Proposition de démonstration de la conjecture de Goldbach dans le formalisme des topos (Denise Vella-Chemla, 25.11.2019)

La conjecture de Goldbach binaire stipule que tout nombre pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers. La démonstration proposée ici utilise des concepts de la théorie des topos. Colin McLarty, dans une conférence du cycle Lectures Grothendieckiennes, parle de la notion d'"espace étalé" (cf. Annexe 1). Goldblatt, dans *Topoi, the categorial analysis of logic*, fournit un dessin très éclairant pour cette notion (cf. Annexe 3). La définition première (en mathématique) du mot *fibre*, peut être trouvée dans le cours d'Alexander Grothendieck à Kansas ([1]) ou bien dans un extrait des EGA I (cf. Annexe 2).

L'étude de la conjecture de Goldbach fait appréhender que les décomposants de Goldbach d'un nombre pair n, qui sont compris entre la racine carrée de n et la moitié de n, sont à trouver dans l'intersection des ensembles de nombres qui ne sont ni congrus à 0, ni congrus à n selon tout module premier p_k compris entre 3 et la racine carré de n. On prend comme borne inférieure de l'intervalle à considérer 3 plutôt que 2, parce que, pour alléger la formulation, on choisit d'oublier tous les nombres pairs comme décomposants de Goldbach potentiels de n.

Selon chaque module premier p_k, la modélisation nécessite seulement trois fibres et trois germes : la fibre qui relie l'ensemble des nombres divisibles par p_k au germe 0_{p_k}, la fibre qui relie l'ensemble des nombres congrus à n (*modulo* p_k) au germe n_{p_k}, et la fibre qui relie l'ensemble de tous les nombres impairs compris entre 3 et $\dfrac{n}{2}$, que l'on appellera *ensemble des nombres restant* (i.e. qui sont passés à travers ce double-crible de n'être ni congrus à 0 ni congrus à n modulo p_k), une troisième fibre donc, qui lie l'*ensemble des nombres restant* à un germe qu'on notera $\neg 0_{p_k} \wedge \neg n_{p_k}$ (on peut aussi appeler ce dernier ensemble l'ensemble des "ni 0 ni n selon p_k").

Il s'agit de démontrer que l'intersection de tous les *ensembles de nombres restant* selon chacun des modules premiers p_k compris entre 3 et $\sqrt{n}$ est non vide.

Supposons que l'intersection des *ensembles de nombres restant selon chacun des modules* p_k est vide.

Dire que l'intersection des ensembles de la forme $\{\neg 0_{p_k} \wedge \neg n_{p_k}\}$ est vide, ce que l'on note $\bigwedge_{p_k}\{\neg 0_{p_k} \wedge \neg n_{p_k}\} = \varnothing = \bot$ (le symbole $\bot$ est le symbole logique pour *False*), est équivalent à dire que le complémentaire de cet ensemble est le "plein" (dénoté par $\top$, ou *Vrai*), i.e. couvre l'ensemble de tous les impairs de 3 à $n/2$.

$$\complement \bigwedge_{p_k}\{\neg 0_{p_k} \wedge \neg n_{p_k}\} = \bigvee_{p_k}\{0_{p_k} \vee n_{p_k}\} = \top$$

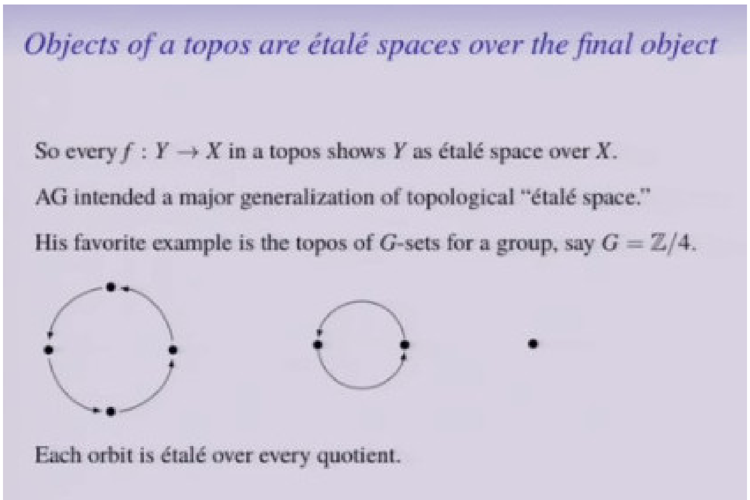
Mais on imagine bien qu'il existe au moins un nombre impair compris entre 3 et $n/2$ qui n'est pas congru à 0, tout en n'étant pas non plus congru à n selon un nombre premier p_k. Ce qui rend notre dernière assertion obligatoirement fausse, et la possibilité que l'intersection soit vide par là même.

Puisqu'on a abouti à une contradiction, l'*ensemble des nombres restant*, ou ensemble des nombres ni congrus à 0, ni congrus à n selon tout nombre premier p_k compris entre 3 et $\sqrt{n}$, ne peut être vide et il contient un décomposant de Goldbach de n au moins.

L'annexe 4 fournit les fibres et germes utilisés pour trouver les décomposants de Goldbach 19, 31 et 37 du nombre pair 98.

Annexe 1 : Conférence de McLarty (notion d'*espace étalé*)

Voici une capture d'écran :



de la video https://www.youtube.com/watch?v=5AR55ZsHmKI, *Grothendieck's 1973 topos lectures* (à la minute 38).

Annexe 2 : Extrait des EGA I : définitions

(3.1.6) Supposons maintenant que la catégorie $\mathbf{K}$ admette des *limites inductives* (T, 1.8) ; alors, pour tout préfaisceau (et en particulier tout faisceau) $\mathscr{F}$ sur X à valeurs dans $\mathbf{K}$ et tout $x \in \mathrm{X}$, on peut définir la *fibre* $\mathscr{F}_x$ comme l'objet de $\mathbf{K}$ limite inductive des $\mathscr{F}(\mathrm{U})$ selon l'ensemble filtrant (pour $\supset$) des voisinages ouverts U de x dans X, et pour les morphismes $\rho_{\mathrm{U}}^{\mathrm{V}} : \mathscr{F}(\mathrm{V}) \to \mathscr{F}(\mathrm{U})$. Si $u : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ est un morphisme de préfaisceaux à valeurs dans $\mathbf{K}$, on définit pour tout $x \in \mathrm{X}$ le morphisme $u_x : \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$ comme la limite inductive des $u_{\mathrm{U}} : \mathscr{F}(\mathrm{U}) \to \mathscr{G}(\mathrm{U})$ selon l'ensemble des voisinages ouverts de x ; on définit ainsi $\mathscr{F}_x$ comme foncteur covariant en $\mathscr{F}$, à valeurs dans $\mathbf{K}$, pour tout $x \in \mathrm{X}$.

Lorsque $\mathbf{K}$ est en outre définie par une espèce de structure avec morphismes Σ, on appelle encore *sections au-dessus de* U d'un *faisceau* $\mathscr{F}$ à valeurs dans $\mathbf{K}$ les éléments de $\mathscr{F}(\mathrm{U})$, et on écrit alors $\Gamma(\mathrm{U}, \mathscr{F})$ au lieu de $\mathscr{F}(\mathrm{U})$; pour $s \in \Gamma(\mathrm{U}, \mathscr{F})$, V ouvert contenu dans U, on écrit $s|\mathrm{V}$ au lieu de $\rho_{\mathrm{V}}^{\mathrm{U}}(s)$; pour tout $x \in \mathrm{U}$, l'image canonique de s dans $\mathscr{F}_x$ est le *germe* de s au point x, noté s_x (*nous n'emploierons jamais la notation* $s(x)$ *dans ce sens*, cette notation étant réservée pour une autre notion relative aux faisceaux particuliers qui seront considérés dans ce Traité (5.5.1)).

Si alors $u : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ est un morphisme de faisceaux à valeurs dans $\mathbf{K}$, on écrira $u(s)$ au lieu de $u_{\mathrm{V}}(s)$ pour tout $s \in \Gamma(\mathrm{U}, \mathscr{F})$.

Si $\mathscr{F}$ est un faisceau de groupes commutatifs, ou d'anneaux, ou de modules, on dit que l'ensemble des $x \in \mathrm{X}$ tels que $\mathscr{F}_x \neq \{0\}$ est le *support* de $\mathscr{F}$, noté $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$; cet ensemble n'est pas nécessairement fermé dans X.

Lorsque $\mathbf{K}$ est définie par une espèce de structure avec morphismes, *nous nous abstiendrons systématiquement de faire intervenir le point de vue des « espaces étalés »* en ce qui concerne les faisceaux à valeurs dans $\mathbf{K}$; autrement dit, nous ne considérerons jamais un faisceau comme un espace topologique (ni même comme l'ensemble réunion de ses fibres), et nous ne considérerons pas davantage un morphisme $u : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ de tels faisceaux sur X comme une application continue d'espaces topologiques.

Annexe 3 : Définition de la notion de *bundle* par Goldblatt

For the benefit of the reader unfamiliar with topology we shall delay its introduction and first consider the underlying set-theoretic structure of the sheaf concept, to be called a *bundle*.

Let us assume we have a collection $\mathscr{A}$ of sets, no two of which have any elements in common. That is, any two members of $\mathscr{A}$ are sets that are disjoint. We need a convenient notation for referring to these sets so we presume we have a set I of *labels*, or *indices*, for them. For each index $i \in I$, there is a set A_i that belongs to our collection, and each member of $\mathscr{A}$ is labelled in this way, so we write $\mathscr{A}$ as the collection of all these A_i's,

$$\mathscr{A} = \{A_i : i \in I\}.$$

The fact that the members of $\mathscr{A}$ are pairwise disjoint is expressed by saying that for *distinct* indices $i, j \in I$

$$A_i \cap A_j = \emptyset$$

We visualise the A_i's as "sitting over" the index set I thus:

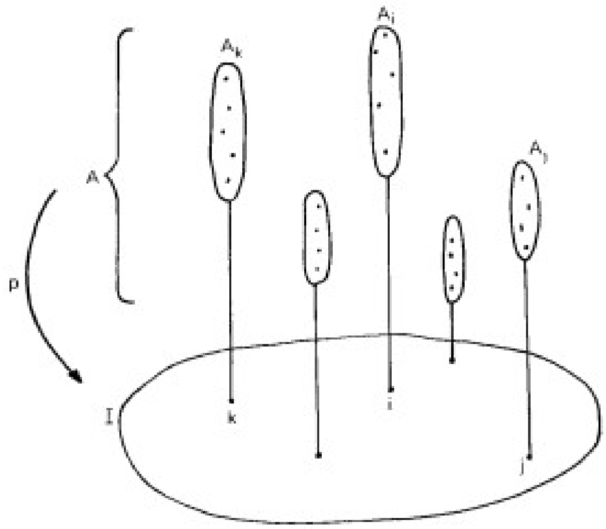


Fig. 4.4.

If we let A be the union of all the A_i's, i.e.

$$A = \{x : \text{for some } i, x \in A_i\}$$

then there is an obvious map $p : A \to I$. If $x \in A$ then there is exactly one A_i such that $x \in A_i$, by the disjointness condition. We put $p(x) = i$. Thus

Annexe 4 : Décomposants de Goldbach de 98

$$\boxed{\begin{array}{c}2\\4\\6\\8\\\cdots\\48\end{array}} \longrightarrow 0_2 = 98_2 = \neg\, 1_2 \qquad \boxed{\begin{array}{c}3\\5\\7\\9\\\cdots\\49\end{array}} \longrightarrow 1_2 = \neg\, 0_2 = \neg\, 98_2$$

$$\boxed{\begin{array}{c}3\\9\\15\\21\\27\\33\\39\\45\end{array}} \longrightarrow 0_3 \qquad \boxed{\begin{array}{c}5\\11\\17\\23\\29\\35\\41\\47\end{array}} \longrightarrow 98_3 = 2_3 \qquad \boxed{\begin{array}{c}7\\13\\19\\25\\31\\37\\43\\49\end{array}} \longrightarrow \neg\, 98_3 \ \wedge \neg\, 0_3 = 1_3$$

$$\boxed{\begin{array}{c}5\\15\\25\\35\\45\end{array}} \longrightarrow 0_5 \qquad \boxed{\begin{array}{c}3\\13\\23\\33\\43\end{array}} \longrightarrow 98_5 = 3_5 \qquad \boxed{\begin{array}{ccc}7&9&11\\17&19&21\\27&29&31\\37&39&41\\47&49&\end{array}} \longrightarrow \neg\, 98_5 \ \wedge \ \neg\, 0_5 = 1_5 \cup 2_5 \cup 4_5$$

$$\boxed{\begin{array}{c}7\\21\\35\\49\end{array}} \longrightarrow 0_7 = 98_7 \qquad \boxed{\begin{array}{cccc}&9&23&37\\&11&25&39\\&13&27&41\\&15&29&43\\3&17&31&45\\5&19&33&47\end{array}} \longrightarrow \neg\, 98_7 \wedge \neg\, 0_7 \ = \ 1_7 \cup 2_7 \cup 3_7 \cup 4_7 \cup 5_7 \cup 6_7$$

$$\neg\, 98_2 \cap (\neg\, 98_3 \ \wedge \neg\, 0_3) \cap (\neg\, 98_5 \ \wedge \neg\, 0_5) \cap (\neg 98_7 \ \wedge \neg\, 0_7) = \{19, 31, 37\}$$

$$98 \ = \ 19{+}79 \ = \ 31{+}67 \ = \ 37{+}61$$

Bibliographie

[1] Alexander Grothendieck, A General Theory of Fibre Spaces with Structure Sheaf, cours donné à l'Université du Kansas, première édition en août 1955 et seconde édition en mai 1958, NSF-G 1126, rapport n° 4.