Etude d'une fonction particulière (Denise Vella-Chemla, 30.3.2017)

On va s'intéresser ici à une fonction particulière, qui opère sur des inégalités selon leur valeur de vérité et qui sera utile dans l'étude des nombres premiers.

On définit une transformation T qui opère sur une inégalité de la forme $Ineg : xy \geqslant n$.

T transforme l'inégalité $Ineg$ en l'inégalité $Ineg_a : x(y-1) \geqslant n$ si elle ($Ineg$) est vraie ou bien la transforme en $Ineg_b : (x+1)y \geqslant n$ dans le cas contraire.

A chacune des inégalités obtenues lors des applications successives de la transformation T est associée une valeur booléenne de vérité. On note entre parenthèses cette valeur de vérité par un V pour vrai et un F pour faux.

On définit une fonction $Inégalité\_de\_départ$ par :

$$\begin{aligned} Inégalité\_de\_départ : \quad & \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ & n \mapsto 3.\left\lfloor \frac{2n-1}{4} \right\rfloor \geqslant n \end{aligned}$$

On applique $\dfrac{n-k}{2} - 1$ (avec $k = 5$ si n est impair et $k = 6$ sinon) transformations, la première transformation étant appliquée à $Inégalité\_de\_départ(n)$ et les transformations ultérieures étant appliquées aux résultats obtenus par les transformations successives (qui sont autant d'inégalités).

Par exemple, $Inégalité\_de\_départ(9) : 3.4 \geqslant 9\ (V)$. La seule transformation appliquée à cette inégalité va la transformer en l'inégalité $3.3 \geqslant 9\ (V)$.

Pour $n = 10$, $Inégalité\_de\_départ(10) : 3.4 \geqslant 10\ (V)$. La seule transformation appliquée à cette inégalité va la transformer en l'inégalité $3.3 \geqslant 10\ (F)$.

Pour $n = 13$, $Inégalité\_de\_départ(13) : 3.6 \geqslant 13\ (V)$. La première transformation appliquée à cette inégalité va la transformer en l'inégalité $3.5 \geqslant 13\ (V)$. Une nouvelle transformation appliquée à l'inégalité obtenue permet d'obtenir l'inégalité $3.4 \geqslant 13\ (F)$ et une ultime transformation aboutit à $4.4 \geqslant 13\ (V)$.

Pour $n = 14$, $Inégalité\_de\_départ(14) : 3.6 \geqslant 14\ (V)$. La première transformation appliquée à cette inégalité va la transformer en l'inégalité $3.5 \geqslant 14\ (V)$. Une nouvelle transformation appliquée à l'inégalité obtenue permet d'obtenir l'inégalité $3.4 \geqslant 14\ (F)$ et une ultime transformation aboutit à $4.4 \geqslant 14\ (V)$.

Pour $n = 15$, $Inégalité\_de\_départ(15) : 3.7 \geqslant 15\ (V)$. La première transformation appliquée à cette inégalité va la transformer en l'inégalité $3.6 \geqslant 15\ (V)$. Une nouvelle transformation appliquée à l'inégalité obtenue permet d'obtenir l'inégalité $3.5 \geqslant 15\ (V)$, une autre transformation aboutit à $3.4 \geqslant 15\ (F)$ et une ultime transformation aboutit à $4.4 \geqslant 15\ (V)$.

Pour $n = 16$, $Inégalité\_de\_départ(16) : 3.7 \geqslant 16\ (V)$. La première transformation appliquée à cette inégalité va la transformer en l'inégalité $3.6 \geqslant 16\ (V)$. Une nouvelle transformation appliquée à l'inégalité obtenue permet d'obtenir l'inégalité $3.5 \geqslant 16\ (F)$, une autre transformation aboutit à $4.5 \geqslant 16\ (V)$ et une ultime transformation aboutit à $4.4 \geqslant 16\ (V)$.

On postule qu'un nombre n est premier si et seulement si les valeurs de vérité associées aux inégalités obtenues par la chaîne de $\dfrac{n-5}{2} - 1$ transformations depuis son inégalité de départ sont identiques à celles associées aux inégalités obtenues par la chaîne de $\dfrac{n-6}{2} - 1$ transformations depuis l'inégalité de départ associée à son successeur $n+1$. Si la valeur de vérité associée à la i-ème transformation pour n diffère de celle associée à la i-ème transformation pour $n+1$ alors n est composé.

Ceci découle d'une découverte présentée dans une étude récente des mots de Christoffel associés à des hyperboles.