

Le mathématicien

JOHN VON NEUMANN

Parler de la nature du travail intellectuel est une tâche difficile dans tous les domaines, même dans les domaines qui ne sont pas si éloignés de la zone centrale de l'effort intellectuel que les humains ont en commun, zone centrale dont font partie les mathématiques. Une discussion sur la nature de tout effort intellectuel est difficile en soi, plus difficile que le simple exercice de cette effort intellectuel particulier. Il est plus difficile de comprendre le mécanisme d'un avion, et les théories des forces qui le soulèvent et qui le propulsent, que de simplement monter dans l'avion pour être élevé et transporté par lui ou même de le diriger. Il est exceptionnel que l'on doive être en mesure d'acquérir la compréhension d'un processus sans avoir préalablement acquis une profonde familiarité avec son fonctionnement, son utilisation, avant de l'avoir assimilé de manière instinctive et empirique.

Ainsi, toute discussion sur la nature de l'effort intellectuel dans n'importe quel domaine est difficile, à moins que l'on suppose une familiarité facile et routinière avec ce domaine. En mathématiques, ces limitations sont très sévères, si la discussion doit être maintenue sur un plan non mathématique. La discussion montrera alors nécessairement de très mauvaises caractéristiques ; les points abordés ne peuvent jamais être correctement documentés, et une certaine superficialité de la discussion devient inévitable.

Je suis très conscient de ces lacunes dans ce que je vais dire, et je vous demande à l'avance de m'en excuser. Par ailleurs, les opinions que je vais exprimer ne sont probablement pas entièrement partagées par de nombreux autres mathématiciens, vous obtiendrez ici les impressions et interprétations pas très bien formalisées d'un homme et je ne peux vous apporter que très peu d'aide pour décider si ces idées sont au point.

Malgré toutes ces difficultés, je dois cependant admettre qu'il s'agit d'une tâche intéressante et défiante que de tenter de vous parler de la nature de l'effort intellectuel en mathématiques. J'espère seulement que je n'échouerai pas trop.

Le fait le plus caractéristique des mathématiques est, à mon avis, leur relation particulière avec les sciences naturelles, ou, plus généralement, avec toute science qui interprète l'expérience à un niveau plus élevé que le niveau purement descriptif.

Traduction d'un article de John von Neumann consultable ici http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Extras/VonNeumann_part1.html

Publié dans "Les travaux de l'esprit", ed. R. B. Heywood, pp. 180-196, (© 1947 Université de Chicago Press. Réimprimé depuis les Œuvres de John von Neumann, ed. A. Taub, Vol. I, p. 1-9).

La plupart des gens, mathématiciens et autres, conviendront que les mathématiques ne sont pas une science empirique, ou du moins qu'elles sont pratiquées d'une manière qui diffère selon plusieurs points décisifs des techniques des sciences empiriques. Et pourtant, leur développement est très étroitement lié aux sciences naturelles. L'une de leurs principales branches, la géométrie, a commencé comme une science naturelle et empirique. Certaines des meilleures inspirations des mathématiques modernes (je crois, les meilleures) sont clairement issues des sciences naturelles. Les méthodes mathématiques imprègnent et dominent les divisions "théoriques" des sciences naturelles. Dans les sciences empiriques modernes, l'un de leur critère de réussite majeur est de plus en plus qu'elles soient devenues accessibles à la méthode mathématique ou aux méthodes quasi-mathématiques de la physique. En effet, le développement des sciences naturelles s'est effectué tout au long d'une chaîne ininterrompue de pseudo-métamorphoses successives, toutes pressantes vers les mathématiques, et presque identifiées avec l'idée de progrès scientifique, qui sont devenues de plus en plus évidentes. La biologie est de plus en plus imprégnée de chimie et de physique, la chimie l'est par la physique expérimentale et théorique, et la physique par les formes très mathématiques de la physique théorique.

Il y a une duplicité assez particulière dans la nature des mathématiques. Il faut réaliser cette duplicité, l'accepter et l'assimiler dans sa réflexion sur le sujet. Cette double face est la face des mathématiques, et je ne pense pas qu'une simplification, une vision unitaire de la chose soit possible sans sacrifier leur essence.

Je ne tenterai donc pas de vous présenter une version unitaire, je tenterai de décrire, du mieux que je peux, le phénomène multiple que sont les mathématiques.

Il est indéniable que certaines des meilleures inspirations en mathématiques - dans ces parties des mathématiques aussi pures que l'on puisse imaginer - sont venues des sciences naturelles. Nous mentionnerons les deux faits les plus monumentaux.

Le premier exemple est, comme il se doit, la géométrie. La géométrie était la partie principale des mathématiques anciennes. Elle est, avec plusieurs de ses ramifications, toujours l'une des principales parties des mathématiques modernes. Il ne fait aucun doute que son origine dans l'Antiquité était empirique et qu'elle a commencé en tant que discipline un peu comme la physique théorique d'aujourd'hui.

Mises à part toutes les autres preuves, le nom même de "géométrie" l'indique. Le postulat d'Euclide représente un grand pas dans l'éloignement de l'empirisme, mais il n'est pas simple de défendre la position que ce fut l'étape décisive et finale, produisant une séparation absolue. Que cette axiomatisation d'Euclide ne réponde pas sur certains points mineurs aux exigences modernes de rigueur axiomatique absolue n'est pas ce qui importe à cet égard. Ce qui est plus essentiel, c'est ceci : d'autres disciplines,

qui sont sans aucun doute empiriques, comme la mécanique et la thermodynamique, sont généralement présentées dans un traitement plus ou moins axiomatique, ce qui, dans la présentation de certains auteurs, ne les différencie pas trop de la procédure d'Euclide. Le classique de la physique théorique de notre époque, les *Principia* de Newton, était, sous forme littéraire ainsi que dans l'essence de certains de ses parties les plus critiques, très similaires aux *Éléments* d'Euclide. Bien sûr, dans tous ces cas, il y a derrière la présentation axiomatique la perspicacité physique soutenant les postulats et la vérification expérimentale supportant les théorèmes. Mais on pourrait bien soutenir qu'une interprétation similaire d'Euclide est possible, en particulier du point de vue de l'antiquité, avant que la géométrie n'ait acquis sa stabilité et son autorité bimillénaires actuelles, dont l'édifice moderne de la physique théorique fait clairement défaut.

De plus, alors que la désempirisation de la géométrie a petit à petit progressé depuis Euclide, elle n'est jamais devenue tout à fait complète, même à l'époque moderne. La discussion de la géométrie non euclidienne en offre une bonne illustration. Elle offre également une illustration de l'ambivalence de la pensée mathématique. Comme la plupart des discussions ont lieu sur un plan très abstrait, elles traitent du problème purement logique de savoir si le "cinquième postulat" d'Euclide était une conséquence des autres ou non ; et le conflit formel a été clos par l'exemple purement mathématique de F. Klein, qui a montré comment un morceau d'un plan euclidien pourrait être rendu non euclidien en redéfinissant formellement certains concepts de base. Et pourtant, le stimulus empirique était là du début à la fin. La raison principale pour laquelle, de tous les postulats d'Euclide, le cinquième a été remis en question, était clairement le caractère non empirique du concept de tout le plan infini qui intervient là, et là seulement. L'idée que, au moins dans un sens significatif et malgré toutes les analyses mathématico-logiques, la décision pour ou contre Euclide peut être empirique, était certainement présent dans l'esprit du plus grand mathématicien, Gauss.

Et après que Bolyai, Lobatchevski, Riemann et Klein aient obtenu plus d'abstraction, pour ce que nous considérons aujourd'hui comme la résolution formelle de la controverse originale, l'empirisme, ou plutôt la physique, néanmoins, a eu le dernier mot. La découverte de la relativité générale nous a contraints à une révision de nos points de vue sur les relations de la géométrie dans un cadre entièrement nouveau et avec une assez nouvelle distribution des accents purement mathématiques, aussi. Finalement, ajoutons une dernière touche pour compléter l'image du contraste. Ce dernier développement a eu lieu dans la même génération qui a vu la désempirisation complète et l'abstraction de la méthode axiomatique d'Euclide entre les mains des mathématiciens tenants de l'axiomatique logique moderne. Et ces deux attitudes apparemment contradictoires sont parfaitement compatibles dans un seul esprit mathématique ; ainsi Hilbert a apporté des contributions importantes à la fois à la géométrie axiomatique et à la relativité générale.

Le deuxième exemple est le calcul ou plutôt toute l'analyse, qui en surgit. Le calcul a été la première réalisation des mathématiques modernes et il est difficile de restituer son importance. Je pense qu'il définit plus clairement que toute autre chose la création des mathématiques modernes, et le système d'analyse mathématique, qui est son développement logique, constitue toujours la plus grande avancée technique de la pensée exacte.

Les origines du calcul sont clairement empiriques. Les premières tentatives d'intégration de Kepler ont été formulées comme mesure de "dolichométrie" des fûts, c'est-à-dire de volumétrie pour des volumes avec des faces courbes. C'est de la géométrie, mais post-euclidienne, et, à l'époque en question, de la géométrie empirique non axiomatique. Kepler en était parfaitement conscient. Les efforts principaux et les principales découvertes, celles de Newton et de Leibniz, avaient une origine explicitement physique. Newton a inventé le calcul des "fluxions" essentiellement pour la mécanique en fait, les deux disciplines, le calcul et la mécanique, ont été développées par lui plus ou moins ensemble. Les premières formulations du calcul n'étaient même pas mathématiquement rigoureuses. Une formulation semi-physique inexacte était la seule disponible plus de cent cinquante ans après Newton ! Et pourtant, certains des plus importants progrès de l'analyse ont eu lieu au cours de cette période, contre ces fondements infondés et mathématiquement inexacts ! Certains des principaux esprits mathématiques de l'époque n'étaient clairement pas rigoureux, comme Euler ; mais d'autres, dans l'ensemble, l'étaient, comme Gauss ou Jacobi. Le développement était aussi confus et ambigu que possible, et sa relation à l'empirisme n'était certainement pas conforme à nos idées actuelles (ou à celles d'Euclide) d'abstraction et de rigueur. Pourtant, aucun mathématicien ne voudrait oublier cette période car elle a produit des mathématiques de toute première classe ! Et même après que le règne de la rigueur ait été essentiellement rétabli avec Cauchy, une rechute très particulière dans les méthodes semi-physiques a eu lieu avec Riemann. La personnalité elle-même du scientifique Riemann, est un exemple des plus éclairants de la double nature des mathématiques, comme l'est la controverse de Riemann et Weierstrass, mais cela m'amènerait trop loin en termes de questions techniques si j'entre dans les détails spécifiques. Depuis Weierstrass, l'analyse semble être devenue complètement abstraite, rigoureuse et non empirique. Mais même cela n'est pas tout à fait vrai. La controverse sur les "fondements" des mathématiques et de la logique, qui a eu lieu au cours des deux dernières générations, a dissipé de nombreuses illusions sur ce sujet.

Cela m'amène au troisième exemple qui est pertinent pour le diagnostic. Cet exemple, cependant, traite de la relation des mathématiques avec la philosophie ou l'épistémologie plutôt qu'avec les sciences naturelles. Il illustre de façon très frappante que le concept même de rigueur mathématique "absolue" n'est pas immuable. La variabilité du concept de rigueur montre que quelque chose d'autre que l'abstraction mathématique doit entrer dans la composition des mathématiques. En analysant la controverse sur les "fondements", je n'ai pas réussi à me convaincre que le ver-

dict doit être en faveur de la nature empirique de cette composante supplémentaire. Les arguments en faveur d'une telle interprétation sont assez forts, du moins dans certaines phases de la discussion. Mais je ne les considère pas comme absolument convaincants. Cependant, deux choses sont claires. Tout d'abord, ce quelque chose non mathématique, en quelque sorte lié aux sciences empiriques ou à la philosophie ou les deux, entre en ligne de compte effectivement et son caractère non empirique ne peut être maintenu si on supposait que la philosophie (ou plus précisément l'épistémologie) pouvait exister indépendamment de l'expérience. (Et cette hypothèse est seulement nécessaire mais pas en soi suffisante). Deuxièmement, l'origine empirique des mathématiques est fortement appuyée par des exemples comme nos deux exemples précédents (géométrie et calcul), indépendamment de ce que la meilleure interprétation de la controverse sur les "fondements" peut être.

En analysant la variabilité du concept de rigueur mathématique, je souhaite mettre principalement l'accent sur la controverse sur les "fondements", comme mentionné ci-dessus. Je voudrais pourtant brièvement considérer d'abord un aspect secondaire de la question. Cet aspect aussi renforce mon argument, mais je le considère comme secondaire, car il est probablement moins concluant que l'analyse de la controverse des "fondements". Je parle des changements de "style" mathématique. Il est bien connu que le style dans lequel des épreuves mathématiques sont écrites a subi des fluctuations considérables. Il vaut mieux parler de fluctuations que d'une tendance, car à certains égards, la différence entre les auteurs actuels et certains des dix-huitième ou dix-neuvième siècles est plus grande qu'entre le présent et Euclide. D'autre part, à d'autres égards il y a eu une constance remarquable. Dans les domaines où existent des différences, ce sont principalement des différences de présentation, qui peuvent être éliminées sans amener aucune nouvelle idée. Cependant, dans de nombreux cas, ces différences sont si importantes que l'on commence à douter que les auteurs qui "présentent leurs cas" de manière aussi divergente puissent présenter de telles différences de style, de goût et d'éducation, s'ils peuvent vraiment avoir les mêmes idées quant à ce qui constitue la rigueur mathématique. Enfin, dans les cas extrêmes (par exemple, dans une grande partie des travaux de l'analyse du XVIII^e siècle, (dont il a été question ci-dessus), les différences sont essentielles et ne peuvent être corrigées, le cas échéant, qu'à l'aide de théories nouvelles et profondes, qu'il a fallu jusqu'à cent ans pour développer. Selon nous, certains des mathématiciens qui ont travaillé de cette manière sans rigueur (ou certains de leurs contemporains, qui les ont critiqués) étaient bien conscients de leur manque de rigueur. Ou pour être plus objectif : leurs propres désirs quant à la procédure mathématique devaient être plus conformes à nos vues actuelles que leurs actions. Mais d'autres, le plus grand virtuose de l'époque, par exemple, Euler, semblent avoir agi en parfaite bonne foi et avoir été assez satisfaits de leurs propres normes.

Cependant, je ne veux pas insister davantage sur cette question. Je vais plutôt me tourner vers un cas clair, la controverse sur les "fondements des mathématiques". À la

fin du XIX^e et au début du XX^e siècles, une nouvelle branche des mathématiques abstraites, la théorie des ensembles de G. Cantor a conduit à des difficultés. Autrement dit, certains raisonnements ont conduit à des contradictions ; et, bien que ces raisonnements ne soient pas dans la partie centrale et “utile” de la théorie des ensembles, et toujours facile à repérer par certains critères formels, on ne sait pas pourquoi elles devraient être considérées comme moins théoriques que les parties “réussies” de la théorie. Hormis la compréhension ex post qu’ils ont effectivement conduit au désastre, on ne savait pas clairement quelle motivation a priori, quelle philosophie cohérente de la situation, permettrait de les séparer des parties de la théorie des ensembles que l’on voulait sauver. Une étude plus approfondie du fond de l’affaire, entreprise principalement par Russell et Weyl, et conclue par Brouwer, a montré que la manière dont non seulement la théorie mais aussi la plupart des mathématiques modernes utilisaient les concepts de “validité générale” et d’“existence” était philosophiquement répréhensible. Un système de mathématiques qui était libéré de ces caractéristiques indésirables, “l’intuitionnisme”, a été développé par Brouwer. Dans ce système, les difficultés et la contradiction de la théorie des ensembles ne se sont pas produites. Cependant, une bonne moitié des mathématiques modernes, dans leurs parties les plus vitales et jusqu’alors incontestées, notamment dans l’analyse, ont également été affectées par cette “purge” : elles sont devenues invalides ou devaient être justifiées par des considérations subsidiaires très compliquées. Et lors de ce dernier processus, on a généralement perdu sensiblement en généralité de la validité et en élégance de la déduction. Néanmoins, Brouwer et Weyl ont estimé nécessaire que le concept de rigueur mathématique soit révisé en fonction de ces idées.

Il est difficile de surestimer la signification de ces événements. Au cours de la troisième décennie du XX^e siècle, deux mathématiciens de première grandeur, et aussi profondément et pleinement conscients de ce que les mathématiques sont, ou d’à quoi elles servent, ou de ce dont elles parlent, que n’importe qui puisse l’être, proposent que le concept de rigueur mathématique, de ce qui constitue une preuve exacte, devrait changer ! Les développements qui ont suivi sont à noter également.

1. Seuls très peu de mathématiciens étaient disposés à accepter les nouvelles normes exigeantes pour leur propre usage quotidien. Beaucoup, cependant, ont admis que Weyl et Brouwer avaient à première vue raison, mais ils continuaient eux-mêmes à faire leurs propres mathématiques à l’ancienne mode “facile”, probablement dans l’espoir que quelqu’un d’autre, à un autre moment, pourrait trouver une réponse à la critique intuitionniste et ainsi les justifier a posteriori.

2. Hilbert a avancé l’idée ingénieuse suivante pour justifier le “classique” (c.-à-d. les mathématiques pré-intuitionnistes) : même dans le système intuitionniste, il est possible de rendre compte rigoureusement du fonctionnement des mathématiques classiques, on peut décrire comment fonctionne le système classique, même si on ne peut pas justifier ses travaux. Il pourrait donc être possible de démontrer intuitive-

ment que les procédures classiques ne peuvent jamais conduire à des contradictions. Il était clair qu'une telle preuve serait très difficile, mais existaient certaines indications sur la façon dont on pourrait tenter de le faire. Si ce régime avait fonctionné, il aurait fourni une justification très remarquable des mathématiques classiques sur la base du système intuitionniste opposé lui-même ! Au moins, cette interprétation aurait été légitime dans un système de la philosophie des mathématiques que la plupart des mathématiciens étaient prêts à accepter.

3. Après environ une décennie de tentatives pour réaliser ce programme, Gödel a obtenu un résultat des plus remarquables. Ce résultat ne peut être énoncé de façon absolument précise sans plusieurs clauses et mises en garde trop techniques pour être formulées ici. Cependant, son apport essentiel était le suivant : le fait qu'un système de mathématiques ne puisse pas conduire à une contradiction, ne peut pas être démontré avec les procédures de ce système lui-même. La preuve de Gödel satisfait au critère le plus strict de la rigueur mathématique intuitionniste. Son influence sur le programme de Hilbert est quelque peu controversée, pour des raisons encore trop techniques pour cette occasion. Mon opinion personnelle, partagée par beaucoup d'autres, est que Gödel a montré que le programme de Hilbert est essentiellement sans espoir.

4. Le principal espoir d'une justification des mathématiques classiques au sens de Hilbert ou de Brouwer et Weyl s'étant envolé, la plupart des mathématiciens ont décidé d'utiliser ce système de toute façon. Après tout, les mathématiques classiques produisaient des résultats qui étaient à la fois élégants et utiles et, même si l'on ne pouvait plus jamais être très sûr de sa fiabilité, il repose sur des bases au moins aussi solides que, par exemple, l'existence de l'électron. Par conséquent, si l'on est disposé à accepter les sciences, on peut aussi bien accepter le système classique des mathématiques. De telles vues se sont avérées acceptables, même pour certains des protagonistes originaux du système intuitionniste. Actuellement, la controverse sur les "fondements" n'est certainement pas close, mais il semble très peu probable que le système classique soit abandonné sauf par une petite minorité.

J'ai raconté l'histoire de cette controverse de manière si détaillée, car je pense qu'elle constitue la meilleure prudence contre le fait de trop prendre la rigueur inébranlable des mathématiques pour acquise. C'est arrivé dans ma propre vie, et je reconnais facilement avec humilité que mes propres opinions concernant la vérité mathématique absolue ont changé au cours de cet épisode, et comment elles ont changé trois fois de suite ! J'espère que les trois exemples ci-dessus illustrent suffisamment bien la moitié de ma thèse qu'une grande partie de la meilleure inspiration mathématique vient de l'expérience et qu'il est à peine possible de croire à l'existence d'un concept absolu et immuable de rigueur mathématique, dissociée de toute expérience humaine. J'essaie de prendre une attitude très sourde à ce sujet. Quelles que soient les préférences philosophiques ou épistémologiques que l'on puisse avoir à cet égard,

les expériences réelles de la communauté mathématique avec son sujet appuient peu l'hypothèse de l'existence d'un concept de rigueur mathématique a priori. Cependant, ma thèse a également une seconde moitié, et je vais passer à cette seconde moitié maintenant.

Il est très difficile pour un mathématicien de croire que les mathématiques sont une science empirique ou que toutes les idées mathématiques proviennent de sujets empiriques. Laissez-moi considérer d'abord la seconde moitié de la déclaration. Il existe différentes parties importantes des mathématiques modernes dont l'origine empirique est intraquable, ou, si jamais elle l'est, elle est si éloignée qu'il est clair que le sujet a subi une métamorphose complète car il a été coupé de ses racines empiriques. Le symbolisme de l'algèbre a été inventé pour un usage domestique, mathématique, mais on peut raisonnablement affirmer qu'il a de forts liens empiriques. Cependant, l'algèbre moderne et "abstraite" s'est de plus en plus développée dans de nombreuses directions qui ont très peu de connexions empiriques. On peut dire la même chose de la topologie. Et dans tous ces domaines, le critère subjectif de réussite du mathématicien, de la valeur de son effort, est très indépendant et esthétique et libre (ou presque libre) de connexions empiriques. (Je vais en dire plus à ce sujet.) Dans la théorie des ensembles, cela est encore plus clair. La "puissance" et "l'ordre" d'un ensemble infini peut être la généralisation de concepts numériques finis, mais sous leur forme infinie (en particulier la "puissance"), ils n'ont pratiquement aucun rapport avec ce monde. Si je ne voulais pas éviter les détails techniques, je pourrais documenter cela avec de nombreux exemples théoriques le problème de l'"axiome du choix", la "comparabilité" des "puissances" infinies, le "Problème du continu", etc. Les mêmes remarques s'appliquent à une grande partie de la théorie des fonctions réelles et de la théorie des ensembles de points réels. Deux exemples étranges sont donnés par la géométrie différentielle et par la théorie des groupes : ils ont certainement été conçus comme des disciplines et presque toujours cultivés dans cet esprit. Après une décennie dans un cas, et un siècle dans l'autre, ils se sont avérés très utiles en physique. Et ils se sont toujours principalement poursuivis dans le même esprit, abstrait et non appliqué.

Les exemples de toutes ces conditions et de leurs diverses combinaisons pourraient être multipliés mais je préfère plutôt passer au premier point que j'ai indiqué ci-dessus : les mathématiques sont-elles une science empirique ? Ou, plus précisément : les mathématiques sont-elles effectivement pratiquées de la même manière qu'une science empirique est pratiquée ? Ou, plus généralement : quelle est la relation normale du mathématicien avec son sujet ? Quels sont ses critères de réussite, de désirabilité ? Quelles influences, quelles considérations, contrôlent et dirigent ses efforts ? Voyons donc en quoi le mode de travail en mathématiques diffère du mode de travail en sciences naturelles. La différence entre celles-ci, d'une part, et les mathématiques, d'autre part, est continue, augmentant clairement à mesure que l'on passe des disciplines théoriques aux disciplines expérimentales puis des disciplines expérimentales aux disciplines descriptives. Comparons donc les mathématiques avec la catégorie qui

se rapproche le plus des disciplines théoriques. Et choisissons là celle qui se rapproche le plus des mathématiques. J'espère que vous ne me jugerez pas trop sévèrement si je ne parviens pas à contrôler l'hybris mathématique et ajouter : parce qu'elle est la plus développée parmi toutes les sciences théoriques, c'est-à-dire la physique théorique.

Les mathématiques et la physique théorique ont en réalité beaucoup en commun. Comme je l'ai souligné auparavant, le système de géométrie d'Euclide était le prototype de la présentation axiomatique de la mécanique classique et des traitements similaires dominant la thermodynamique phénoménologique ainsi que certaines phases du système électrodynamique de Maxwell et aussi de la relativité restreinte. De plus, l'attitude selon laquelle la physique théorique n'explique pas seulement les phénomènes, mais également les classe et les corrèle, est aujourd'hui acceptée par la plupart des physiciens théoriciens. Cela signifie que le critère de réussite d'une telle théorie consiste simplement à évaluer si elle peut, par un schéma de classification et de corrélation simple et élégant, couvrir de très nombreux phénomènes qui, sans ce schéma, sembleraient compliqués, hétérogènes et si la théorie couvre même des phénomènes qui ne sont pas considérés ou même qui sont inconnus au moment de l'évolution du dispositif. (Ces deux dernières déclarations expriment, bien sûr, le pouvoir unificateur et prédictif d'une théorie.) Or, ce critère, tel qu'il est énoncé ici, est clairement dans une large mesure de nature technique. Pour cette raison il est très proche des critères mathématiques de réussite, qui, comme vous le verrez, sont presque entièrement esthétiques. Ainsi, nous comparons maintenant les mathématiques avec la science empirique qui se trouve le plus près d'elle et avec laquelle elle a, comme j'espère l'avoir montré, beaucoup en commun, qui est la physique théorique. Les différences de *modus procedendi* réel sont néanmoins importantes et basiques. Les objectifs d'une théorie physique sont principalement donnés de l'extérieur, dans la plupart des cas par les besoins de la physique expérimentale. Ils trouvent presque toujours leur origine dans la nécessité de résoudre une difficulté ; les réalisations prédictives et unificatrices viennent généralement après. Nous pouvons nous autoriser une comparaison, les avancées (prédictions et unifications) viennent pendant la quête, qui est nécessairement précédée d'une bataille contre une difficulté préexistante, généralement une contradiction apparente au sein du système existant. Une partie du travail des physiciens théoriciens est la recherche de telles obstructions, qui promettent la possibilité d'une "percée". Comme je l'ai mentionné, ces difficultés trouvent généralement leur origine dans l'expérimentation mais parfois ce sont des contradictions entre les différentes parties du corps de la théorie elle-même. Les exemples sont bien sûr nombreux.

L'expérience de Michelson conduisant à la relativité restreinte, les difficultés de certains potentiels d'ionisation et de formation et de certaines structures spectroscopiques qui ont conduit à la mécanique quantique illustrent le premier cas ; le conflit entre la relativité restreinte et la théorie gravitationnelle newtonienne qui ont mené à la relativité générale illustrent le deuxième cas, plus rare. De toute façon, les problèmes de physique théorique sont objectivement donnés : et, alors que les critères

qui régissent l'exploitation d'un succès sont, comme je l'ai indiqué plus haut, principalement esthétiques, la partie du problème, que j'ai appelée au-dessus l'origine de la "percée" finale, sont des faits difficiles et objectifs. En conséquence, le sujet de la physique théorique a presque toujours été extrêmement concentré ; à presque tous les moments, la plupart des efforts de tous les physiciens théoriciens étaient concentrés sur pas plus d'un ou deux sujets, ils étaient très fortement circonscrits et la théorie quantique des champs dans les années 1920 et au début des années 1930 et les particules élémentaires et la structure des noyaux depuis le milieu des années 30 sont des exemples de tels domaines circonscrits.

La situation en mathématiques est entièrement différente. Les mathématiques sont découpées en un grand nombre de subdivisions, très différentes les unes des autres par leur caractère, leur style, leurs objectifs, et leur influence. Elles montrent le contraire de l'extrême concentration de la physique théorique. Un bon physicien théoricien peut aujourd'hui encore avoir une connaissance pratique de plus de la moitié de son sujet. Je doute que tout mathématicien vivant ne soit en relation avec plus d'un quart des mathématiques. "Objectivement" parlant, des problèmes "importants" peuvent surgir après qu'une subdivision des mathématiques a évolué relativement loin et qu'elle s'est sérieusement embourbée devant une difficulté. Mais même alors, le mathématicien est essentiellement libre de continuer ou de quitter le domaine et de se tourner vers autre chose, alors qu'un problème en physique théorique est généralement un conflit, une contradiction, qui "doit" être résolu. Le mathématicien a une grande variété de domaines vers lesquels il peut se tourner, et il jouit d'une liberté très considérable dans ce qu'il en fait. Pour venir au point décisif : je pense qu'il est juste de dire que ses critères de sélection, et aussi ceux de son succès, sont principalement esthétiques. Je me rends compte que cette affirmation est controversée et qu'il est impossible de la "prouver", voire d'aller très loin dans sa justification, sans analyser de nombreuses instances techniques spécifiques. Cela nécessiterait à nouveau un type de discussion très technique, et ce n'est pas l'occasion de développer cela ici. Il suffira pour résumer de dire que le caractère esthétique est encore plus important que dans le cas mentionné ci-dessus de la physique théorique. On attend d'un théorème mathématique ou d'une théorie mathématique non seulement qu'il ou elle décrive et classe simplement et de manière élégante de nombreux cas particuliers a priori disparates. On attend également de l'"élégance" dans sa composition "architecturale" et structurelle. Facilité à énoncer le problème, grande difficulté à le saisir et de toutes les tentatives de s'en approcher, torsion très surprenante par laquelle l'approche, ou une partie de l'approche, devient facile, etc. De plus, si les déductions sont longues ou compliquées, il devrait y avoir un principe général simple impliqué, qui "explique" les complications et les détours, réduit l'arbitraire apparent à quelques motivations simples, etc. Ces critères sont clairement ceux de tout art créatif, et l'existence de certains motifs empiriques et bavards en arrière-plan, souvent dans un arrière-plan très éloigné et cultivé par des développements esthétiques et suivi dans une multitude de variantes labyrinthiques, tout cela est beaucoup plus proche de l'atmosphère de l'art pur et

simple que de celle des sciences empiriques.

Vous remarquerez que je n'ai même pas mentionné de comparaison des mathématiques avec les sciences expérimentales ou avec les sciences descriptives. Ici les différences de méthode et d'atmosphère générale sont trop évidentes.

Je pense que c'est une relativement bonne approximation de la vérité qui est beaucoup trop compliquée pour permettre autre chose que des approximations que les idées mathématiques proviennent de données empiriques, bien que la généalogie soit parfois longue et obscure. Mais, une fois ainsi conçu, le sujet commence à vivre sa propre vie et est mieux comparable, du point de vue de la créativité régie par des motivations presque entièrement esthétiques, à autre chose et, en particulier, à une science empirique. Il existe cependant un autre point qui, je crois, doit être souligné. Lorsque la discipline mathématique voyage loin de sa source empirique, ou plus encore, lorsqu'il s'agit de deuxième et troisième générations indirectement inspirées d'idées issues de la "réalité", elle est confrontée à de très graves dangers.

Elle devient alors de plus en plus purement esthétisante, de plus en plus purement "l'art pour l'art". Cela ne doit pas être mauvais, si le champ est entouré de sujets corrélés, qui ont encore des liens plus étroits avec l'empirisme, ou si la discipline est sous l'influence d'hommes au goût exceptionnellement développé. Mais il existe un grave danger que le sujet se développera le long de la ligne de moindre résistance, que le ruisseau, si loin de sa source, se séparera en une multitude de branches insignifiantes, et que la discipline deviendra une masse désorganisée de détails et de complexités. En d'autres termes, à une grande distance de sa source empirique, ou après beaucoup de consanguinité "abstraite", un sujet mathématique est en danger de dégénérescence. Au début, le style est généralement classique ; quand il montre des signes de devenir baroque, alors le signal de danger est activé. Il serait facile de donner des exemples, de retracer des évolutions spécifiques dans le baroque et le très haut baroque, mais là encore, ce serait trop technique.

En tout état de cause, chaque fois que ce stade est atteint, le seul remède me semble être le retour rajeunissant à la source : la réinjection d'idées plus ou moins directement empiriques. Je suis convaincu que c'est une condition nécessaire pour conserver la fraîcheur et la vitalité du sujet et que cela restera également vrai à l'avenir.

Le rôle des mathématiques

JOHN VON NEUMANN

Je devrais vraiment parler des développements probables des mathématiques dans un futur pas trop lointain. Lors de la présentation du document précédent, j'ai beaucoup admiré et envié le professeur Spitzer qui, dans son domaine, pouvait le faire ; il pouvait parler des développements probables en astronomie à un public scientifique et universitaire général, sans trop entrer dans les détails, qui sont d'un fort attrait pour les astronomes, mais non pour le grand public. En astronomie, c'est possible.

En mathématiques, c'est très difficile. Si l'on commence à parler de la substantielle matière des mathématiques, tout particulièrement lorsqu'on spéculé sur l'avenir, on pénètre très rapidement dans des sujets qui évoqueront quelque chose seulement chez les mathématiciens.

Je vais donc m'orienter différemment et parler du rôle des mathématiques dans la vie intellectuelle et dans la société.

Dès le début, il faut répondre à une question qui se pose réellement dans toutes les branches de la science et dans toutes les branches de l'érudition. Cependant, en mathématiques, vous faites face à cette question sous une forme particulièrement définie et extrême. C'est la question de l'utilité des mathématiques ; et de l'utilité de cette utilité ; de l'importance de cette utilité ; la science mathématique doit-elle être poursuivie en soi ou doit-elle être poursuivie selon son utilité pour la société. Beaucoup peut être dit à ce sujet. je pense que le mieux que l'on puisse faire à cet égard en dix minutes est de souligner à quel point il est difficile, et combien il est dangereux, de porter des jugements trop rapides à ce sujet.

Permettez-moi de vous citer une épigramme du poète allemand Schiller. Il décrit une conversation fictive entre Archimède et un disciple. Le disciple exprime au Maître son admiration pour la science et veut être initié à "cette science divine qui vient de sauver l'État", c'est-à-dire ces techniques qui ont aidé pendant le siège de Syracuse par les Romains. Je veux dire que les mathématiques ont aidé les habitants de Syracuse lors d'un siège par l'armée romaine.

Dr. John A. von Neumann est Professeur de Mathématiques, à l'Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey.

Cet article est la traduction de l'article page 640 du Compendium consacré aux travaux de John von Neumann.

Réimpression des Œuvres de John von Neumann, ed. A. Taub, Vol. VI, p. 477-490.

Archimède fait alors un discours quelque peu étouffant dans lequel il souligne auprès de l'admirateur que la science *est* divine, mais qu'elle était divine *avant* d'aider l'État ; et qu'elle est divine, qu'elle ait ou non aidé l'État.

Maintenant, cette position est assez importante et pertinente. La science n'est probablement pas un iota plus divine parce qu'elle a aidé l'État ou la société. Cependant, si l'on souscrit à cette position, on devrait en même temps envisager la double proposition, que si la science n'est pas un iota plus divine sous prétexte qu'elle est utile à la société, peut-être qu'elle n'est pas un iota moins divine si elle lui nuit. La question n'est pas du tout triviale. Un dernier point à considérer dans cette conférence est aussi que la science n'est pas un iota moins divine, bien qu'elle n'ait absolument pas sauvé l'État, parce que Syracuse a en fait été prise par les Romains peu de temps après.

Je parlerai donc de cette question de l'utilité malgré toutes les difficultés d'évaluation dans ce contexte, de l'importance de son utilité dans la vie de tous les jours, de son utilité pour la société, sans discuter de la place des mathématiques dans la société et des effets qu'elles ont sur nous en général ; et tout particulièrement, des effets qu'elles peuvent avoir en dehors du groupe des professionnels.

Il est également très intéressant de considérer ses effets au sein du groupe des professionnels. Ces effets au sein du groupe de professionnels sont très différents de ceux qu'on pourrait penser. En ce qui concerne les effets généraux et externes, il est parfaitement clair que les mathématiques fournissent quelque chose de très important, à savoir qu'elles établissent certaines normes d'objectivité, certaines normes de vérité ; et cela est assez important qu'elles semblent donner un moyen d'établir ces normes plutôt indépendamment de tout le reste, plutôt indépendamment des émotions, plutôt indépendamment des questions morales. Il est très important de réaliser cela : des critères objectifs de vérité sont possibles, un tel but n'est pas contradictoire, n'est pas inhumain en un certain sens. Cette perspicacité n'est ni évidente ni particulièrement ancienne ; et ce prestige ou la logique per se, cette science per se, sont probablement liés au rôle de la science dans nos vies, et au rôle des mathématiques, dans leur forme la plus abstraite, dans la science.

Encore une fois, la vérité intrinsèque de ces propositions peut même être débattue, mais il est tout à fait important que ces propositions puissent être faites, que l'on puisse avoir une image précise et détaillée de leur contenu. C'est possible, car on peut former, avec l'aide des mathématiques, une image de ce à quoi un tel système devrait ressembler.

En d'autres termes, indépendamment de la question de savoir si ces normes objectives de vérité données par les mathématiques sont réellement objectives, et que

ces normes soient ou non réellement vraies, on peut donner beaucoup plus de sens à ce sujet *après* avoir expérimenté directement et *in vivo* ce à quoi ressemblerait un tel système s'il existait.

Il existe un certain nombre d'exemples mathématiques auxquels nous pouvons nous référer à cet effet. Comment concrétiser ces références ? Et également : Même si l'implémentation n'est pas immédiatement couronnée de succès, quel système d'idées les mathématiques sont-elles dans lequel des propositions si extrêmes sont valables ?

On peut en dire beaucoup plus sur ce sujet et sur ce rôle des mathématiques pour établir la possibilité de normes objectives. Permettez-moi de dire tout de suite quelles sont les objections à cela. L'objection selon laquelle, même si des normes absolues pouvaient être établies par les mathématiques, elles ne pourraient pas avoir une validité absolue pour le monde entier, cela a été abondamment discuté ; et je ne pense pas que je puisse vous dire beaucoup de nouvelles choses à propos de ça. Je pense que nous avons tous été confrontés à ce problème, et nous avons tous différentes méthodes pour le gérer, que nous en soyons satisfaits ou non. Je tiens à souligner, cependant, et il s'agit d'une question plus technique, que les propositions sous-jacentes de savoir si les normes de mathématiques sont vraiment objectives, peuvent également être mises en doute. En d'autres termes, il *n'est pas* nécessairement vrai que la méthode mathématique est quelque chose d'absolu, qui est révélé d'en haut, ou qui d'une manière ou d'une autre, une fois qu'il nous est révélé, était nécessairement juste et est resté bien évident depuis lors. Pour être plus précis, c'était peut-être évident juste après que ça ait été révélé, mais ça n'est certainement pas resté évident depuis, il y a eu de très sérieuses fluctuations dans l'opinion professionnelle des mathématiciens sur ce qu'est la rigueur mathématique. Pour mentionner une chose mineure : dans ma propre expérience, qui ne s'étend que sur une trentaine d'années, cette idée a fluctué si souvent que ma conviction personnelle et sincère de ce qu'est la rigueur mathématique a changé au moins deux fois. Et cela en si peu de temps de vie d'un seul individu ! Si vous prenez toute la période, disons depuis le début du XVIII^e siècle, il y a eu des fluctuations encore plus sérieuses quant à ce qui constitue une preuve mathématique stricte.

Les grands analystes de la fin du XVIII^e siècle acceptaient comme preuves mathématiques des choses que nous n'accepterions absolument pas comme telles. C'est vrai qu'ils les ont acceptées avec un certain sentiment de culpabilité ; mais dans de nombreux cas, le sentiment de culpabilité n'était pas trop évident. Il est aussi certainement vrai qu'au XIX^e siècle, il y avait des désaccords de bonne foi sur la question de savoir si une preuve donnée par un très grand mathématicien, Riemann, était vraiment une preuve ou non.

D'après ma propre expérience, à deux autres reprises au début du XX^e siècle,

des discussions de fond très sérieuses sur ce que sont les principes fondamentaux des mathématiques ont eu lieu quant à savoir si un grand chapitre des mathématiques est vraiment logiquement cohérent ou non. Et dans les années dix et vingt, une critique de ces questions a fait comprendre qu'il n'était pas du tout clair de savoir exactement ce que l'on entend par rigueur, et plus particulièrement, s'il faut se limiter à n'utiliser que les parties de mathématiques que personne n'a remises en question. Ainsi, assez remarquablement, dans une grande fraction des mathématiques, il existait en fait des divergences d'opinion ! Quelques mathématiciens ont dit qu'il n'était pas nécessaire de remettre en question une partie de ce qui est effectivement utilisé. Il y avait aussi un ensemble d'opinions, selon lequel on ne devrait pas utiliser davantage de concepts que ceux que le plus exigeant des critiques avait approuvés. Pourtant il y a eu un groupe important de mathématiciens qui a estimé que, même s'il y avait lieu de remettre en question certains domaines des mathématiques, il était bon de les utiliser. Ce groupe était tout à fait prêt à accepter quelque chose comme ceci : ces portions de mathématiques qui avaient été interrogées et qui avaient été clairement utiles, en particulier pour l'usage interne de la communauté - en d'autres termes, quand de très belles théories pouvaient être obtenues dans ces domaines - que les théories étaient après tous au moins aussi solides et probablement un peu plus solides même que les constructions de la physique théorique. Et après tout, la physique théorique allait bien ; alors pourquoi pas de tels domaines, qui avaient peut-être même servi à la physique théorique, même si ils ne correspondaient pas à 100 pour cent à l'idée que l'on avait de la rigueur mathématique, pourquoi ne seraient-ils pas des domaines légitimes en mathématiques ; et pourquoi les idées en question ne devraient-elles pas être poursuivies ? Cela peut sembler étrange, comme une dégradation des normes, mais cela a été cru par un grand groupe des gens pour qui j'ai de la sympathie, car je suis l'un d'eux.

Je ne veux pas entrer dans les détails de cette critique ; elle est liée à la très difficile question épistémologique de savoir s'il est légitime de discuter de collections d'entités dont le nombre n'est pas fini ; ou, si vous avez affaire à un collectif de concepts mathématiques qui est en nombre infini, que signifie exactement de faire une déclaration universelle à leur sujet, qu'est-ce que cela signifie exactement de dire que vous savez que quelque chose est possible au sujet d'une telle collection d'entités en nombre infini. Cela signifie-t-il que vous avez un exemple concret ? Ou bien est-ce que cela signifie que vous avez des méthodes pour montrer qu'un exemple existe ? En fait, existe-t-il un moyen d'établir l'existence d'un exemple sans le construire explicitement ? L'une des grandes surprises pour nous tous a été qu'il s'est avéré que les méthodes mathématiques généralement acceptées étaient en fait constituées d'un certain nombre d'astuces par lesquelles vous pourriez démontrer l'existence d'un exemple sans le construire. Il n'est pas facile d'imaginer comment cela peut se produire. Mais en fait, cela arrivait, et c'est une pratique mathématique normale.

Je voudrais donc dire qu'il y a ici des questions très difficiles et délicates, et on

ne peut pas échapper à la conclusion selon laquelle, dans une certaine mesure, elles ressemblent à celles des fondements de la physique ; que l'on peut avoir un sentiment de plausibilité qui est assez commode, et qu'il n'est pas question d'une absolue fiabilité super-humaine qui est censée être l'un des attributs des mathématiques.

Il y a donc là un certain doute ; et pour évaluer le caractère et le rôle des mathématiques, il ne faut pas oublier que le doute existe.

Permettez-moi maintenant de parler plus en détail des fonctions des mathématiques dans notre réflexion. Il est courant que les mathématiques soient une excellente école de pensée, qu'elles vous amènent à la pensée logique, qu'après les avoir exercées, vous puissiez penser plus valablement qu'autrement. Je ne sais pas si toutes ces déclarations sont vraies, la première est probablement la moins douteuse. Cependant, je pense que cela a une très grande importance de penser à un domaine qui n'est pas si précis. Je pense que l'une des plus importantes contributions des mathématiques à notre réflexion est qu'elles ont montré une grande flexibilité dans la formation des concepts, à un degré de flexibilité qu'il est très difficile d'atteindre dans le mode de la pensée non-mathématique. On trouve parfois des situations un peu similaires en philosophie ; mais ces domaines de la philosophie emportent généralement beaucoup moins d'adhésion.

Cette grande flexibilité, à laquelle je fais allusion, implique des choses telles que celles-ci : dans la terminologie habituelle, on considère un problème, qui a beaucoup préoccupé les philosophes tel que les lois qui régissent ce domaine sont de la nature suivante : chaque événement détermine directement l'événement qui le suit immédiatement. Ceci est l'approche causale. Alternativement, ces lois peuvent être téléologiques, ce qui signifie qu'un seul événement ne détermine pas l'événement suivant, mais qu'en quelque sorte, l'ensemble du processus doit être considéré comme une unité subordonnée à une loi générale, de sorte que le tout doit être pris comme un tout. Si je dis que cela a assailli les philosophes, je minimise. Cela a joué un très grand rôle et joue toujours un très grand rôle, par exemple en biologie.

Eh bien, je ne dis pas que c'est une mauvaise question, ou une question vide de sens, mais c'est une excellente question à traiter plus subtilement, en tout cas, qu'il n'y paraît ; parce qu'une bonne dose d'expérience mathématique montre qu'à moins d'être extrêmement prudent, la question n'a pas de sens.

L'exemple classique, l'exemple exceptionnel de cela, qui, je pense, mérite beaucoup plus d'appréciation que le cas général, se situe dans un domaine entre la physique théorique et les mathématiques, mais ce sont vraiment des mathématiques, à savoir le traitement mathématique de la mécanique classique. La mécanique classique fait bien sûr partie de la physique théorique ; mais une fois que vous êtes d'accord sur les

principes de la mécanique, il reste la partie purement mathématique qui consiste à exprimer ces principes dans la terminologie mathématique et à rechercher mathématiquement comment trouver des solutions, combien il y en a, etc., et aussi, comment on peut énoncer le même principe de fond sous diverses formes mathématiques, toutes équivalentes les unes aux autres, car elles énoncent la même chose, mais qui peuvent formellement sembler très différentes et donnent donc des approches techniques complètement différentes pour résoudre le problème. Ce sont alors, de manière générale, différents aspects par lesquels on peut comprendre le problème.

Maintenant, l'un des faits les plus simples sur la mécanique est qu'elle peut être exprimée par quiconque sous plusieurs formes mathématiques équivalentes. L'une d'elle est la forme newtonienne où l'état du système n'est pas seulement la position de chacune de ses parties, mais aussi la vitesse de chacune de ses parties à un instant. L'état ainsi défini détermine alors de manière unique l'accélération, et donc ensuite la position et la vitesse à l'instant suivant. Par répétition, cela peut être utilisé pour dériver l'état du système à tout instant futur, et en fait aussi à tout instant passé. En d'autres termes, c'est strictement causal ; si vous connaissez le système maintenant, cela le détermine immédiatement après, et par répétition aussi pour tous les instants futurs.

Une deuxième formulation de la mécanique utilise le principe de l'effet minimum, que je ne décrirai pas mathématiquement mais qui dit ceci : si vous considérez l'histoire complète d'un système (par système, je veux dire toute entité mécanique, donc ça peut être une planète flottant dans l'espace, simplifiée jusqu'à être considérée comme un point ; ou un système d'une planète et d'un corps central ; ou quelque chose de la complexité de tout le système solaire ; ou de la complexité d'une locomotive ; ou toute autre chose que vous choisirez), si vous considérez son histoire complète entre deux moments (ça peut être de maintenant à dans cinq minutes, ou il y a entre trois milliards d'années et maintenant ou toute autre combinaison de moments) alors l'histoire complète vous permet de calculer certaines choses, et en particulier l'intégrale de l'énergie fois le temps. Et l'histoire réelle est celle qui rend cette quantité la plus petite possible. Il s'agit d'un principe clairement *téléologique*. En effet, ici l'histoire n'est pas déterminée par quelque chose qui se passe à un moment donné, mais vous devez considérer la totalité de l'histoire pour minimiser cette valeur numérique particulière d'une intégrale étendue sur toute l'histoire.

La première approche est strictement causale et fonctionne d'un point à un autre dans le temps. La deuxième est strictement téléologique, et ne définit que l'histoire totale en vertu de certaines propriétés optimales, et non pas selon une partie de celui-ci. Pourtant, les deux sont strictement équivalentes ; l'histoire réelle pour les mouvements que vous dérivez dans un cas est précisément ce que vous trouvez dans l'autre cas ; et la question de savoir si la mécanique est causale ou téléologique (qui, en tout autre domaine serait considérée comme une question de fond importante ap-

pelant une réponse oui ou non) est un non-sens manifeste en mécanique, car il dépend uniquement de la manière dont vous choisissez d'écrire les équations. Je n'essaie pas d'être facétieux quant à l'importance de garder à l'esprit les principes téléologiques lorsqu'il s'agit de biologie ; mais je pense que l'on n'a pas commencé à comprendre le problème de leur rôle dans la biologie, jusqu'à ce qu'on se rende compte qu'en mécanique, si vous êtes juste un peu intelligent mathématiquement, votre problème disparaît et perd tout son sens. Et qu'il est parfaitement possible que si l'on comprenait un autre domaine, la même chose pourrait se produire.

C'est une idée qui n'aurait probablement jamais été obtenue sans la ruse mathématique de transformation des équations de la mécanique ; c'étaient purement des compétences mathématiques et les caractéristiques de flexibilité de la formulation mathématique et de sa reformulation, qui ont produit cette idée. Ce n'est pas de la pensée pure à un quelconque niveau abstrait, mais c'est une procédure spécifiquement mathématique.

Une autre chose que je voudrais mentionner dans ce contexte, c'est la chose suivante (je vais à nouveau mélanger la physique théorique avec les mathématiques, de la même manière que précédemment. L'exemple appartient à la physique théorique, mais le traitement technique qui produit les résultats auxquels je fais référence consiste vraiment en un certain nombre de manipulations mathématiques. Il a donc quelque chose à voir avec le rôle des mathématiques dans la compréhension, et non avec le rôle de la théorie physique dans la perspicacité, ce dernier étant assez important, mais différent du premier). Une déclaration qui est fréquemment et librement faite, en particulier avant que la matière n'ait été aussi bien analysée qu'elle ne l'est aujourd'hui, c'est qu'il y a un certain contraste entre les choses qui sont soumises à un traitement mathématique strict, et celles qui sont laissées au hasard.

Ceci est une déclaration plausible, et c'était très plausible, il y a environ 200 ans, à un moment où la théorie des probabilités a été découverte, ce qui a permis un strict traitement mathématique d'événements indéterminés et fortuits. Et encore faut-il un traitement mathématique pour réaliser que si un événement n'est pas déterminé par des lois strictes, mais laissé au hasard, jusqu'à ce que vous ayez clairement indiqué ce que vous entendez par là (et peut être clairement énoncé), il se prête tout autant à un traitement quantitatif moyen que s'il était rigoureusement défini. Bien sûr, ce qu'un traitement quantitatif vous dira ne sera pas ce qui se passera, car cela n'est pas censé être possible dans ce cas particulier, mais cela vous dira, par exemple, que si vous l'essayez un million de fois, vous obtiendrez probablement un résultat positif. Et cela vous dira aussi avec quelle précision cette probabilité sera renforcée si vous augmentez le nombre d'essais. De plus, quelles combinaisons des éventualités sont celles que vous pouvez ignorer, qui sont absurdes, malgré l'incertitude des lois générales.

La théorie des probabilités en fournit un exemple, mais encore plus frappant. Cet exemple, c'est la forme moderne de la mécanique quantique. Il s'avère que les processus impliquant des particules élémentaires, des atomes ou des particules subatomiques, en dépit de tout ce qui était connu auparavant, ne sont apparemment pas soumis à des lois comme celles de la mécanique, et certainement pas, parce que les lois de la mécanique dans leur forme causale vous disent que si vous connaissez l'état du système à un instant, vous pouvez dire exactement son état peu de temps après, et en répétant cela, vous pouvez dire à quoi il ressemblera à tout moment après. Il s'avère que pour les processus élémentaires, il ne semble pas qu'il en soit ainsi. La meilleure description que l'on peut donner aujourd'hui, qui peut ne pas être l'ultime description (cette ultime description pouvant même revenir à la forme causale, bien que la plupart des physiciens ne pensent pas que cela soit probable) mais en tout cas le mieux que l'on puisse dire aujourd'hui, c'est que vous n'avez pas une détermination complète, et que l'état du système ne détermine plus du tout ce qu'il sera immédiatement après ou plus tard. Bien sûr, un état peut maintenant être incompatible avec certaines autres hypothèses sur ce qu'il en sera du système une heure plus tard ; ou certains d'entre eux peuvent être extrêmement improbables. Mais il restera encore de nombreuses possibilités ; et on pourrait penser que c'est une idée qui ne se prête pas à une description par des moyens mathématiques précis.

Le fait est que cela a été découvert par la méthode de la physique théorique, et que cela a été depuis cristallisé, rendu précis, par des moyens mathématiques. En fait, des théories mathématiques très sophistiquées devaient être appliquées ; et les choses les plus particulières sont apparues.

Par exemple : un système, comme celui dont il est question ici, n'est pas causalement prévisible. Vous ne pouvez pas calculer à partir de son état actuel son état au moment suivant. Il y a cependant quelque chose d'autre qui est causalement prévisible, à savoir la fonction dite fonction d'onde.

L'évolution de la fonction d'onde peut être calculée d'un instant à l'autre, mais l'effet de la fonction d'onde sur la réalité observée n'est qu'une probabilité. Le fait qu'une combinaison puisse être élaborée, qu'elle puisse déchiffrer l'expérience, et même dériver de l'expérience, est quelque chose qui, encore une fois, aurait été complètement impossible si la méthode mathématique n'avait pas existé. Et à nouveau, une énorme contribution de la méthode mathématique à l'évolution de notre pensée réelle est qu'elle a rendu ces cycles logiques possibles, et qu'elle les a rendus très spécifiques. Cette méthode a permis de faire ces choses en toute fiabilité et dans une parfaite "douceur" (facilité) technique.

Une autre chose, que nous ne connaissons pas aujourd'hui autant que nous le souhaiterions, mais que nous connaissons bien, est qu'il aurait été tout à fait rai-

sonnable de s'attendre à un cercle vicieux quand on essaie d'analyser le substrat qui produit la science, la fonction de l'intelligence humaine. L'ensemble des preuves de l'exploration dans ce domaine est que le système qui se produit dans la performance intellectuelle, en d'autres termes dans le système nerveux humain, peut être étudié avec des méthodes physiques et mathématiques. Il y a encore probablement une sorte de contradiction dans l'idée que tout le monde a qu'à un moment, un individu doit être complètement informé de l'état de son appareil nerveux à ce moment-là. Les chances sont que les limites absolues qui existent ici peuvent également être exprimées en termes mathématiques, et uniquement en termes techniques mathématiques.

Nous avons déjà vu des phénomènes de ce type. La physique théorique a déjà indiqué deux domaines du monde physique où existent des limites absolues à la connaissance. L'une est la relativité et l'autre est la théorie quantique. Ici, par les meilleures descriptions que nous pouvons donner aujourd'hui, il y a des limites absolues à ce qui est connaissable. Cependant, ces limites peuvent être exprimées très précisément mathématiquement, par des concepts qui seraient très déroutants si on tentait de les exprimer par tout autre moyen. Ainsi, tant en relativité qu'en mécanique quantique, il existera toujours des choses qui ne peuvent pas être connues ; mais vous avez une latitude considérable pour contrôler quelles sont les variables inconnaissables. En mécanique quantique, par exemple, l'assertion suivante est vraie : vous ne pouvez jamais savoir en même temps quelle est la position et quelle est la vitesse d'une particule élémentaire, mais vous pouvez vous adapter et savoir laquelle des deux vous pouvez découvrir. Toute information que vous obtenez sur l'une détériore les informations acquises sur l'autre. C'est certainement une situation d'un degré de sophistication qu'il serait complètement désespéré de développer ou de gérer par des méthodes autres que mathématiques, ou de parler de leur sens autrement que par des méthodes mathématiques ; et encore moins de faire quelque chose qui a déjà été fait, à savoir de les utiliser pour des prédictions, avec des méthodes mathématiques.

En venant à l'évolution des mathématiques, j'ai peur d'être trop précis. Mais j'aimerais faire quelques remarques générales à leur sujet. Je pense que les circonstances de leur évolution sont probablement plus instructives pour un public scientifique général que de considérer exactement ce qui s'est passé ; et encore plus que ce que tout le monde pense qu'il va se passer dans dix ans à compter d'aujourd'hui. Les circonstances de cette évolution sont très typiques et très instructives.

Encore une fois, en analysant le rôle de la science dans la vie ou dans les autres sciences, une chose est très visible. Il existe de vastes domaines des mathématiques qui ont été très utiles en pratique. Cette utilité pratique, cependant, est parfois une forme d'utilité pratique plutôt indirecte.

Par exemple, un mathématicien exprime généralement qu'une théorie est directe-

ment utile si elle peut être utilisée en physique théorique. Après quoi, il doit encore dire que les avancées en physique théorique ne sont utiles que si elles sont utiles en physique expérimentale. Après quoi, on doit dire qu'un concept en physique expérimentale est, selon des critères ordinaires, utile s'il est utile en ingénierie. Même après l'ingénierie, vous pouvez faire un pas de plus. Donc, tous ces concepts d'utilité sont assez limités, et nous entendons seulement par là que chaque science devrait avoir des applications en dehors de son propre domaine, et qu'il existe une direction dans cette séquence d'applications vers des applications pratiques en vue d'une utilisation. Cependant, si l'on ne chipote pas sur la définition de l'utilité, cela signifie par exemple que selon les normes du mathématicien, tout ce qui n'est pas mathématique est utile, alors il faut dire que de grands pans de connaissance ont été utiles. Aussi, ces très grandes zones sont vraiment directement utiles par la somme de tous ces critères. En effet, ces choses ont vraiment fait une grande différence dans le monde dans lequel nous vivons, généralement un peu après leur entrée dans un autre domaine, mais toujours de telle manière que la partie mathématique est assez vitale de façon évidente.

Maintenant, il est très intéressant que la majorité de ces choses aient été développées avec très peu d'utilité et très souvent sans aucun soupçon de devenir utiles plus tard, pour des raisons d'un tout autre caractère. C'est une situation caractéristique. Je pourrais mentionner certaines formes d'algèbre, dans le domaine des matrices et des opérateurs, qui ont été inventées à des moments où il n'y avait aucune raison matérielle de soupçonner que de vingt à cent ans plus tard, elles joueraient un rôle en mécanique quantique (non encore existante). Il en va de même pour les découvertes du domaine de la géométrie différentielle, pour laquelle il n'y avait absolument aucune raison qu'un jour, il y aurait une théorie de la relativité générale, et que la théorie de la relativité utiliserait ce type de géométrie. Pourtant, ces choses sont tout à fait vitales.

Les exemples pourraient être multipliés.

Je dois dire, cependant, qu'il existe également des exemples du contraire. Un exemple très important est que le calcul a certainement été inventé par Newton pour un but spécifique en physique théorique.

Mais une grande partie des mathématiques qui sont devenues utiles ont été développées sans aucun désir d'être utiles, et dans une situation où personne ne pouvait savoir dans quel domaine elles deviendraient utiles ; et il n'y avait aucune indication générale qu'il en serait jamais ainsi. Dans l'ensemble, il est uniformément vrai en mathématiques qu'il y a un laps de temps entre une découverte mathématique et le moment où elle est utile ; et que ce laps de temps peut aller de trente à cent ans, dans certains cas même plus ; et que l'ensemble du système semble fonctionner sans aucune direction, sans aucune référence à l'utilité, et sans aucune volonté de faire des

choses qui sont utiles. Bien sûr, il faut également considérer que cela est vrai pour l'ensemble du cours de toute science ; en d'autres termes, vous devriez considérer par quels processus une grande partie de la science est arrivée à un point où elle affecte la société dans la vie de tous les jours : la science physique vient de la mécanique, et comme les découvertes originales en mécanique, elles étaient principalement liées à l'astronomie, et n'étaient absolument pas connectées aux domaines dans lesquels se trouvent les applications aujourd'hui.

Cela est vrai pour toute la science. Les succès sont largement dus à l'oubli total de l'objectif, ou si même on voulait quelque chose en fin de compte, en refusant de chercher à propos de sujets profitables et en se fiant uniquement à l'objectif d'élégance intellectuelle ; c'est en suivant cette règle que l'on a réellement pris de l'avance à long terme, bien mieux que n'importe quel cours strictement utilitaire ne l'aurait permis.

Je pense que ce phénomène pourrait très bien être étudié en mathématiques ; et je pense que tout le monde en science est bien placé pour se satisfaire de la validité de ces points de vue. Et je pense qu'il est extrêmement instructif de regarder le rôle de la science dans la vie de tous les jours et de noter comment, dans ce domaine, le principe du laissez-faire a conduit à des résultats étranges et merveilleux.