

La conjecture de Goldbach binaire stipule que tout nombre pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers. La démonstration proposée ici utilise des concepts de la théorie des topos. Colin McLarty, dans une conférence du cycle Lectures Grothendieckiennes, parle de la notion d’“espace étalé” (cf. Annexe 1). Goldblatt, dans *Topoi, the categorical analysis of logic*, fournit un dessin très éclairant pour cette notion (cf. Annexe 2). On trouve la définition des mots *fibre* et *germe* dans l’article de Wikipedia consacré aux *faisceaux* (cf. Annexe 3). L’article wikipedia renvoie à la définition première (en mathématique) du mot *fibre*, qu’on trouve à la page 25 du premier volume I des *Éléments de Géométrie Algébrique (EGA I)* d’Alexander Grothendieck ([1], cf. Annexe 4).

L’étude de la conjecture de Goldbach fait appréhender que les décomposants de Goldbach d’un nombre pair n , qui sont compris entre la racine carrée de n et la moitié de n , sont à trouver dans l’intersection des ensembles de nombres qui ne sont ni congrus à 0, ni congrus à n selon tout module premier p_k compris entre 3 et la racine carrée de n . On prend comme borne inférieure de l’intervalle à considérer 3 plutôt que 2, parce que, pour alléger la formulation, on choisit d’oublier tous les nombres pairs comme décomposants de Goldbach potentiels de n .

Selon chaque module premier p_k , la modélisation nécessite seulement trois fibres et trois germes : la fibre qui relie l’ensemble des nombres divisibles par p_k au germe 0_{p_k} , la fibre qui relie l’ensemble des nombres congrus à n (*modulo* p_k) au germe n_{p_k} , et la fibre qui relie l’ensemble de tous les nombres impairs compris entre 3 et $\frac{n}{2}$, que l’on appellera *ensemble des nombres restant* (i.e. qui sont passés à travers ce double-crible de n’être ni congrus à 0 ni congrus à n modulo p_k), une troisième fibre donc, qui lie l’*ensemble des nombres restant* à un germe qu’on notera $\neg 0_{p_k} \wedge \neg n_{p_k}$ (on peut aussi appeler ce dernier ensemble l’ensemble des “ni 0 ni n selon p_k ”).

Il s’agit de démontrer que l’intersection de tous les *ensembles de nombres restant* selon chacun des modules premiers p_k compris entre 3 et \sqrt{n} est non vide.

Supposons que l’intersection des *ensembles de nombres restant selon chacun des modules* p_k est vide.

Alors, cela implique la nécessité que les ensembles de nombres en question (les *ensembles de nombres restant*) soient des ensembles disjoints. Ceci est faux : ce qui était cru à tort et utilisé, c’était “des ensembles disjoints 2 à 2” (ce qui aurait permis d’ajouter tous les cardinaux), alors qu’on peut très bien avoir une intersection globale vide sans avoir disjonction des ensembles 2 à 2.

Si tous ces ensembles sont disjoints, on obtient le cardinal de leur union, qui est alors une union disjointe, comme somme des cardinaux de chacun de ces ensembles. Or le cardinal de chacun des ensembles pris séparément est simple à calculer : il est de la forme $\left\lceil \frac{n}{2p_k} \right\rceil$ pour chacun des modules premiers p_k (compris entre 3 et \sqrt{n})*. Le problème est qu’on ne connaît pas la valeur des p_k successifs.

Alors, pour calculer ce cardinal de l’union disjointe, on va se placer dans le cas limite, c’est-à-dire qu’on va supposer (ce qui n’est bien sûr pas le cas) que les nombres premiers sont très écartés les uns des autres : on va considérer que chacun des nombres premiers successifs p_k est juste inférieur au double du nombre premier précédent p_{k-1} . C’est le résultat le plus lâche dont on dispose, appelé *postulat de Bertrand* et démontré par Tchebychev (énonçable simplement par la formule “il y a toujours un nombre premier entre un nombre et son double.”). Si les nombres premiers étaient ainsi écartés au maximum, on aurait pour chaque nombre premier “précédent” p_{k-1} un cardinal de l’*ensemble des nombres restant modulo* p_{k-1} qui serait environ moitié moins grand que le cardinal de l’*ensemble des nombres restant* pour le nombre premier “suivant” p_k . On va donc considérer en premier le cardinal de l’*ensemble de nombres restant* pour le nombre premier p_{max} , qui est le nom par lequel on désigne le plus grand nombre premier inférieur à la racine carrée de n . Ce cardinal est égal à $\left\lceil \frac{n}{2 p_{max}} \right\rceil$. Et on imagine que les *ensembles des nombres restant* pour

*. On peut compter les nombres des différents ensembles pour le cas $n = 98$ en annexe 6 pour s’en convaincre.

les nombres premiers successifs (du plus grand au plus petit) inférieurs à p_{max} sont chacun de taille moitié moindre que celle de l'ensemble des nombres restant pour le nombre premier suivant dans la succession.

Dans ce cas imaginaire et très laxiste, on aurait ainsi la somme des cardinaux des ensembles disjoints qui serait égale à :

$$\left\lceil \frac{n}{2^{p_{max}}} \right\rceil \left(1 + \sum_{i=1}^{\pi(n/2)-1} \frac{1}{2^i} \right) = \left\lceil \frac{n}{2^{p_{max}}} \right\rceil \left(1 + \left(1 - \frac{1}{2^{\pi(n/2)-1}} \right) \right).$$

Ce résultat provient du fait que la somme des inverses des puissances de 2, de la première puissance, égale à 2, jusqu'à la $k^{\text{ième}}$ puissance, égale à 2^k , est égale à $1 - \frac{1}{2^k}$ (cf. Annexe 5).

Il faudrait reprendre tout le raisonnement ci-dessus qui est faux, peut-être en raisonnant sur deux paquets d'ensembles et en établissant la contradiction sur les cardinaux des deux paquets d'ensembles en question, je ne sais pas, ça semble infaisable sans considérer tous les ensembles.

Ce calcul permet d'aboutir clairement à une contradiction car il dépasse grandement le nombre effectif de nombres impairs compris entre 3 et $\frac{n}{2}$ qui est égal à $\left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor$ (on a en effet obtenu pour le cas limite un cardinal au moins égal au double du cardinal du plus gros ensemble de nombres restant ; dans un cas non limite, le cardinal global serait encore plus grand, les nombres premiers étant bien plus rapprochés en réalité que dans le cas limite considéré).

Solution de repli ?? : Dire que l'intersection des ensembles de la forme $\{\neg 0_{p_k} \wedge \neg n_{p_k}\}$ est vide, ce que l'on note $\bigwedge_{p_k} \{\neg 0_{p_k} \wedge \neg n_{p_k}\} = \emptyset = \perp$ (le symbole \perp est le symbole logique pour *False*), est équivalent à dire que le complémentaire de cet ensemble est le "plein" (dénnoté par \top , ou *Vrai*), i.e. couvre l'ensemble de tous les impairs de 3 à $n/2$.

$$\complement \bigwedge_{p_k} \{\neg 0_{p_k} \wedge \neg n_{p_k}\} = \bigvee_{p_k} \{0_{p_k} \vee n_{p_k}\} = \top$$

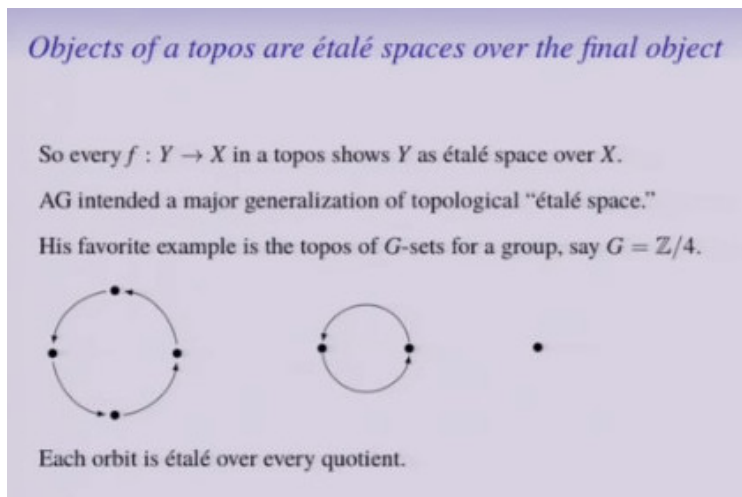
Mais on imagine bien qu'il existe au moins un nombre impair compris entre 3 et $n/2$ qui n'est pas congru à 0, tout en n'étant pas non plus congru à n selon un nombre premier p_k . Ce qui rend notre dernière assertion obligatoirement fausse, et la possibilité que l'intersection soit vide par là même.

Puisqu'on a abouti à une contradiction, l'ensemble des nombres restant, ou ensemble des nombres ni congrus à 0, ni congrus à n selon tout nombre premier p_k compris entre 3 et \sqrt{n} , ne peut être vide et il contient un décomposant de Goldbach de n au moins.

L'annexe 6 fournit les fibres et germes utilisés pour trouver les décomposants de Goldbach 19, 31 et 37 du nombre pair 98.

Annexe 1 : Conférence de McLarty (notion d'espace étalé)

Voici une capture d'écran :



de la video <https://www.youtube.com/watch?v=5AR55ZsHmKI>, *Grothendieck's 1973 topos lectures* (à la minute 38).

Annexe 2 : Définition de la notion de *bundle* par Goldblatt

For the benefit of the reader unfamiliar with topology we shall delay its introduction and first consider the underlying set-theoretic structure of the sheaf concept, to be called a *bundle*.

Let us assume we have a collection \mathcal{A} of sets, no two of which have any elements in common. That is, any two members of \mathcal{A} are sets that are disjoint. We need a convenient notation for referring to these sets so we presume we have a set I of *labels*, or *indices*, for them. For each index $i \in I$, there is a set A_i that belongs to our collection, and each member of \mathcal{A} is labelled in this way, so we write \mathcal{A} as the collection of all these A_i 's,

$$\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}.$$

The fact that the members of \mathcal{A} are pairwise disjoint is expressed by saying that for *distinct* indices $i, j \in I$

$$A_i \cap A_j = \emptyset$$

We visualise the A_i 's as "sitting over" the index set I thus:

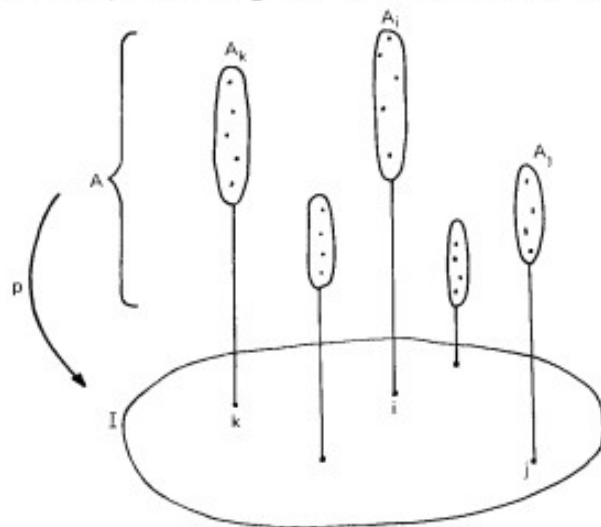


Fig. 4.4.

If we let A be the union of all the A_i 's, i.e.

$$A = \{x : \text{for some } i, x \in A_i\}$$

then there is an obvious map $p : A \rightarrow I$. If $x \in A$ then there is exactly one A_i such that $x \in A_i$, by the disjointness condition. We put $p(x) = i$. Thus

Annexe 3 : Définition des notions de *fibre* et *germe* dans Wikipedia

Fibres et germes [modifier | modifier le code]

Soit \mathcal{F} un préfaisceau sur X à valeurs dans une catégorie \mathcal{C} qui admet des limites inductives. La **fibre** (EGA, 0.3.1.6) (terminologie anglaise : « stalk », *tige*) de \mathcal{F} en un point x de X est par définition l'objet de \mathcal{C} limite inductive

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U),$$

la limite étant prise sur tous les ouverts contenant x , la relation d'ordre sur ces ouverts étant l'inclusion $V \subset U$, et les morphismes de transition étant les morphismes de restriction $\rho_{VU} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$.

Lorsque \mathcal{C} est une catégorie concrète, l'image canonique d'une section s dans \mathcal{F}_x est le **germe** de s au point x , noté s_x .

Remarque. Certains auteurs appellent *germe* de \mathcal{F} en un point x ce qui est appelé ci-dessus la *fibre* de \mathcal{F} en ce point.

Annexe 4 : Extrait des EGA I : définitions

(3.1.6) Supposons maintenant que la catégorie \mathbf{K} admette des *limites inductives* (T, 1.8) ; alors, pour tout préfaisceau (et en particulier tout faisceau) \mathcal{F} sur X à valeurs dans \mathbf{K} et tout $x \in X$, on peut définir la **fibre** \mathcal{F}_x comme l'objet de \mathbf{K} limite inductive des $\mathcal{F}(U)$ selon l'ensemble filtrant (pour \supset) des voisinages ouverts U de x dans X , et pour les morphismes $\rho_U^V : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$. Si $u : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est un morphisme de préfaisceaux à valeurs dans \mathbf{K} , on définit pour tout $x \in X$ le morphisme $u_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ comme la limite inductive des $u_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ selon l'ensemble des voisinages ouverts de x ; on définit ainsi \mathcal{F}_x comme foncteur covariant en \mathcal{F} , à valeurs dans \mathbf{K} , pour tout $x \in X$.

Lorsque \mathbf{K} est en outre définie par une espèce de structure avec morphismes Σ , on appelle encore *sections au-dessus de* U d'un faisceau \mathcal{F} à valeurs dans \mathbf{K} les éléments de $\mathcal{F}(U)$, et on écrit alors $\Gamma(U, \mathcal{F})$ au lieu de $\mathcal{F}(U)$; pour $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$, V ouvert contenu dans U , on écrit $s|_V$ au lieu de $\rho_V^U(s)$; pour tout $x \in U$, l'image canonique de s dans \mathcal{F}_x est le *germe* de s au point x , noté s_x (*nous n'emploierons jamais la notation $s(x)$ dans ce sens*, cette notation étant réservée pour une autre notion relative aux faisceaux particuliers qui seront considérés dans ce Traité (5.5.1)).

Si alors $u : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est un morphisme de faisceaux à valeurs dans \mathbf{K} , on écrira $u(s)$ au lieu de $u_V(s)$ pour tout $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$.

Si \mathcal{F} est un faisceau de groupes commutatifs, ou d'anneaux, ou de modules, on dit que l'ensemble des $x \in X$ tels que $\mathcal{F}_x \neq \{0\}$ est le *support* de \mathcal{F} , noté $\text{Supp}(\mathcal{F})$; cet ensemble n'est pas nécessairement fermé dans X .

Lorsque \mathbf{K} est définie par une espèce de structure avec morphismes, *nous nous abstenons systématiquement de faire intervenir le point de vue des « espaces étalés »* en ce qui concerne les faisceaux à valeurs dans \mathbf{K} ; autrement dit, nous ne considérerons jamais un faisceau comme un espace topologique (ni même comme l'ensemble réunion de ses **fibres**), et nous ne considérerons pas davantage un morphisme $u : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ de tels faisceaux sur X comme une application continue d'espaces topologiques.

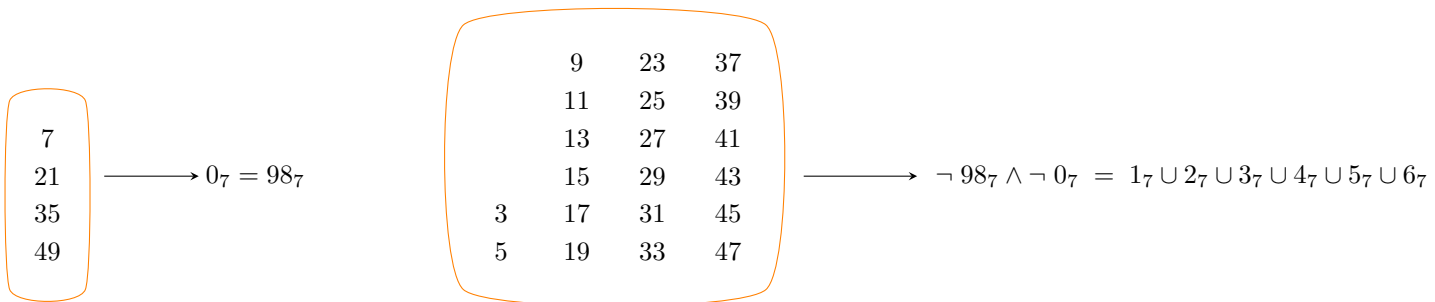
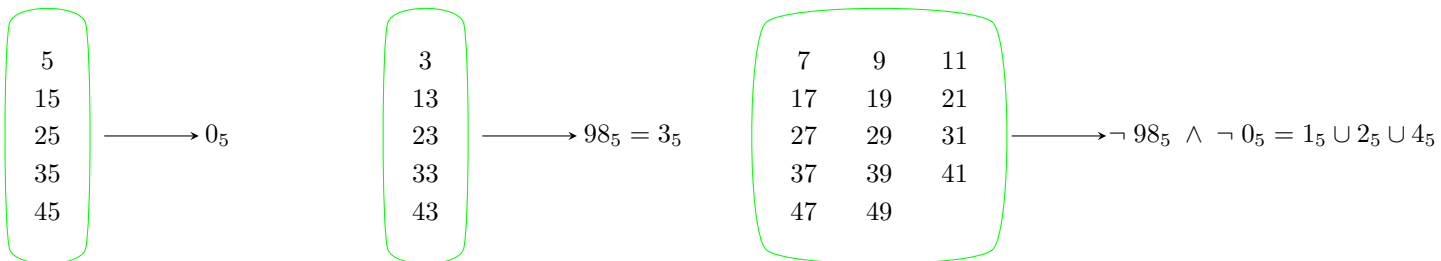
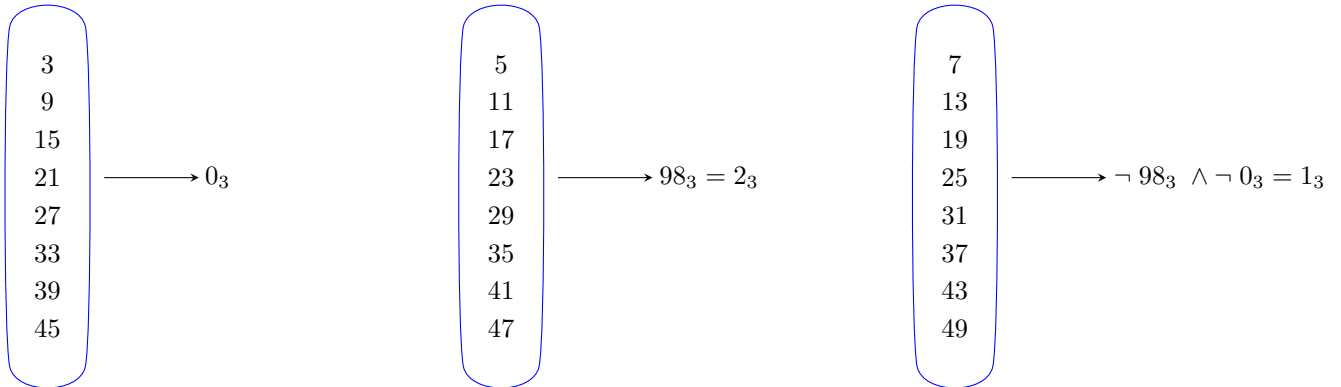
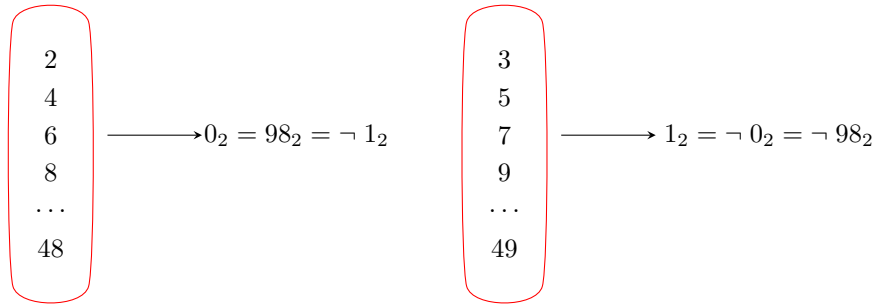
Annexe 5 : Somme des inverses des puissances de 2

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

Il s'agit d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme égal à $\frac{1}{2}$. La formule donne donc :

$$S_n = \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2}^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Annexe 6 : Décomposants de Goldbach de 98



$$\neg 98_2 \cap (\neg 98_3 \wedge \neg 0_3) \cap (\neg 98_5 \wedge \neg 0_5) \cap (\neg 98_7 \wedge \neg 0_7) = \{19, 31, 37\}$$

$$98 = 19+79 = 31+67 = 37+61$$

Bibliographie

[1] Alexander Grothendieck, *Éléments de Géométrie Algébrique (EGA), I. Le langage des schémas*, Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 4 (1960), p. 5-228.