10,10
2,11,12
3,12,14
4,13,16
5,14,18
1,11,11
2,12,13
3,13,15
4,14,17
1,12,12
2,13,14
3,14,16
1,13,13
2,14,15
1,14,14

Annexe : Dessin du tissage Goldbach de Wardley

J'ai découvert le graphique de représentation simultanée de toutes les décompositions de Goldbach en septembre 2005. Des recherches sur la toile m'ont amenée au site de Andy Wardley, un anglais qui avait abouti à un schéma similaire, consultable sur la toile (http ://wardley.org/misc/goldbach.html). Est fourni ici un extrait du graphique de Wardley, pour des abscisses allant jusqu'à 143, composé car divisible par 11. Noter la succession de 5 nombres composés consécutifs de 115 à 125.