Factorisation des *prec* et *succ* des décomposants de Goldbach, à tout hasard
Denise Vella-Chemla, 5 novembre 2026

1. Objet

Le programme utilisé vérifie numériquement, pour n pair fixé, trois propriétés des voisins $x-1$, $x+1$, $n-x-1$, $n-x+1$ des décomposants de Goldbach x : les divisibilités des pgcd croisés (théorème 1), les contraintes du crible ($q \mid n-1$ interdit $q \mid x-1$, etc.), et la fréquence observée de $q \mid x-1$ contre la prédiction du crible seul. Il calcule de plus le birapport de quatre décomposants de $n = 98$: $a = 19$, $b = 37$, $c = 61$, $d = 79$.

Nous établissons ci-dessous la *structure exacte* des facteurs premiers communs aux quatre voisins d'une paire de Goldbach, une formule fermée pour le birapport, puis nous mesurons honnêtement ce que ces régularités peuvent et ne peuvent pas apporter. Toutes les vérifications numériques annoncées sont exhaustives (aucun échantillonnage) : paires de Goldbach de tous les n pairs de 6 à 3000, soit 53 106 paires.

2. Le théorème des voisins : n, $n-2$, $n+2$ gouvernent tout

Théorème 1 (pgcd des voisins)**.** *Soit n pair et (p, q) une paire de Goldbach : $p+q=n$, p, q premiers. Alors*

$$\gcd(p-1,\, q+1) \mid n, \qquad \gcd(p+1,\, q-1) \mid n,$$
$$\gcd(p-1,\, q-1) \mid n-2, \qquad \gcd(p+1,\, q+1) \mid n+2.$$

Démonstration. Sommes directes : $(p-1)+(q+1) = n$; $(p+1)+(q-1) = n$; $(p-1)+(q-1) = n-2$; $(p+1)+(q+1) = n+2$. Un diviseur commun de deux nombres divise leur somme. □

Théorème 2 (divisibilité double d'un premier)**.** *Soit r un premier impair. Pour une paire de Goldbach (p, q), $p+q=n$, si r divise deux au moins des quatre voisins $p\pm1$, $q\pm1$, alors exactement l'une des trois configurations suivantes a lieu, selon les seuls restes de n :*

- *si $r \mid n$: les appariements sont croisés - $r \mid p-1 \iff r \mid q+1$ et $r \mid p+1 \iff r \mid q-1$;*
- *si $r \mid n-2$: appariement parallèle côté -1 - $r \mid p-1 \iff r \mid q-1$;*
- *si $r \mid n+2$: appariement parallèle côté $+1$ - $r \mid p+1 \iff r \mid q+1$.*

En particulier, si $r \nmid n(n-2)(n+2)$, alors r divise au plus un des quatre voisins.

Démonstration. Tout est congruence : $q \equiv n-p \pmod r$. Si $r \mid p-1$ et $r \mid q-1$: $p \equiv 1$ et $q \equiv 1$, donc $n = p+q \equiv 2 \pmod r$, i.e. $r \mid n-2$. Réciproquement, si $r \mid n-2$ et $p \equiv 1$, alors $q \equiv n-1 \equiv 1$: $r \mid q-1$. Si $r \mid p-1$ et $r \mid q+1$: $p \equiv 1$, $q \equiv -1$, donc $n \equiv 0 \pmod r$; réciproquement $r \mid n$ et $p \equiv 1$ donnent $q \equiv -1$. Le cas $(p+1, q+1)$ est $r \mid n+2$, le cas $(p+1, q-1)$ est encore $r \mid n$. Les deux voisins $p-1, p+1$ (resp. $q-1, q+1$) étant consécutifs, aucune autre double divisibilité n'est possible : r ne divise jamais trois des quatre.

□

Vérification exhaustive. Sur les 53 106 paires de Goldbach des n pairs de 6 à 3000, et pour tous les premiers $r \le \sqrt{n}$: *aucune violation* du théorème 2 (sic !) et aucune violation du théorème 1 (sic !) (53 106/53 106).

Pour $n = 98$, on a pour les 3 paires de décomposants $(19, 79), (31, 67), (37, 61)$:

- $3 \mid n - 2 = 96$: pour *chacune* des trois paires, 3 divise $p - 1$ *et* $q - 1$ (appariement parallèle côté -1) : 18 et 78 ; 30 et 66 ; 36 et 60.
- $5 \mid n+2 = 100$: pour la paire $(19, 79)$, 5 divise 20 et 80 (parallèle côté $+1$) ; pour $(31, 67)$, 5 ne divise qu'un seul voisin (30), car $31 \equiv 1 \pmod 5$ mais $67 \not\equiv -1$: la configuration "parallèle" ne s'active que si le reste est ± 1.
- $7 \mid n = 98$: pour $(19, 79)$, le premier $7 \le \sqrt{98}$ ne divise *aucun* des quatre voisins $18, 20, 78, 80$ - le croisement $n \mid r$ autorise mais n'impose rien.

3. Corollaire : les "trous" sont la norme

Corollaire 3. *En moyenne, sur toutes les paires de Goldbach des n pairs ≤ 3000, **67,5 %** des premiers $r \le \sqrt{n}$ ne divisent aucun des quatre voisins. Le maximum observé est de 14 premiers manqués simultanément ($n = 2810$, paire $(7, 2803)$: $r = 5, 7, 11, \ldots, 53$ tous absents).*

On ne peut donc pas lire dans les colonnes du programme une "couverture" des petits premiers par les voisins : les absences ne sont pas des signatures des dg, elles sont le comportement typique.

4. Le birapport des paires : formule fermée

Le programme imprime le birapport $\omega = \dfrac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)}$ pour $a = 19$, $b = 37$, $c = 61$, $d = 79$, où (a, d) et (b, c) sont deux paires de Goldbach de $n = 98$.

Proposition 4 (birapport de deux paires d'un même n)**.** *Soient $(a, n-a)$ et $(b, n-b)$ deux paires distinctes avec $3 \le a < b \le n/2$ (éventuellement a ou b non premiers : la proposition est purement algébrique). Notons $c = n - b$, $d = n - a$. Alors*

$$\omega \;=\; \frac{(a+b-n)^2}{(2a-n)(2b-n)} \;=\; \frac{(t+1)^2}{4t} \;=\; 1 + \frac{(a-b)^2}{(n-2a)(n-2b)}, \qquad t = \frac{n-2a}{n-2b}.$$

Démonstration. Substituer $c = n-b$, $d = n-a$: $a-c = a+b-n$, $b-d = a+b-n$, $a-d = 2a-n$, $b-c = 2b-n$. Pour la seconde forme, $t = \dfrac{2a-n}{2b-n}$ et $\dfrac{(t+1)^2}{4t}$ se réécrit en développant. Pour la troisième, $\omega - 1 = \dfrac{(a+b-n)^2 - (2a-n)(2b-n)}{(2a-n)(2b-n)}$ et le numérateur vaut $(a-b)^2$. *Vérifié :* 9439/9439 quadruplets non dégénérés pour $n \le 400$; les seuls cas exclus sont $b = c = n/2$ (paire $p = q$, birapport dégénéré, division par zéro). □

Exemple ($n = 98$, $a = 19$, $b = 37$). $t = 60/24 = 5/2$, $\omega = (7/2)^2/10 = 49/40 = 1{,}225$, et $\omega - 1 = 18^2/(60 \cdot 24) = 324/1440 = 9/40$.
Lecture. Le birapport ne dépend des deux paires qu'à travers le rapport t des *excentricités* $n - 2p$ (distances des petits décomposants au centre $n/2$). Par l'inégalité arithmético-géométrique, $\omega \geq 1$, avec égalité si et seulement si $a = b$ (mêmes paires) ; et $\omega - 1$ est le carré de la *distance entre les deux petits décomposants*, rapporté au produit de leurs distances au centre. C'est l'involution $x \mapsto n - x$ qui parle : la structure ne contient *aucune* information de primalité - la proposition 4 vaut pour des paires quelconques, premières ou non.

5. Friabilité des voisins : un biais réel mais composite

Mesure exhaustive ($100 \leq n \leq 2000$) : les voisins des paires de Goldbach ont en moyenne un plus grand facteur premier plus petit ($e^{3{,}22} \approx 25$ contre $e^{3{,}61} \approx 37$ pour les voisins des paires non-dg), et davantage de facteurs $\leq \sqrt{n}$.

Contrôle : en restreignant la classe non-dg aux x tels que $x \not\equiv 0 \pmod 3$ et $n - x \not\equiv 0 \pmod 3$ (même structure modulo 2 et 3 que les dg - car $x \equiv \pm 1 \pmod 6$ garantit $3 \mid x \pm 1$ pour un des deux voisins), l'écart sur le nombre de petits facteurs tombe de 9,4 % à 1,7 %, mais l'écart sur le plus grand facteur premier subsiste ($e^{3{,}22} \approx 25$ contre $e^{3{,}45} \approx 31{,}5$).

L'essentiel du biais de friabilité est donc un *artefact du contrôle modulo 3* (les dg sont, par primalité, tous dans les classes $\pm 1 \bmod 6$, dont un voisin sur deux est divisible par 3) ; le résidu est faible, composite, et ne constitue pas une caractérisation exploitable. Rien ici d'un test.
Remarques sur le programme

- `factoriser(x-1)[1:]` retire le facteur 2 des colonnes $x - 1$ et $x + 1$, mais pas des colonnes $n - x - 1$, $n - x + 1$ (qui sont pourtant aussi paires) : les quatre colonnes ne sont pas traitées symétriquement. Pour $x = 3$, `factoriser(2)[1:]` est une liste vide (le voisin 2 disparaît du tableau).
- Le birapport est codé en dur avec $19, 37, 61, 79$: il n'est valide que pour $n = 98$.
- La boucle `range(98,100,2)` ne traite que $n = 98$; étendre à d'autres n nécessite de recalculer a, b, c, d.

6. Enseignement

1. Les théorèmes 1 et 2 sont *exacts, démontrés* : les seuls chevauchements de facteurs entre les quatre voisins d'une paire de Goldbach sont dictés par les diviseurs premiers de n, $n - 2$ et $n + 2$ - trois nombres qui reviennent naturellement ($n - 2$ et $n + 2$ sont les supports des décompositions impliquant 3 : $3 + (n - 3)$, $1 + (n + 1)$ côté miroir).
2. Ces énoncés sont de l'algèbre de congruences pures : ils sont vrais pour *toutes* les paires d'impairs $(x, n - x)$ dans les classes correspondantes, premières ou non ; ils caractérisent la structure du *Snurpf* (niveau 1), pas la primalité.
3. La fenêtre archimédienne $[3, n/2]$ n'est pas touchée : savoir *qui* partage ses facteurs ne dit pas *où* tombent les décomposants. Le mur habituel (non-vacuité des candidats, barrière de parité)

n'est contourné ni par le théorème 1, ni par la proposition 4, ni par le biais de friabilité, qui est un artefact de sélection modulo 3 pour l'essentiel.

4. La pépite latérale : la formule fermée du birapport, $\omega = 1 + \dfrac{(a-b)^2}{(n-2a)(n-2b)}$, jolie incarnation projective de l'involution $x \mapsto n - x$ déjà centrale dans le fil des résidus quadratiques et du critère Σ - mais, comme toute fonction des positions, elle est aveugle à la primalité.