

Fonctions d'ondes sphéroïdales

William J. Thompson

Introduction

Les fonctions d'ondes sphéroïdales apparaissent dans de nombreux contextes scientifiques ou d'ingénierie, des noyaux atomiques au cosmos en passant par les noyaux non sphériques, les fonctions d'ondes des molécules di-atomiques et l'analyse de bruit aléatoire par bande limitée, le multiplexage par division selon des fréquences orthogonales, et l'anisotropie de micro-ondes radio du fond diffus cosmologique. Par conséquent, visualiser de telles fonctions et les calculer précisément peut être utile et intéressant.

Qu'est ce qu'une fonction d'onde sphéroïdale ?

Les fonctions d'ondes sphéroïdales sont des généralisations pour des coordonnées sphéroïdales, plutôt que pour des coordonnées polaires sphériques, des fonctions de Legendre et des fonctions sphériques de Bessel, ces dernières intervenant habituellement pour les problèmes en coordonnées sphériques. La littérature au sujet des fonctions d'ondes sphéroïdales appartient souvent au contexte d'applications spécialisées, mais deux monographies de mathématiques appliquées s'avèrent particulièrement utiles pour ce qui les concerne : celle de Julius Stratton et al. [1] et celle de Carson Flammer [2]. Joseph Meixner et al. ont trouvé des résultats analytiques ([3], [4]) et des résumés de nombreux résultats apparaissent dans *Higher Transcendental Functions*, édité par Arthur Erdélyi [5] et dans le *Handbook of mathematical functions*, édité par Milton Abramowitz et Irène Segun [6]. Pour des discussions complètes des méthodes de calcul - avec programmes en Mathematica, C et Fortran - voir mon atlas des fonctions mathématiques [7].

Coordonnées sphéroïdales

On relie les coordonnées sphéroïdales - d, η, ξ , et φ - aux coordonnées cartésiennes - x, y , et z - comme dans la monographie de Flammer pour les coordonnées *prolates*,

$$x = \frac{d}{2} \sqrt{(1 - \eta^2)(\xi^2 - 1)} \cos \varphi$$

$$y = \frac{d}{2} \sqrt{(1 - \eta^2)(\xi^2 - 1)} \sin \varphi$$

$$z = d\eta\xi/2, \quad -1 \leq \eta \leq \xi \leq 1 \text{ et } 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Université de Caroline du Nord à Chapel Hill

Traduction de l'article en anglais

<https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.717.1313rep=rep1type=pdf>
décembre 2020, Denise Vella-Chemla.

Pour les coordonnées *oblates*,

$$\begin{aligned} x &= \frac{d}{2} \sqrt{(1 - \eta^2)(\xi^2 + 1)} \cos \varphi \\ y &= \frac{d}{2} \sqrt{(1 - \eta^2)(\xi^2 + 1)} \sin \varphi \\ z &= d\eta\xi/2, \quad -1 \leq \eta \leq \xi \geq 0 \text{ et } 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{aligned}$$

Les limites $\xi \rightarrow \infty, d \rightarrow 0, d\xi/2 = r$, et $\eta = \cos \theta$ produisent des coordonnées polaires sphériques. De nombreux systèmes de coordonnées sphéroïdales utilisés par d'autres auteurs, dont Abramowitz et Stegun, n'ont pas cette propriété de limite. La Figure 1 illustre les surfaces correspondant aux valeurs de paramètres constants, η , ξ , ou φ . Le paramètre d fournit un facteur d'échelle global, comme le fait r en coordonnées polaires sphériques. Pour des détails concernant la géométrie des coordonnées sphéroïdales, voir les références de Flammer [2], Abramowitz et Stegun [6], et Parry Moon et Domina Spencer [8]. Attention, le choix des systèmes de coordonnées et des notations est assez variable !

L'équation d'onde scalaire en coordonnées sphéroïdales

Comme contexte des fonctions d'ondes sphéroïdales, considérons le fait de résoudre l'équation d'onde scalaire en coordonnées sphéroïdales. L'équation d'onde vectorielle associée pour les équations de Maxwell est fournie, mais en plus compliquée, par Flammer, par Moon et Spencer, et dans des articles techniques sur la théorie des antennes et des ondes diffractées par des sphéroïdes.

L'équation d'onde scalaire pour le nombre d'onde k - notamment, $\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$ - est séparable en coordonnées sphéroïdales en écrivant, pour les coordonnées prolates,

$$\psi_{mn} = S_{mn}(c, \eta) R_{mn}(c, \xi) \Big|_{\sin m\varphi}^{\cos m\varphi},$$

dans laquelle m est un entier si la dépendance φ a une période de 2π et si n est un entier. Cette séparabilité est analogue à celle utilisée pour résoudre l'équation de Laplace ($k = 0$) en coordonnées polaires sphériques. La fonction S_{mn} est la *fonction angulaire sphéroïdale prolate* quand k est réel, parce que dans la limite d'une petite non-sphéricité, η devient l'angle polaire θ . Le paramètre c est donné par $c \equiv kd/2 = \pi d/\lambda$, où λ est la longueur d'onde correspondant au nombre d'onde k . Ainsi, c échelonne selon le rapport de la distance à la longueur d'onde. La fonction R_{mn} est la *fonction radiale sphéroïdale prolate*, qui devient une fonction de Bessel sphérique pour la limite c nul.

Les fonctions sphéroïdales prolates satisfont l'équation 1 pour la fonction angulaire et l'équation 2 pour la fonction radiale (voir l'encadré pour toutes les équations numérotées.)

Dans ces équations, $\lambda_{mn}(c)$ est la *valeur propre sphéroïdale prolate*, avec $\lambda_{mn}(0) = n(n+1)$. Les coordonnées oblates ont une séparation similaire de l'équation d'onde.

Les résultats analytiques pour les fonctions d'ondes sphéroïdales sont habituellement présentés en fonction de celles pour les fonctions prolates. La transition vers les fonctions oblates (les fonctions angulaire et radiale, ou les valeurs propres) suivent la règle prolate $\longleftrightarrow$ oblate en faisant $c \longleftrightarrow \pm ic$, et $c^2 \longleftrightarrow -c^2$. Pourtant, toutes les fonctions sphéroïdales sont à valeurs réelles, malgré l'apparence de cette règle. Dans la suite, on donnera des résultats pour les fonctions prolates, en comprenant que cette règle doit être utilisée en analyse (mais non pas pour les calculs numériques !) pour obtenir des résultats pour les fonctions oblates. Dans un milieu dispersif (avec de la déperdition), le nombre d'onde k est un nombre complexe, et donc c est complexe. Le-Wei Li et ses collègues ont considéré ce cas [9].

Les fonctions d'ondes sphéroïdales sont habituellement développées selon une base des fonctions sphériques correspondantes, avec la nécessité de contrôler la taille du domaine des fonctions de base nécessaires pour obtenir des résultats précis.

Equations

$$\frac{d}{d\eta} \left[(1-\eta^2) \frac{dS_{mn}(c, \eta)}{d\eta} \right] + \left[\lambda_{mn} - c^2 \eta^2 - \frac{m^2}{1-\eta^2} \right] S_{mn}(c, \eta) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d}{d\xi} \left[(\xi^2 - 1) \frac{dR_{mn}(c, \xi)}{d\xi} \right] - \left[\lambda_{mn} - c^2 \xi^2 + \frac{m^2}{\xi^2 - 1} \right] R_{mn}(c, \xi) = 0 \quad (2)$$

$$\gamma_r^m \equiv (m+r)(m+r+1) + \frac{c^2}{2} \left[1 - \frac{4m^2 - 1}{(2m+2r-1)(2m+2r+3)} \right] \quad (3)$$

$$\beta_r^m \equiv \frac{r(r-1)(2m+r)(2m+r-1)c^4}{(2m+2r-1)^2(2m+2r-3)(2m+2r+1)} \quad (4)$$

$$U_1(\lambda_{mn}) \equiv \gamma_{n-m}^m - \lambda_{mn} - \frac{\beta_{n-m}^m}{\gamma_{n-m-2}^m - \lambda_{mn} - \frac{\beta_{n-m-2}^m}{\gamma_{n-m-4}^m - \lambda_{mn} - \dots}} \quad (5)$$

$$U_2(\lambda_{mn}) \equiv -\frac{\beta_{n-m+2}^m}{\gamma_{n-m+2}^m - \lambda_{mn} - \frac{\beta_{n-m+4}^m}{\gamma_{n-m+4}^m - \lambda_{mn} - \dots}} \quad (6)$$

$$R_{mn}^{(1)}(c, \xi) = (1-\xi^2)^{m/2} \sum_{r=0,1}^{\infty} a_r^{mn}(c) j_{m+r}(c\xi) \quad (7)$$

Valeurs propres pour les équations sphéroïdales

Le calcul précis des valeurs propres λ_{mn} est difficile, fastidieux et chronophage. On présente les formules nécessaires ; pour leur démonstration, voir la monographie de Flammer [2]. On fournit ici une méthode par force brute.

D'abord, définissons deux fonctions qui dépendent de m , n , et c (mais non de la valeur propre), comme cela est présenté dans les équations 3 et 4. Combinons alors ces fonctions pour définir deux

fonctions de λ_{mn} (voir les équations 5 et 6). La première fraction continue se termine soit par le terme contenant γ_0^m soit par le terme avec γ_1^m , suivant que $n - m$ est pair ou impair, alors que la seconde fraction ne se termine pas (en principe). Comme la limite supérieure de la seconde fraction augmente, la précision avec laquelle λ_{mn} peut être déterminée augmente.

La valeur propre λ_{mn} est racine de l'équation transcendante $U(\lambda_{mn}) \equiv U_1(\lambda_{mn}) + U_2(\lambda_{mn}) = 0$. Cette équation n'a pas de solutions de forme fermée, sauf si $c = 0$ quand $\lambda_{mn} = n(n + 1)$ ou si la déformation est grande. Les valeurs propres précises sont la première étape essentielle pour déterminer les fonctions d'ondes sphéroïdales. Les valeurs propres peuvent être estimées en développement en série de puissances en c ou en séries asymptotiques en c et leurs puissances inverses. Les formules lourdes résultantes sont plus précises seulement par des ordres du millionième pour de très petites ou de très grandes valeurs de c . Si la distance interfocale des coordonnées sphéroïdales $d \approx \lambda$, une condition qui est souvent intéressante, alors $c \approx 3$. Pour de telles valeurs de c , les formules en séries donnent une précision de seulement un tout petit pourcentage pour la plupart des valeurs de m et n .

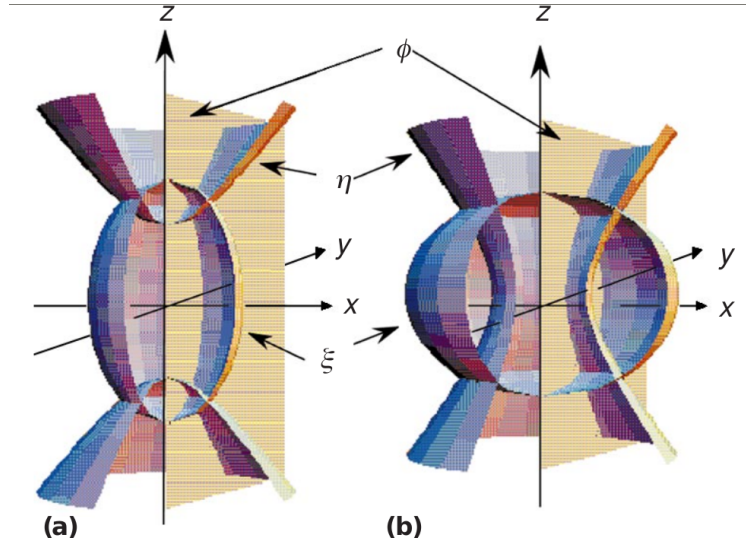


FIGURE 1. *Coordonnées sphéroïdales : (a) prolates ; (b) oblates. η , ξ , et φ sont les valeurs des paramètres constants. Les surfaces des coordonnées sont des hyperboloïdes de révolution pour η et des demi-plans pour φ .*

Pour m et n de 0 à 6, et pour c d'une grandeur inférieure à 3, les valeurs propres ont une dépendance uniforme, lente du paramètre de déformation c . Pour les cas oblate et prolata, $\lambda_{mn}(c)$ dévie de la valeur en coordonnées sphériques, $n(n + 1)$, dans des directions opposées. Cette déviation est consistante avec le terme principal dans un développement en série selon une puissance quadratique de c . Quand c est petit, les effets de la non-sphéricité deviennent en général de plus en plus petits au fur et à mesure que n croît.

Pour calculer numériquement les valeurs propres, nous pouvons commencer avec des solutions approchantes dérivées des séries de puissances ou des développements asymptotiques, et préciser ces solutions par un algorithme robuste de recherche de racines. Utiliser n'importe quelle méthode pour démarrer donne des estimations des valeurs propres qui sont habituellement dans un rapport de

0.2 aux valeurs propres finales. Nous pouvons alors utiliser un solveur robuste et simple, comme la méthode dichotomique, pour localiser les racines. Typiquement, une douzaine de bisections produit une précision d'un par mille en $\lambda_{mn}(c)$, et environ 30 bisections résultent en une précision sur 10 décimales, la précision que l'on fournit pour les fonctions dans l'atlas [7].

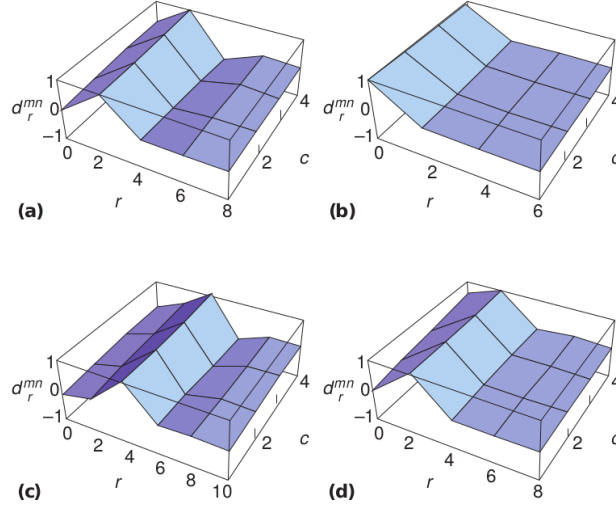


FIGURE 2. Coefficients pour développer les fonctions d'ondes sphéroïdales dans une base de fonctions de Legendre, pour m et n valant (a) 0, 2 ; (b) 2, 2 ; (c) 0, 4 ; et (d) 2, 4. Le pic des coefficients en $r = n - m$, qui est l'unique valeur quand le coefficient de "prolaticité" $c = 0$.

Quand c est petit, les valeurs propres s'éloignent aisément de la valeur en coordonnées sphériques. On peut s'attendre à ce que les racines de l'équation aux valeurs propres soient uniques, comme des recherches précédentes l'avaient supposé. Pourtant, lorsque m et n croissent, il n'en est pas forcément ainsi [3], [4], [7].

Fonctions sphéroïdales angulaires

Les fonctions sphéroïdales angulaires se développent habituellement en fonctions sphériques de Legendre de première espèce, $P_{m+r}^m(\eta)$, ou de seconde espèce, $Q_{m+r}^m(\eta)$.

Pour les fonctions de première espèce, qui sont régulières en $\eta = \pm 1$, on écrit

$$S_{mn}^{(1)}(c, \eta) = \sum_{r=0,1}^{\infty} d_r^{mn}(c) P_{m+r}^m(\eta),$$

avec la somme commençant à $r = 0$ si $n - m$ est pair ou bien à $r = 1$ si $n - m$ est impair. Dans tous les cas, r va de 2 en 2. Comme $c \rightarrow 0$, les fonctions sphéroïdales angulaires tendent vers $P_{m+r}^m(\eta)$ pour les mêmes valeurs de m et n . Le seul coefficient angulaire non nul est alors $d_{n-m}^{mn}(c)$ correspondant à $r = n - m$. Pour les fonctions de seconde espèce, qui sont irrégulières en $\eta = \pm 1$, on a

$$S_{mn}^{(2)}(c, \eta) = \sum_{r=0,1}^{\infty} d_r^{mn}(c) Q_{m+r}^m(\eta),$$

Lorsque $c \rightarrow 0$, cela tend vers $Q_n^m(\eta)$, de telle façon que le seul coefficient angulaire non nul est, $d_{n-m}^{mn}(c)$ - c'est-à-dire, $r = n - m$.

On peut calculer les coefficients angulaires sphéroïdaux $d_r^{mn}(c)$ en utilisant la relation de récurrence

$$\alpha_r d_{r+2}^{mn} + (\beta_r - \lambda_{mn}) d_r^{mn} + \gamma_r d_{r-2}^{mn} = 0,$$

avec α_r et γ_r donnés par

$$\alpha_r = \frac{(2m + r + 2)(2m + r + 1)c^2}{(2m + 2r + 3)(2m + 2r + 5)}$$

et

$$\gamma_r = \frac{r(r - 1)c^2}{(2m + 2r - 3)(2m + 2r - 1)}.$$

La récurrence peut être utilisée pour r croissant ou décroissant. Pour des petites valeurs de $n - m$, la seconde donne des résultats plus précis.

(Les calculs ont vraiment progressé ces 40 dernières années. Les 75 000 valeurs numériques que Stratton et al. ont utilisées avaient nécessité "environ six mois d'un effort assez intensif" de deux programmeurs et 10 heures de temps de production sur un ordinateur du MIT Whirlwind I [1]. La sortie obtenue nécessitant plus de cinq kilomètres d'enregistrements papier, desquels ont pu être préparées des tables sur une machine à écrire électrique. Un ordinateur moderne réduit et le temps d'exécution et le volume machine d'un facteur de 1 000 environ.)

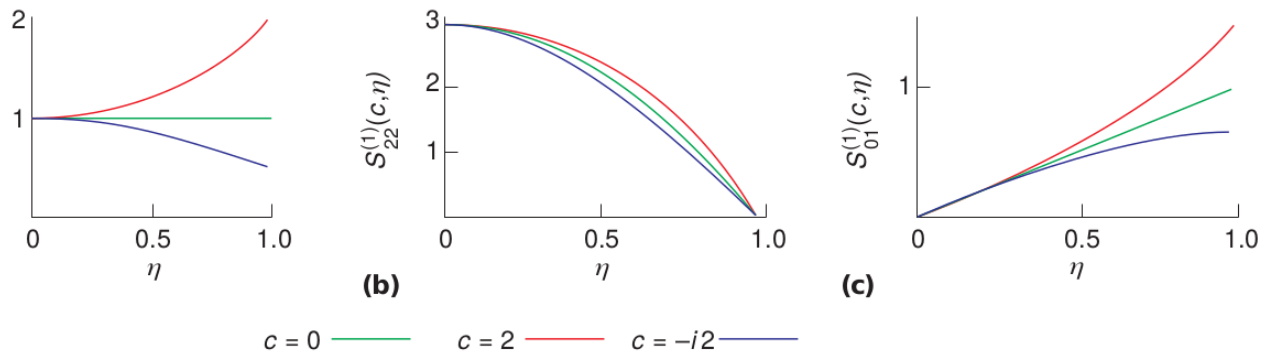


FIGURE 3. Les fonctions angulaires sphéroïdales de la première espèce, pour les coordonnées prolates ($c = 2$), sphériques ($c = 0$), et oblates ($c = -i2$), pour des valeurs de m et n valant (a) 0,0 ; (b) 2,2 ; et (c) 0,1.

Les coefficients de développement pour la partie angulaire des fonctions d'ondes sphéroïdales dépendent de l'ordre n , du degré m , et du paramètre c , et du fait que vous utilisiez des coordonnées prolates ou oblates. La Figure 2 montre les valeurs $d_r^{mn}(c)$ comme des surfaces de quadrilatères

dont les sommets sont les valeurs des coefficients. Les coefficients pour les coordonnées oblates se comportent de la même manière que pour les coordonnées prolates. Si c^2 est beaucoup plus grand que montré ici, pourtant, le comportement des $d_r^{mn}(c)$ devient compliqué.

Il y a quatre paramètres pour chaque fonction sphéroïdale angulaire de la première et de la seconde espèce : m , n , c , et η . Pour visualiser $S_{mn}^{(1)}(c, \eta)$, on choisit $|c| = 2$ et on superpose trois courbes pour chaque m et n : $c = 2$ (cas prolates), $c = 0$ (cas sphérique), et $|c| = 2$ (cas oblates). Pour $c = 0$, nous avons les fonctions sphériques de Legendre, $P_n^m(\eta)$. Pour les fonctions régulières, la Figure 3 montre $S_{mn}^{(1)}(c, \eta)$ pour η dans $[0, 1]$. La fonction angulaire sphérique est presque la moyenne des valeurs pour les coordonnées prolates et oblates, indiquant que les $d_r^{mn}(c)$ sont approximativement des fonctions paires de c .

Fonctions radiales sphéroïdales

Les fonctions radiales sphéroïdales, $R_{mn}(c, \xi)$, sont habituellement développées dans une base de fonctions sphériques de Bessel [7]. Les développements sont assez simples, parce que les coefficients de développement radiaux sont proportionnels aux coefficients de développement angulaire. Un ensemble donné de fonctions sphériques radiales de base (Bessel, Neumann, ou Hankel) a ses fonctions sphéroïdales radiales correspondantes. On citera la fonction radiale sphéroïdale appelée $R_{mn}^{(1)}(c, \xi)$ par Flammer [2], par Abramowitz et Stegun [6], et dans mon atlas [7], mais appelée $je_{m\ell}(b, \xi)$ par Stratton et al. [1], où $\ell = n$ et $h = c$ dans notre notation. Quand $c = 0$, $R_{mn}^{(1)}(c, \xi)$ tend vers $j_n(c\xi)$, la fonction sphérique de Bessel.

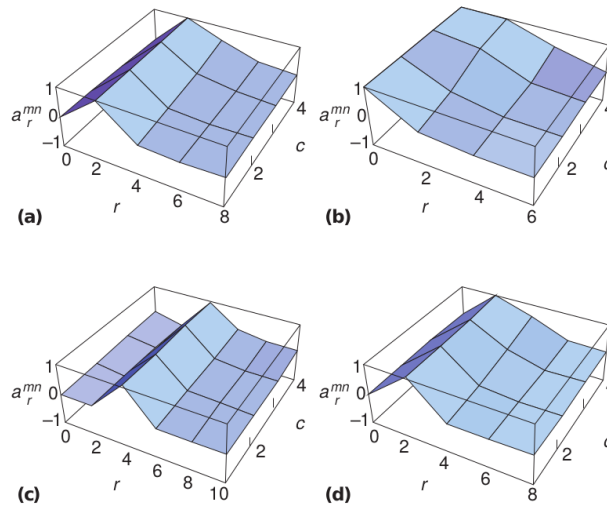


FIGURE 4. Les coefficients radiaux pour un développement en fonctions de Bessel, pour m et n valant (a) 0,2 ; (b) 2,2 ; (c) 0,4 ; et (d) 2, 4. Le pic des coefficients en $r = n - m$, la valeur unique quand $c = 0$.

La fonction sphéroïdale radiale type est régulière en $\xi = \pm 1$ et se développe en fonction des fonctions de Bessel sphériques régulières comme montré dans l'équation 7. Dans cette équation, on calcule la somme en commençant à $r = 0$ si $n - m$ est pair ou bien à $r = 1$ si $n - m$ est impair. Dans tous les cas, r va de deux en deux. Les coefficients $a_r^{mn}(c)$ sont les *coefficients de développement radial*.

Lorsque $c \rightarrow 0$, la fonction sphéroïdale radiale tend vers $j_n(c\xi)$, et le seul coefficient radial non nul est alors $a_{n-m}^{mn}(0)$, correspondant à $r = n - m$.

Nous pouvons facilement calculer les coefficients sphéroïdaux radiaux en fonction des coefficients angulaires d_r^{mn} . Bien que la normalisation des coefficients angulaires soit différente selon que l'on utilise la référence Stratton et al. [1] ou la référence Flammer [2], les coefficients radiaux sont les mêmes. La Figure 4 montre les valeurs $a_t^{mn}(c)$ comme des surfaces de quadrilatères dont les sommets sont les valeurs des coefficients radiaux. Pour visualiser $R_{mn}^{(1)}(c, \xi)$, on choisit $|c| = 2$ et on montre deux courbes pour chaque m et n : $|c| = 2$ (coordonnées prolates) et $c = -i2$ (coordonnées oblates), comme dans la Figure 5.

Après avoir calculé les fonctions d'ondes angulaire et radiale, on peut calculer la fonction d'onde complète, ce qui peut aider à résoudre de nombreux problèmes intéressants posés à des scientifiques ou des ingénieurs.

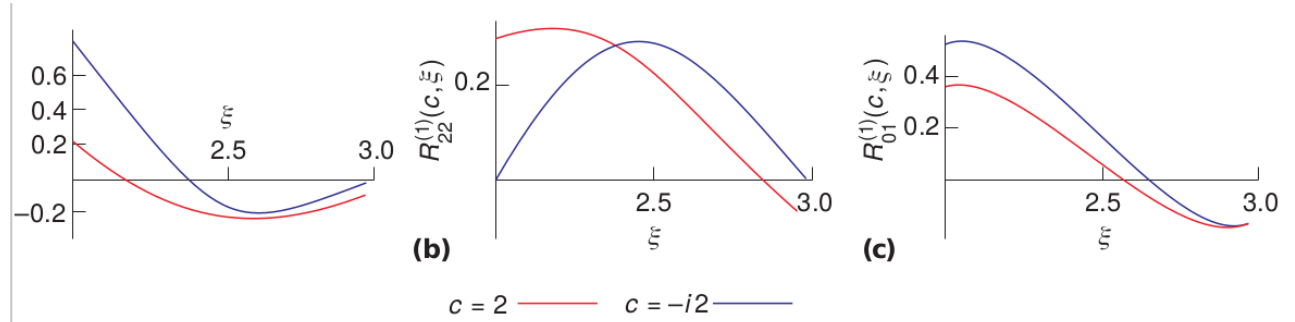


FIGURE 5. *Fonctions radiales sphéroïdales de première espèce pour les coordonnées prolates ($c = 2$) et oblates ($c = -i2$) pour m et n valant (a) $0,0$; (b) $2,2$; et (c) $0,1$.*

Références

- [1] J. A. Stratton et al., *Spheroidal Wave Functions*, Technology Press of M.I.T. and John Wiley and Sons, New York, 1956.
- [2] C. Flammer, *Spheroidal Wave Functions*, Stanford Univ. Press, Stanford, Calif., 1957.
- [3] J. Meixner and F. W. Schäfke, *Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen* (Mathieu Functions and spheroidal Functions), Springer-Verlag, Berlin, 1954.
- [4] J. Meixner, F. W. Schäfke, and G. Wolf, *Mathieu Functions and spheroidal Functions and Their Mathematical Foundations*, Springer-Verlag, 1980.
- [5] A Erdélyi et al., *Higher transcendental Functions*, Vol. 3, McGraw-Hill, New York, 1953 ; reprint edition, Krieger Publishing Co., Malabar, Fla., 1981.

- [6] M. Abramowitz and I. A. Stegun, eds, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1964.
- [7] W. J. Thompson, *Atlas for Computing Mathematical Functions*, John Wiley and Sons, 1997, Ch. 13.
- [8] P. Moon and D. E. Spencer, *Field Theory Handbook*, 2nd ed., Springer-Verlag, 1971.
- [9] L. W. Li et al., “Computations of Spheroidal Harmonics with Complex Arguments: A Review with an Algorithm,” *Physical Rev. E : Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics*, Vol. 58, No. 5, Nov. 1998, p. 6792-6806.