La vie et l'œuvre d'André Weil

Jean-Pierre Serre

André Weil est mort à Princeton, en août 1998. Il avait 92 ans. Ses dernières années avaient été assombries par la disparition de sa femme, Eveline, ainsi que par les infirmités du grand âge. La mort a peut-être été pour lui une délivrance.

Le bureau de l'Académie m'a demandé d'évoquer devant vous sa vie et son œuvre.

Il était né à Paris, en 1906, d'une famille juive. Son père, médecin, était d'origine alsacienne, sa mère, d'origine autrichienne et née en Russie. Il avait une sœur, Simone, plus jeune que lui de trois ans ; les deux enfants étaient très proches l'un de l'autre, et le sont restés jusqu'à la mort de Simone en 1943 ; André Weil s'est beaucoup occupé ensuite de la publication des nombreux textes inédits laissés par sa sœur.

On trouve dans ses *Souvenirs d'Apprentissage* ([**1991**]) un récit charmant de l'éducation à la fois soignée et peu orthodoxe qu'il a reçue. Bilan : un goût très vif pour les langues anciennes (latin, grec, sanscrit) et une vocation bien affirmée de mathématicien. Cela le conduit à entrer à l'École Normale Supérieure en 1922, alors qu'il n'a que 16 ans (la tradition normalienne veut qu'il s'y promenait en culottes courtes). Il en sort en 1925, reçu premier à l'agrégation malgré une copie blanche à l'épreuve de mécanique rationnelle, sujet qui ne lui paraissait pas faire partie des mathématiques. Il s'en va en Italie, puis en Allemagne, où se trouvaient certains des meilleurs mathématiciens de l'époque tels Hilbert, Artin, von Neumann, Siegel. Il soutient sa thèse en 1928, à 22 ans. Il est professeur en Inde (à Aligarh) pendant deux ans ; il y occupe un poste que lui avait procuré l'indianiste Sylvain Levi dont il avait suivi les cours de sanscrit au Collège de France. Ensuite, c'est Marseille, puis Strasbourg de 1933 à 1939. C'est pendant son séjour à Strasbourg qu'il s'associe à des amis de l'École Normale (Henri Cartan, Jean Dieudonné, Jean Delsarte,...) pour créer le groupe Bourbaki. En 1939, au moment de la

L'Enseignement Mathématique, 1. 45 (1999), p. 5-16. Texte lu à l'Académie des Sciences de Paris le 1er mars 1999. Cet article paraîtra aussi dans les *Discours et Notices Biographiques*, Acad. Sci, Paris, *vol. 2* (1999).

déclaration de guerre, il se rend en Finlande ; après avoir failli y être fusillé comme espion soviétique, il revient en France et est incarcéré à la prison de Rouen. Condamné pour insoumission, il est bientôt libéré, et après diverses aventures (décrites dans ses *Souvenirs*), il réussit à partir pour les États-Unis en 1940. Il y reste quelques années avant d'aller au Brésil pour deux ans. Ce n'est qu'en 1947 qu'il reçoit enfin un poste correspondant à son niveau : il est professeur à l'Université de Chicago, puis (en 1958) à l'Institute for Advanced Study de Princeton, où il passe les quarante dernières années de sa vie. L'Institute lui convenait fort bien, à la fois par la liberté qu'il lui donnait pour enseigner (ou ne pas enseigner, s'il le préférait), et par le niveau de ses professeurs et de ses visiteurs. (Sa place naturelle, chez nous, aurait été le Collège de France ; j'ai souvent rêvé à ce qu'eût été une chaire de Mathématique qu'il aurait occupée ! Hélas, cela n'a pas pu se faire.

Pour en terminer avec l'aspect "universitaire" de Weil, je mentionne quelques-unes des distinctions qu'il a reçues (ou plutôt qu'il a accepté de recevoir) : il était membre de l'Académie des Sciences des USA et de la Royal Society de Londres ; il a eu le prix Wolf en 1979 (en même temps que Jean Leray, et un an avant Henri Cartan), et le prix Kyoto en 1994 ; il semble que ce dernier prix lui ait fait particulièrement plaisir à cause des excellentes relations qu'il a toujours eues avec les mathématiciens japonais :

J'en viens maintenant à l'essentiel, c'est-à-dire à ses travaux. Sa première publication est une Note aux Comptes rendus ([1926]). Dans les cinquante ans qui ont suivi, il a publié une dizaine d'ouvrages et une centaine d'articles, rédigés en français ou en anglais, parfois en allemand. Ces articles ont été rassemblés dans les trois volumes de ses *Œuvres Mathématiques*, publiés par la maison d'édition Springer-Verlag ([**1979**]). Weil leur a adjoint de précieux *Commentaires*, où il explique leur genèse.

Il n'est pas possible de classer ces textes par sujets. Trop de thèmes différents s'y croisent. Bien sûr, on pourrait s'amuser, à la mode américaine, à y relever des mots significatifs (*Keywords*) : zêta, Siegel, points rationnels, variétés abéliennes,... Ce ne serait guère sérieux. La seule possibilité me paraît être de suivre l'ordre chronologique, qui est d'ailleurs celui adopté dans les Œuvres.

1. Commençons par la thèse ([1928]). Il s'agit de théorie des nombres, et plus particulièrement d'équations diophantiennes, c'est-à-dire de points rationnels sur des variétés algébriques. A l'époque, la seule méthode connue était la méthode de *descente*, due à Fermat. Toutefois, l'emploi de cette méthode était subordonné à des calculs explicites, quelque peu miraculeux, qu'il fallait faire dans chaque cas particulier. Weil est le premier à voir qu'il y a derrière ces calculs un principe général, qu'il appelle le *théorème de décomposition* ; ce théorème effectue une sorte de transfert entre propriétés algébriques (en principe faciles) et propriétés arithmétiques (plus difficiles). Il en déduit ce que nous appelons maintenant le *théorème de Mordell-Weil* : le groupe des points d'une variété abélienne qui sont rationnels sur un corps de nombres donné est de type fini. La démonstration est loin d'être aisée : la géométrie algébrique de l'époque ne disposait pas des outils nécessaires. Heureusement, Weil, qui s'était pénétré de l'œuvre de Riemann dès l'École Normale, peut remplacer l'algèbre, qui lui manque, par l'analyse : fonctions thêta. Il parvient finalement au but.

"But" ? Le mot n'est pas exact. En fait, comme dans presque tous les travaux de Weil, il s'agit plutôt d'un *point de départ*, à partir duquel on peut attaquer d'autres questions. Dans le cas présent, ces questions sont les suivantes :

- Prouver la finitude des points *entiers* d'une courbe affine de genre > 0. Cela a été fait, un an plus tard, par Siegel, en combinant les idées de Weil avec celles de la théorie des nombres transcendants.

- Prouver la finitude des points rationnels en genre > 1 (*conjecture de Mordell*). Cela a été fait, cinquante-cinq ans plus tard, par Faltings.

- Rendre *effectifs* (c'est-à-dire explicitables) les résultats qualitatifs de Mordell-Weil, Siegel et Faltings. Pour Siegel, cela a été fait, au moins partiellement, par Baker (1966-1968) ; pour Mordell-Weil et Faltings, la question est toujours ouverte (et intéresse beaucoup les arithméticiens).

2. Dans les années qui suivent sa thèse, Weil explore diverses pistes pouvant mener à la conjecture de Mordell. L'une d'elles le conduit à son grand mémoire *Généralisation des fonctions abéliennes* ([1938a]), un texte qui se présente comme de l'Analyse, mais dont la signification est essentiellement algébrique, alors que sa motivation est arithmétique ! (Qui d'autre que Weil et Siegel ont pu comprendre ce texte en 1938 ? On peut se le demander.) Le succès de sa thèse reposait sur l'emploi des variétés abéliennes, et en particulier des jacobiennes. Weil est persuadé qu'il faut sortir du cadre abélien.

La jacobienne paramètre les fibrés vectoriels de rang 1 (et de degré 0) ; il faut paramétrer des fibrés de rang quelconque (autrement dit passer de $\mathbf{GL_1}$ à $\mathbf{GL_n}$ - ce sera l'un de ses thèmes favoris). Mais en 1938 personne, pas même lui, ne sait ce qu'est un fibré vectoriel analytique, et encore moins algébrique : ce n'est qu'une dizaine d'années plus tard que cette notion sera dégagée (par Weil lui-même). Ce détail ne l'arrête pas. Il introduit une notion équivalente à celle de fibré vectoriel, celle de "classe de diviseurs matriciels", et démontre par voie analytique (en suivant Riemann et Poincaré) la *formule de Riemann-Roch* et ce que nous appelons maintenant le *théorème de dualité* (qu'il appelle "théorème de Riemann-Roch non homogène"). Un beau tour de force ! Mais définir des fibrés ne suffit pas ; ce qu'il cherche, ce sont leurs "variétés de modules", qui doivent remplacer les jacobiennes. Du point de vue de la géométrie algébrique, c'est un problème de passage au quotient très sérieux ; il n'a été résolu que quelque vingt ans plus tard, par Grothendieck et Mumford. Weil doit se contenter de résultats partiels, en bonne partie non démontrés (mais qui se révéleront essentiellement corrects) ; *a fortiori*, il ne peut en donner aucune application arithmétique. Un échec, donc ? Non, car ce qu'il fait sur Riemann-Roch servira à d'autres de modèle, quinze ans plus tard ; quant aux variétés de modules qu'il tentait de construire, elles se sont révélées essentielles dans d'autres questions : en géométrie différentielle, avec Donaldson, et en caractéristique $p > 0$, avec Drinfeld.

3. Pendant la période dont je parle (1928-1940), Weil est loin de ne s'occuper que de théorie des nombres. Voici quelques-unes de ses autres activités :

- en analyse complexe à plusieurs variables, introduction d'une intégrale généralisant celle de Cauchy, et que l'on appelle maintenant *l'intégrale de Weil* ([1932b] et [1935d]) ; il en déduit une généralisation du théorème de Runge : si D est un domaine borné défini par des inégalités polynomiales, toute fonction holomorphe sur D est limite de polynômes pour la topologie de la convergence compacte ;

- en théorie des groupes de Lie compacts, utilisation de méthodes topologiques (formule de Lefschetz) pour démontrer la conjugaison des tores maximaux ([1935e]) ;

- en analyse ultramétrique (sujet qui était en enfance), définition des fonctions elliptiques p-adiques ([1936h]) ;

- en topologie, définition des espaces uniformes ([1937]) ;

- il publie chez Hermann un ouvrage : *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications* ([**1940d**]) où il expose, sous une forme à la fois bourbachique, élégante, et concise, les deux aspects de cette théorie qui étaient accessibles à l'époque : le cas des groupes compacts (relations d'orthogonalité des caractères) et celui des groupes commutatifs (dualité de Pontrjagin et transformation de Fourier).

4. Revenons maintenant à la théorie des nombres, et à la géométrie algébrique, avec la célèbre Note de 1940 :

Entre 1925 et 1940, l'école allemande, sous l'impulsion d'Artin et de Hasse, avait mis en évidence de remarquables analogies entre les corps de nombres algébriques et les corps de fonctions d'une variable sur un corps fini (en langage géométrique : courbes sur un corps fini). Les uns comme les autres possèdent des *fonctions zêta*, pour lesquelles la question de *l'hypothèse de Riemann* se pose. Dans le cas des corps de fonctions, Hasse était parvenu à démontrer cette hypothèse lorsque le genre est 1. Comment attaquer les genres > 1 ? C'est pendant son séjour à Rouen de 1940 que Weil voit la solution : au lieu de travailler uniquement avec des courbes, autrement dit avec des variétés de dimension 1, on doit utiliser des variétés de dimension plus grande (surfaces, variétés abéliennes) et leur adapter des résultats démontrés (sur le corps des nombres complexes) par voie topologique ou analytique. Il envoie aux *Comptes rendus* une Note ([1940b]) qui commence ainsi :

> "Je vais résumer dans cette Note la solution des principaux problèmes de la théorie des fonctions algébriques à corps de constantes fini..."

Cette Note contient une esquisse de démonstration, pas davantage. Tout repose sur un "lemme important", tiré de la géométrie italienne. Comment démontrer ce lemme ? Weil se rend bientôt compte que ce n'est possible qu'en reprenant entièrement les définitions et les résultats de base de la géométrie algébrique, et en particulier ceux de la théorie des intersections (permettant un calcul des cycles remplaçant l'homologie manquante). Il est ainsi amené à écrire *Foundations of Algebraic Geometry* ([**1946a**]), ouvrage massif (et quelque peu aride) de 300 pages, qui n'a été remplacé que vingt ans plus tard par les non moins massifs et arides *Éléments de Géométrie Algébrique* de Grothendieck. Une fois les Foundations rédigées, Weil peut revenir aux courbes et à leur hypothèse de Riemann. Il publie coup sur coup deux ouvrages : *Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent* ([**1948a**]) et *Variétés abéliennes et courbes algébriques* ([**1948b**]). Après huit années, et plus de 500 pages, sa Note de 1940 est enfin justifiée !

Quelles sont les retombées ? Tout d'abord, l'hypothèse de Riemann a des applications concrètes. Elle donne des majorations de sommes trigonométriques à une variable ([1948c]), par exemple la suivante (utile dans la théorie des formes modulaires) :

$$\left|\sum cos(2\pi(x+x')/p)\right| \leq 2\sqrt{p} \qquad (p \text{ premier}),$$

où la sommation porte sur les entiers x tels que $0 < x < p$, et x' désigne l'inverse de x modulo p.

De plus, Weil est amené, non seulement à donner des fondements solides à la géométrie algébrique, mais aussi à développer une théorie algébro-géométrique des variétés abéliennes, parallèle à la théorie analytique basée sur les fonctions thêta. Les variétés abéliennes sont longtemps restées un de ses thèmes favoris (cf. [1952e], [1954g], [1976b], [1977c]), avec notamment la théorie de la multiplication complexe ([1955c] et [1955d]), obtenue simultanément (et indépendamment) par Taniyama et Shimura.

5. Guidé par le cas des courbes, ainsi que par des calculs explicites dans le cas des hypersurfaces monomiales, Weil formule ([1949b]) ce que l'on a tout de suite appelé les *conjectures de Weil*. Ces conjectures portent sur les variétés (projectives, non singulières) sur un corps fini. Elles reviennent à supposer que les méthodes topologiques de Riemann, Lefschetz, Hodge, s'appliquent en caractéristique $p > 0$; dans cette optique, le nombre de solutions d'une équation (mod p) apparaît comme un nombre de points fixes, et doit donc pouvoir être calculé par la formule des traces de Lefschetz. Cette idée, vraiment révolutionnaire, a enthousiasmé les mathématiciens de l'époque (je peux en témoigner de première main) ; elle a été à l'origine d'une bonne partie des progrès de la géométrie algébrique dans les années qui ont suivi. L'objectif cherché n'a été atteint qu'après environ vingt-cinq ans, non par Weil lui-même, mais (principalement) par Grothendieck et Deligne. Les méthodes qu'ils ont été amenés à développer comptent parmi les plus puissantes de la géométrie algébrique actuelle ; elles ont eu des applications à des sujets aussi divers que la théorie des formes modulaires (ce qu'avait d'ailleurs pressenti Weil) et la détermination des caractères des groupes finis "algébriques" (Deligne-Lusztig).

6. Weil revient à l'arithmétique avec son travail de 1951 sur la théorie du corps de classes ([1951b]). Cette théorie avait atteint en 1927 une forme en apparence définitive avec la démonstration par Artin de la loi générale de réciprocité. Dans le langage introduit par Chevalley, le résultat principal s'énonce en disant que le groupe de Galois de l'extension abélienne maximale d'un corps de nombres K est isomorphe au quotient C_K/D_K, où C_K est le groupe des classes d'idèles de K, et D_K est sa composante connexe. (Ainsi, on décrit ce qui se passe au-dessus de K par des données tirées de K lui-même, tout comme un topologue décrit les revêtements d'un espace à partir des classes de lacets de celui-ci.) Toutefois, un aspect désagréable de cette théorie est que ce n'est pas le groupe C_K qui est un groupe de Galois, mais seulement son quotient C_K/D_K. Weil part de l'idée que le groupe C_K lui-même doit être un groupe de Galois en un sens convenable (en quel sens ? nous ne le savons toujours pas). Si c'est vrai, cela entraîne de remarquables propriétés fonctorielles des groupes C_K (par exemple, si L/K est une extension galoisienne finie, il doit y avoir une extension canonique de $\mathrm{Gal}(L/K)$ par C_L). On peut se proposer de démontrer directement ces propriétés. C'est ce que fait Weil. Ici encore, les retombées sont importantes :

- on est amené à étudier les groupes de cohomologie des groupes C_L ; c'est l'origine des méthodes cohomologiques en théorie du corps de classes, développées par Nakayama, Hochschild, Artin, Tate,...

- les nouveaux "groupes de Weil" ainsi définis permettent de définir de nouveaux types de fonctions L, contenant comme cas particuliers, à la fois les fonctions L non abéliennes d'Artin, et les fonctions L avec "Grössencharakter" de Hecke. Comme le dit Weil, on réalise ainsi le mariage d'Artin et de Hecke !

7. Peu après, Weil publie une étude ([1952b], complétée dans [1972]) sur les *formules explicites* de la théorie des nombres ; ces formules (essentiellement connues des spécialistes, semble-t-il) relient des sommes portant sur les nombres premiers à d'autres sommes portant sur les zéros des fonctions zêta. Weil les écrit de façon très suggestive (par exemple en mettant bien en évidence l'analogie entre places archimédiennes et places ultramétriques - un autre de ses thèmes favoris). Le résultat le plus intéressant est une traduction de l'hypothèse de Riemann en termes de la positivité d'une certaine distribution. Cette traduction sera-t-elle utile pour démontrer l'hypothèse de Riemann ? Il est trop tôt pour le dire.

8. Divers travaux de Weil entre 1940 et 1965 se rapportent à la géométrie différentielle. Ce sont :

- (avec Allendoerfer) formule de Gauss-Bonnet pour les polyèdres riemanniens ([1943a]) ;

- démonstration des théorèmes de de Rham (lettre à H. Cartan de 1947, cf. [1952a]) : un texte qui a beaucoup influencé Cartan pour sa mise au point de la théorie des faisceaux (due initialement à Leray) ;

- formes harmoniques et théorie de Kähler ([1947b] et [**1958a**]) ; ce sont là les outils de base de l'application des méthodes analytiques à la géométrie algébrique ;

- théorie des connexions et introduction de *l'algèbre de Weil* ([1949e]) ;

- déformations des espaces localement homogènes et des groupes discrets ([1960c], [1962b], [1964a]) ; il y démontre des théorèmes de rigidité pour les sous-groupes discrets cocompacts des groupes de Lie simples de rang > 1.

9. Dans les années 50 et 60, Weil a consacré une série d'articles à des thèmes inspirés de Siegel. Il s'est d'ailleurs exprimé là-dessus dans ses *Œuvres* (vol. I, p.544) :

> “Commenter Siegel m’a toujours paru l’une des tâches qu’un mathématicien de notre temps pouvait le plus utilement entreprendre.”

Noter le verbe “commenter” : un bel exemple d’*understatement* ! Weil fait bien plus :

Dans [**1961a**] et [1962a] il développe de façon systématique les méthodes adéliques introduites par Kuga et Tamagawa. Non seulement cela redonne les théorèmes de Siegel sur les formes quadratiques, mais cela suggère de nouveaux problèmes, par exemple celui-ci : montrer que le nombre de Tamagawa d’un groupe simplement connexe est égal à 1 (on sait maintenant, grâce aux travaux de Langlands, Lai, et Kottwitz, que la réponse est positive).

Dans ses deux mémoires des *Acta Mathematica* ([1964b] et [1965]) il revient aux formes quadratiques et à la formule de Siegel d’un point de vue tout à fait différent. Il introduit, et étudie, un nouveau groupe, le *groupe métaplectique*, ainsi qu’une représentation de ce groupe (que l’on appelle maintenant la *représentation de Weil*). La formule de Siegel se présente alors comme l’égalité de deux distributions, l’une d’elles étant une sorte de série d’Eisenstein, alors que l’autre est une moyenne de fonctions thêta. Ce résultat n’est d’ailleurs pas limité aux formes quadratiques : Weil montre qu’il s’applique à tous les groupes classiques, et qu’il entraîne des théorèmes du type local $\longleftrightarrow$ global (principe de Hasse), ainsi que des déterminations de nombres de Tamagawa.

10. L’œuvre de Hecke est aussi l’une de celles qui ont beaucoup inspiré Weil. Dans *l’Avenir des Mathématiques* ([1947a]) il parlait déjà des produits eulériens “dont les recherches de Hecke viennent seulement de nous révéler l’extrême importance en théorie des nombres et en théorie des fonctions”.

Vingt ans plus tard ([1967a]) il apporte une contribution décisive aux travaux de Hecke en montrant que certaines équations fonctionnelles pour une série de Dirichlet ainsi que pour ses “tordues” par des caractères équivalent au fait que cette série provient d’une forme modulaire. On obtient ainsi l’une de ces choses si précieuses en mathématique, un *dictionnaire*

$$\text{formes modulaires} \longleftrightarrow \text{séries de Dirichlet.}$$

L'implication $\longrightarrow$ était due à Hecke, qui avait également démontré l'implication réciproque dans le cas particulier du niveau 1 ; l'idée nouvelle de Weil a été d'utiliser la "torsion". L'un des aspects les plus intéressants de sa théorie est la façon dont les constantes des équations fonctionnelles varient par torsion (autrement dit, par produit tensoriel).

Ce travail a suscité de nombreux développements, dont certains par Weil lui-même ([**1971a**]). Il a trouvé sa place dans ce que l'on appelle la "philosophie de Langlands". L'une de ses retombées a été une formulation précise d'une conjecture un peu vague faite par Taniyama en 1955, suivant laquelle toute courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$ est "modulaire". Le travail de Weil suggère que le "niveau" modulaire nécessaire est le même que le "conducteur" de la courbe, i.e. est déterminé par des propriétés de mauvaise réduction ; cela a permis quantité de vérifications numériques, avant que le résultat ne soit finalement démontré (sous certaines restrictions techniques) par Wiles, en 1995.

11. Les dernières publications de Weil concernent l'histoire des mathématiques. C'est là un sujet qui l'intéressait depuis longtemps, comme en témoignent certaines des *Notes Historiques* de Bourbaki (en particulier celle sur le calcul différentiel et intégral dans *Fonctions d'une Variable Réelle*, chap. I-III). Il avait commencé par un bref ouvrage, à la fois mathématique et historique : *Elliptic Functions according to Eisenstein and Kronecker* ([**1976a**]) ; il dit l'avoir écrit avec beaucoup de plaisir, et ce plaisir se communique au lecteur ! Les textes suivants sont plus franchement historiques. Il faut surtout citer son *Number Theory - An approach through history from Hammurapi to Legendre* ([**1984**]) dans lequel il décrit l'histoire de la théorie des nombres jusqu'en 1800, c'est-à-dire jusqu'aux *Disquisitiones Arithmeticæ* non comprises (ses lecteurs auraient bien aimé qu'il aille plus loin, et qu'il nous parle de Gauss, Jacobi, Eisenstein, Riemann,... - il ne s'en est pas senti la force). Comme on pouvait s'y attendre avec lui, ce sont les mathématiques qui sont l'objet principal de ces livres et non pas la vie privée ni les relations sociales. Seule l'histoire des idées importe. Quel point de vue rafraîchissant !

Bien sûr, écrire de tels livres n'est pas facile. Il y faut des dons linguistiques et littéraires (Weil n'en manquait pas). Il faut aussi (et surtout) être capable de distinguer ce qui est une idée vraiment nouvelle, et ce qui relève seulement de la technique standard (il s'exprime là-dessus dans [1978b]) ;

c'est certainement ce qui est le plus difficile pour un historien non mathématicien (voir par exemple [1973], [1975a], [1978a]).

Je termine ici cette description, trop superficielle je le crains, de ce qu'a fait André Weil. Ce qui rend son œuvre unique dans les mathématiques du XX^e siècle, c'est son aspect prophétique (Weil "voit" dans l'avenir) combiné avec la précision la plus classique. Lire et étudier cette œuvre, et en discuter avec lui, auront été parmi les plus grandes joies de ma vie de mathématicien.

RÉFÉRENCES [1]

[1926] Sur les surfaces à courbure négative. *C.R. Acad. Sci. Paris 182*, 1069-1071.

[1928] L'arithmétique sur les courbes algébriques. *Acta Math. 52*, 281-315.

[1932b] Sur les séries de polynômes de deux variables complexes. *C.R. Acad. Sci. Paris 194*, 1304-1305.

[1935d] Intégrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables. *Math. Ann. 111*, 178-182.

[1935e] Démonstration topologique d'un théorème fondamental de Cartan. *C.R. Acad. Sci. Paris 200*, 518-520.

[1936h] Sur les fonctions elliptiques p-adiques. *C.R. Acad. Sci. Paris 203*, 22-24.

[1937] Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale. *Act. Sc. et Ind.* n° 551, Hermann, Paris, 3-40.

[1938a] Généralisation des fonctions abéliennes. *J. Math. Pures Appl. (IX) 17*, 47-87.

[1940b] Sur les fonctions algébriques à corps de constantes fini. *C.R. Acad. Sci. Paris 210*, 592-594.

[**1940d**] *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications.* Hermann, Paris (2^e édition 1953).

[1943a] (jointly with C. Allendoerfer) The Gauss-Bonnet theorem for Riemannian polyhedra. *Trans. Amer. Math. Soc. 53*, 101-129.

[**1946a**] *Foundations of Algebraic Geometry.* Amer. Math. Soc. Coll. vol. XXIX. New York (2nd edition 1962).

1. Les caractères gras désignent les livres et les notes de cours.

[1947a] L'avenir des mathématiques. *"Les Grands Courants de la Pensée Mathématique"*, éd. F. Le Lionnais, Cahiers du Sud, Paris, 307-320 (2[e] éd., A. Blanchard, Paris 1962).

[1947b] Sur la théorie des formes différentielles attachées à une variété analytique complexe. *Comment. Math. Helv. 20*, 110-116.

[**1948a,b**] (a) *Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent*, Hermann, Paris ; (b) *Variétés abéliennes et courbes algébriques, ibid.* [2[e] édition de (a) et (b), sous le titre collectif *"Courbes algébriques et variétés abéliennes", ibid.* 1971].

[1948c] On some exponential sums. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 34*, 204-207.

[1949b] Numbers of solutions of equations in finite fields. *Bull. Amer Math. Soc. 55*, 497-508.

[1949e] Géométrie différentielle des espaces fibrés (inédit).

[1951b] Sur la théorie du corps de classes. *J. Math. Soc. Japan 3*, 1-35.

[1952a] Sur les théorèmes de de Rham. *Comment. Math. Helv. 26*, 119-145.

[1952b] Sur les "formules explicites" de la théorie des nombres premiers. *Comm. Sém. Math. Univ. Lund* (vol. dédié à Marcel Riesz), 252-265.

[1952e] On Picard varieties. *Amer. J. Math. 74*, 865-894.

[1954g] On the projective embedding of abelian varieties, in *Algebraic geometry and Topology, À Symposium in honor of S. Lefschetz.* Princeton U. Press, 177-181.

[1955c] On a certain type of characters of the idèle-class group of an algebraic number-field, in *Proc. Intern. Symp. on Algebraic Number Theory, Tokyo-Nikko*, 1-7.

[1955d] On the theory of complex multiplication, *ibid.*, 9-22.

[**1958a**] *Introduction à l'étude des variétés kählériennes.* Hermann, Paris.

[1960c] On discrete subgroups of Lie groups. *Ann. of Math. 72*, 369-384.

[**1961a**] *Adeles and algebraic groups.* I.A.S., Princeton.

[1962a] Sur la théorie des formes quadratiques, in *Colloque sur la Théorie des Groupes Algébriques.* C.B.R.M., Bruxelles, 9-22.

[1962b] On discrete subgroups of Lie groups (ID. Ann. of Math. 75, 578-602.

[1964a] Remarks on the cohomology of groups. *Ann. of Math. 80*, 149-157.

[1964b] Sur certains groupes d'opérateurs unitaires. *Acta Math. 111*, 143-211.

[1965] Sur la formule de Siegel dans la théorie des groupes classiques. *Acta Math. 113*, 1-87.

[1967a] Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen. *Math. Ann. 168*, 149-156.

[**1971a**] *Dirichlet series and automorphic forms.* Lecture Notes N° 189, Springer.

[1972] Sur les formules explicites de la théorie des nombres. *Izv. Mat. Nauk SSSR (Ser. Mat.) 36*, 3-18.

[1973] Review of "The mathematical career of Pierre de Fermat", by M. S. Mahoney. *Bull. Amer. Math. Soc. 79*, 1138-1149.

[1975a] Review of "Leibniz in Paris 1672-1676, his growth to mathematical maturity", by Joseph E. Hofmann. *Bull. Amer. Math. Soc. 81*, 676-688.

[**1976a**] *Elliptic Functions according to Eisenstein and Kronecker.* (Ergebnisse der Mathematik, Bd. 88), Springer.

[1976b] Sur les périodes des intégrales abéliennes. *Comm. Pure Appl. Math. XXIX*, 813-819.

[1977c] Abelian varieties and the Hodge ring (inédit).

[1978a] Who betrayed Euclid ? *Arch. Hist. Exact Sci. 19*, 91-93.

[1978b] History of mathematics : Why and how. *Proc. Intern. Math. Congress, Helsinki*, vol. I, 227-236.

[**1979**] *Œuvres Scientifiques - Collected Papers*, 3 vol. Springer.

[**1984**] *Number Theory - An approach through history from Hammurapi to Legendre.* Birkhäuser.

[**1991**] *Souvenirs d'apprentissage.* Birkhäuser.

(Reçu le 3 mars 1999)

Jean-Pierre Serre
Collège de France
3, rue d'Ulm
F-75231 Paris Cedex 05
France

Une interview de Jean-Pierre Serre

Lors de l'un de ses passages au Centre International de Rencontres Mathématiques (CIRM), Jean-Pierre Serre nous avait accordé une interview dans laquelle il évoque notamment la place des mathématiques françaises dans le monde, leur évolution, le rôle si particulier des échanges et des rencontres dans cette discipline, son amour pour le Cirm, etc.

En 1951, vous avez 25 ans, vous obtenez votre Doctorat à la Sorbonne. À 30 ans, vous êtes professeur au Collège de France, titulaire de la Chaire d'Algèbre et Géométrie pendant 38 ans. Vous êtes aujourd'hui professeur honoraire. Une vie mathématique, au plus haut niveau. Quel regard portez-vous sur l'évolution des mathématiques en près de 60 ans ? Elles se pratiquent toujours de la même façon ?

Quels sont les changements depuis 60 ans ? En voici quelques-uns :

- Sur le nombre de mathématiciens : une très grande augmentation (multiplication par un facteur entre 10 et 50). Il y a 60 ans, j'avais l'impression que ce nombre était de l'ordre de celui des habitants d'un village : quelques milliers. Maintenant, il faudrait comparer à une ville, et même à une très grande ville.

  Un aspect surprenant de cette multiplication est que le niveau moyen n'a pas du tout baissé : je suis même impressionné par le grand nombre de très bons jeunes mathématiciens. C'est de bon augure pour l'avenir - d'autant plus que les problèmes importants (et non résolus) ne manquent pas.

- Autre changement : l'informatique a modifié notre technique de travail : j'y reviendrai à propos de la question n° 3.

- Changement linguistique dans les publications : il y a 60 ans, l'anglais était la langue majoritaire, mais il était suivi de près par le français et

Interview réalisée au CIRM en mars 2014

l'allemand. Maintenant, l'allemand a pratiquement disparu : le français subsiste tant bien que mal (en partie à cause de textes importants non traduits en anglais, comme ceux de Grothendieck).

L'anglais est devenu la langue standard. Cela rend les choses plus faciles pour les mathématiciens asiatiques, ou russes ; c'est aussi un appauvrissement : j'ai peur que les jeunes générations ne lisent plus (par exemple) les grands textes de l'école allemande des années 20-30.

- Rôle beaucoup plus important de la physique théorique : elle a suggéré (et aussi inspiré) beaucoup de notions nouvelles, et parfois même des démonstrations.

- Apparition de démonstrations probablement correctes mais invérifiables, soit parce qu'elles consistent en le traitement par ordinateur d'une très longue liste de cas (théorème des 4 couleurs, problème de Kepler), soit parce qu'elles demandent plusieurs milliers de pages (classification des groupes finis simples).

Parlez-nous de la place du tableau noir dans votre vie ? Dans la vie d'un mathématicien ?

Ah, le tableau noir, ce vieil ami ! Quel plaisir ! On prend un bâton de craie et on se lance ; on raconte ce que l'on a en tête, parfois sans consulter de texte écrit ; l'auditeur a le plaisir de voir fonctionner en temps réel le cerveau de l'orateur, et de suivre sa pensée au fur et à mesure qu'il reconstruit les arguments. C'est très différent des exposés sortis d'un ordinateur que le conférencier se borne à exhiber, comme s'il les extrayait du congélateur, d'un frigidaire. Autre aspect des exposés faits au tableau : s'il y a des formules compliquées et qu'on les voit s'écrire petit à petit au bout de la craie, on comprend bien mieux leur structure que si elles étaient projetées d'un seul coup sur un écran ; dans ce dernier cas, l'œil les voit, mais le cerveau ne les voit pas.

L'informatique a-t-elle révolutionné votre discipline ? Poussé de nouvelles frontières ?

Disons en termes plus simples que l'informatique a beaucoup apporté aux mathématiques :

- Rapidité des communications par internet, ce qui explique la multiplication des articles écrits en collaboration (il y en avait peu il y a 60 ans).

- Mise à la disposition d'une grande quantité d'information : si vous ne connaissez pas le sens d'un terme mathématique, ou si vous ne savez pas qui a travaillé dessus, vous pouvez souvent avoir la réponse en quelques minutes sur le web.

- Création de "TeX" qui permet aux auteurs de faire ce qui, auparavant, était fait par les imprimeurs : composer le texte et en choisir la typographie. Un grand merci à Donald Knuth !

- Possibilité de faire des expériences numériques qui étaient impossibles dans les années 50. Ces expériences suggèrent de nouveaux théorèmes (et même parfois, elles peuvent servir à les démontrer). C'est particulièrement important pour l'arithmétique, et pour la théorie des systèmes dynamiques.

La France en nombre de médaillés Fields arrive juste derrière les États-Unis. Comment expliquez-vous l'excellence française dans cette discipline ?"

N'exagérons pas : il y a aussi de très bonnes écoles russe, anglaise, etc. En ce qui concerne notre pays, j'ai l'impression que le système des grandes écoles a joué un rôle positif. En tout cas, cela fait près de 200 ans qu'il y a une école mathématique française de bonne qualité : bien sûr, avec des hauts et des bas. Depuis une cinquantaine d'années, nous semblons être dans une période de "hauts" ; souhaitons que cela continue. De toutes façons, les maths ne sont pas une compétition sportive : si l'on devait les comparer à quelque chose, ce serait plutôt à une grande famille.

Le Cirm est un lieu que vous connaissez bien. Qu'a-t-il de particulier ? Qu'est-ce qu'un mathématicien attend d'un lieu comme le Cirm et qu'y trouve-t-il ?

Oui, j'aime bien le Cirm. J'y suis allé dès les premières années de son existence. Il y a peu d'endroits comparables dans le monde : Oberwolfach, dans la Forêt Noire, et Banff dans les Montagnes Rocheuses. Chacun a son propre charme : la montagne à Banff, la forêt à Oberwolfach, le calcaire envoûtant des calanques au Cirm. Être dans un bel endroit est important : cela rend heureux, et je suis sûr que l'on fait de meilleures maths quand on est heureux. Bien entendu, le point essentiel est, pour le Cirm comme pour les autres centres, la possibilité de rencontrer d'autres mathématiciens, de leur expliquer ce que l'on fait, d'essayer de répondre à leurs questions et de nouer de nouvelles amitiés. Le travail mathématique n'est pas vraiment un "travail en équipe" : les idées originales sont dues à des individus ; mais la présence d'autres personnes intéressées à des questions voisines est un grand facteur de progrès (et aussi d'équilibre psychologique).

Une interview de Jean-Pierre Serre

par Martin Raussen et Christian Skau
Sociétés norvégienne et danoise de mathématiques

Le 3 juin 2003, Jean-Pierre Serre a reçu des mains du roi Harald de Norvège le premier Prix Abel, destiné à récompenser d'éminents mathématiciens et, à travers eux, à attirer l'attention - en particulier des jeunes - sur les mathématiques.

La Newsletter *de l'"*European Mathematical Society*" de septembre 2003 consacre plusieurs pages à cet événement et publie une interview en anglais de Jean-Pierre Serre. Nous proposons à nos lecteurs une traduction*[1] *de cet entretien, réalisé le 2 juin 2003 à Oslo par Martin Raussen et Christian Skau sous l'égide des Sociétés norvégienne et danoise de mathématiques, qui l'ont publié dans leur* Newsletter.

De très nombreux autres périodiques ont commenté la nomination de Jean-Pierre Serre. Pour rester dans la langue francaise, on trouvera dans SMP (périodique d'informations générales scientifiques publié par le CNRS) un article très agréable de Maurice Mashaal.

Topologie

Martin Raussen et Christian Skau : Tout d'abord, permettez-nous de vous féliciter d'être le premier lauréat du prix Abel. Vous avez commencé votre carrière par une thèse consacrée à la topologie algébrique. C'était à l'époque, en France tout au moins, une discipline très neuve, et pas l'une des plus répandues. Pourquoi avoir choisi ce sujet ?

Jean-Pierre Serre : Je participais alors au séminaire Cartan de topologie algébrique. Mais Cartan ne proposait pas de sujet de recherche à ses étudiants : ils devaient s'en choisir un, après quoi il les aidait. C'est ce qui m'est arrivé. Je me suis aperçu que la théorie de Leray (sur les fibrés et leurs suites spectrales) pouvait s'appliquer à bien plus de situations qu'on ne le

Référence de l'article : RMS, Volume 114, n^{o} 3 (2003-2004).

1. Traduit de l'anglais par Bernard Randé.

pensait et que, convenablement étendue, elle pourrait être utilisée pour calculer des groupes d'homotopie.

M. R. ET C. S. : Je crois que l'on peut à juste titre affirmer que les méthodes et les résultats de votre thèse ont révolutionné l'homotopie et lui ont donné sa forme moderne.

J.-P. S. : Ils ont certainement ouvert de nombreuses voies. Avant cette thèse, les groupes d'homotopie des sphères étaient presque complètement *terra incognita* ; on ne savait même pas qu'ils étaient de type fini ! Un aspect intéressant de la méthode que j'ai introduite était son caractère algébrique. En particulier, elle permettait des calculs locaux, au sens de la localisation en théorie des nombres, relativement à un nombre premier fixé.

M. R. ET C. S. : J'ai entendu dire que l'un des points cruciaux dans cette affaire était de définir quelque chose qui ressemblait à un fibré sans en être un exactement.

J.-P. S. : Il est vrai que, pour appliquer la théorie de Leray, j'ai eu besoin de construire des espaces fibrés qui ne répondaient pas à la définition standard. De façon plus précise, j'avais besoin d'associer à chaque espace X un espace E fibré sur X dont l'homotopie soit triviale (par exemple un espace contractile). Mais comment ? Une nuit de 1950, dans le train, au retour de nos grandes vacances, j'ai vu la solution en un éclair : on prend pour E l'espace des chemins de X, d'origine fixée, la projection étant alors l'application d'évaluation qui à un chemin associe son extrémité. La fibre n'est autre que l'espace des lacets. Sans aucun doute, c'était bien ça ! J'en ai réveillé ma femme pour lui en parler... (Bien entendu, il me restait à montrer que la projection en question méritait d'être appelée fibration, et que l'on pouvait lui appliquer la théorie de Leray. Un travail technique, certes, mais pas si facile.) Il est étrange qu'une construction si simple ait eu tant de conséquences.

Thèmes et syle de travail

M. R. ET C. S. : Cette histoire d'illumination soudaine rappelle celle rapportée par Hadamard dans son petit livre *La psychologie de l'invention en mathématiques*, qui raconte comment Poincaré a eu une révélation brutale en montant dans le tramway. Êtes-vous enclin à privilégier l'inspiration, le travail systématique, ou un mélange des deux ?

J.-P. S. : Il y a des sujets auxquels je reviens périodiquement (les représentations l-adiques, par exemple), mais pas systématiquement. J'y vais au flair. Quant aux éclairs que décrit Hadamard, c'est tout juste si j'en ai vécu deux ou trois en cinquante ans. Des moments merveilleux... mais bien trop rares !

M. R. ET C. S. : De tels éclairs surviennent, j'imagine, après de longs efforts ?

J.-P. S. : Efforts, non. Il s'agit plutôt d'une longue maturation et d'un travail inconscient, comme l'explique si bien le joli livre de Littlewood, *A Mathematician's Miscellany.*

M. R. ET C. S. : À la suite de votre période topologique, vous vous êtes essentiellement consacré à la théorie des nombres et à la géométrie algébrique.

J.-P. S. : Vous savez, on pourrait croire que je travaille dans des domaines très variés, mais ces domaines sont en fait liés. Je n'ai pas l'impression de changer. Par exemple, en théorie des nombres, en théorie des groupes aussi bien qu'en géométrie algébrique, j'utilise des notions topologiques, telles que la cohomologie, les faisceaux et les obstructions. Ainsi, j'ai pris grand plaisir à travailler sur les représentations l-adiques et les formes modulaires : on doit utiliser la théorie des nombres, la géométrie algébrique, les groupes de Lie réels et l-adiques, les q-séries de la combinatoire. Un mélange merveilleux.

M. R. ET C. S. : Votre façon de penser est-elle de nature plutôt géométrique, plutôt algébrique, ou bien les deux à la fois ?

J.-P. S. : Plutôt algébrique, mais je comprends mieux le langage géométrique que le langage algébrique : entre un groupe de Lie et une bigèbre, je choisis le groupe de Lie ! Pourtant, je ne me considère pas comme un vrai géomètre, comme Bott et Gromov.

J'aime aussi beaucoup l'analyse, mais je ne peux pas non plus prétendre être un véritable analyste. Le vrai analyste voit au premier regard ce qui est grand, petit, probablement petit et démontrablement petit (ce qui nest pas la même chose). Cette vision intuitive me fait défaut, et j'ai besoin d'écrire noir sur blanc des inégalités explicites.

M. R. ET C. S. : Au cours de votre longue carrière, vous avez travaillé sur un grand nombre de sujets différents. Parmi les théories que vous avez créées et les résultats que vous avez obtenus, lesquels vous tiennent le plus à cœur ?

J.-P. S. : Une question délicate ! Demanderiez-vous à une mère lequel de ses enfants elle préfère ? Je peux simplement dire que certains de mes articles furent très faciles à écrire et d'autres réellement difficiles. L'article FAC, sur les faisceaux algébriques cohérents, appartient à la première catégorie. Quand je l'ai écrit, j'ai eu l'impression de copier un texte qui existait déjà ; cela ne m'a demandé pratiquement aucun effort. En revanche, je me rappelle un article sur les sous-groupes ouverts des groupes profinis, qui m'a donné tellement de mal que, jusqu'au bout, je n'arrivais pas à savoir si je démontrais le théorème ou si je contruisais un contre-exemple ! Autre cas d'article difficile : celui dédié à Manin, dans lequel j'énonçais des conjectures très précises (et très téméraires) sur les représentations galoisiennes modulaires (modulo p) ; celui-là fut même si éprouvant que, lorsque je l'eus terminé, je m'arrêtai de publier pour plusieurs années.

Du côté plaisir, il me faut mentionner un article dédié à Borel, sur les produits tensoriels de représentations en caractéristique p. J'ai toujours beaucoup aimé la théorie des groupes, et j'y ai même démontré quelques théorèmes. Mais ce résultat sur les produits tensoriels, obtenu quand j' approchais soixante-dix ans, fut le premier qui m'ait véritablement donné du plaisir. J'ai eu le sentiment que la théorie des groupes, après quarante ans de cour assidue, consentait à me faire une bise.

M. R. ET C. S. : Comme mathématicien, vous êtes resté en première ligne pendant plus de cinquante ans. Hardy a fait cette remarque, souvent reprise, que les mathématiques sont un jeu de jeune homme. N'est-ce pas complètement faux ? N'êtes-vous pas le contre-exemple parfait ?

J.-P. S. : Pas complètement : avez-vous remarqué que le Prix Abel fait principalement référence à des travaux effectués avant mes trente ans ? Il est cependant certain que les gens de ma génération (Atiyah, Borel[2], Bott, Shi-

2. Armand Borel est décédé le 11 août 2003.

mura, etc.) continuent à travailler plus longtemps que ceux de la génération précédente (avec de remarquables exceptions, comme Elie Cartan, Siegel, Zariski). J'espère que cette évolution va continuer.

Rapports à l'histoire des mathématiques

M. R. ET C. S. : Puisque le prix que vous avez reçu porte le nom d'Abel, nous voudrions remonter avec vous à son époque. Les équations algébriques étudiées par Galois et Abel, alors qu'ils sortaient de la théorie de la transformation des fonctions elliptiques, se sont révélées de la plus haute importance pour l'étude arithmétique des courbes elliptiques. Vous qui avez contribué à cette étude, auriez-vous des commentaires à faire au sujet de cette relation étonnante ?

J.-P. S. : C'est vrai, les courbes elliptiques sont à la mode, et pour de bonnes raisons, qui vont du programme de Langlands à la cryptographie. Dans les années soixante et soixante- dix, j'ai passé pas mal de temps à étudier leurs points d'ordre fini (*alias* modules de Tate) et leurs groupes de Galois. Un jeu très amusant : on doit combiner des informations d'origines très différentes : décompositions de Hodge-Tate, inertie modérée, éléments de Frobenius, les théorèmes de finitude à la Siegel... J'aime bien ça.

M. R. ET C. S. : Hermite a dit un jour qu'Abel avait donné du travail aux mathématiciens pour les cent-cinquante années à venir. Êtes-vous d'accord ?

J.-P. S. : Je n'aime pas les grandes déclarations de ce genre. Elles sous-entendent que leur auteur sait ce qui va arriver cent ans après. Quelle prétention !

M. R. ET C. S. : Dans l'introduction de l'un de ses articles, Abel écrit qu'on devrait s'efforcer de formuler les problèmes de façon à rendre toujours possible leur résolution. Il dit que c'est toujours réalisable, et il ajoute même qu'une formulation adéquate contient en germe la solution du problème.

J.-P. S. : Un point de vue optimiste ! Grothendieck serait sûrement d'accord. Quant à moi, je crains qu'il ne s'applique qu'aux questions d'algèbre, et pas à celles d'arithmétique. Par exemple, qu'aurait pensé Abel de l'hypothèse de Riemann ? Qu'elle est mal formulée ?

Rôle des démonstrations

M. R. ET C. S. : Vous arrive-t-il en mathématiques de savoir que quelque chose est vrai sans en avoir de démonstration ?

J.-P. S. : Bien entendu, c'est très fréquent. Mais il faut distinguer entre le but ultime (la modularité des courbes elliptiques, dans le cas de Wiles), dont on perçoit avec certitude qu'il est vrai, et les résultats intermédiaires (lemmes, etc.) qui peuvent être inaccessibles (comme Wiles s'en est aperçu lors de sa première tentative), voire carrément faux (c'est ce qui est arrivé à Lafforgue).

M. R. ET C. S. : Une démonstration a-t-elle toujours une valeur en soi ? Je songe, par exemple, à celle du théorème des quatre couleurs.

J.-P. S. : Nous sommes là dans une zone délicate : celles des démonstrations assistées par ordinateur. Ce ne sont pas des démonstrations au sens usuel : on ne peut pas les vérifier ligne par ligne. Elles sont particulièrement sujettes à caution lorsqu'elles affirment donner des listes complètes.

Je me rappelle ainsi avoir reçu, dans les années quatre-vingt-dix, une liste des sous-groupes d'indice donné d'un certain groupe discret. L'ordinateur avait trouvé, disons vingt de ces sous-groupes. Comme je connaissais bien ces groupes, j'ai pu facilement en trouver à la main une trentaine. J'ai écrit aux auteurs. Ils m'ont expliqué la raison de leur erreur : une partie du calcul avait été effectuée au Japon, une autre en Allemagne, mais ils avaient oublié une partie intermédiaire. Typique !

D'un autre côté, les démonstrations assistées par ordinateur sont souvent plus convaincantes que beaucoup de démonstrations classiques fondées sur des diagrammes déclarés commutatifs, des flèches prétendument identiques et des détails laissés au lecteur.

M. R. ET C. S. : Qu'en est-il de la démonstration conduisant à la classification des groupes finis simples ?

J.-P. S. : Bonne question ! Je me suis disputé pendant des années avec les spécialistes de théorie des groupes, qui prétendaient que le Théorème de la

Classification était bien un théorème, autrement dit qu'il avait été démontré. C'était en effet ce qu'avait annoncé Gorenstein en 1980, mais on s'était aperçu qu'il y avait un trou (la classification des groupes quasi-minces). Chaque fois que j'interrogeais un spécialiste, il me répondait en substance Non, non, ce n'est pas un trou, c'est quelque chose qui n'a pas encore été écrit, mais il y a 800 pages là-dessus qui attendent d'être complétées pour être publiées. Pour moi, c'était exactement la définition d'un trou, et je ne voyais pas pourquoi il n'était pas reconnu comme tel. Heureusement, Aschbacher et Smith ont maintenant écrit un texte de plus de 1200 pages afin de combler ce trou. Quand il aura été vérifié par d'autres spécialistes, ce sera le moment de fêter l'événement.

M. R. ET C. S. : Mais à quoi peut servir une démonstration de 1200 pages ?

J.-P. S. : En réalité, la démonstration complète de la classification fait bien plus que 1200 pages, peut-être dix fois plus : le seul énoncé du théorème est lui-même extrêmement long puisque, pour être utilisable, il doit contenir la description détaillée, non seulement des groupes de Chevalley, mais aussi des 26 groupes sporadiques. C'est un beau théorème, qui a des applications très surprenantes. Je ne pense pas que son usage pose problème aux mathématiciens d'autres domaines : il leur suffit de préciser quelle partie de leur démonstration en dépend.

Problèmes mathématiques importants

M. R. ET C. S. : Pensez-vous qu'il y ait en mathématiques des domaines cruciaux ou dominants ? Y a-til des sujets plus importants que d'autres ?

J.-P. S. : C'est une question délicate. Il y a évidemment des branches des mathématiques qui sont moins importantes : celles où l'on fait joujou avec quelques axiomes et leurs relations logiques. Mais on ne peut pas être dogmatique à ce sujet. Il arrive qu'un domaine délaissé devienne intéressant et noue des relations nouvelles avec d'autres branches des mathématiques.

En revanche, certaines questions jouent un rôle clairement central dans notre compréhension du monde mathématique : l'hypothèse de Riemann et le programme de Langlands en sont des exemples frappants. Sans oublier la conjecture de Poincaré qui pourrait bien n'être plus une conjecture, grâce à Perelman !

M. R. ET C. S. : Avez-vous des renseignements ou un sentiment à propos de la justesse de la démonstration ?

J.-P. S. : Un sentiment ? Qui se soucie des sentiments ! Des renseignements ? Pas vraiment, mais j'ai entendu des gens à l'IHES et au MIT qui se passionnaient pour cette esquisse de preuve. Un côté intéressant de la méthode de Perelman, c'est son utilisation de l'analyse à l'égard d'un problème de pure topologie. C'est très satisfaisant.

M. R. ET C. S. : Nous avons déjà fait un pas dans l'avenir en parlant de la conjecture de Poincaré. Quels sont les problèmes importants que vous aimeriez voir résolus dans un proche avenir ? Par exemple, êtes-vous d'accord avec la grande importance des problèmes du Clay Millenium Prize ?

J.-P. S. : Ah ! Les problèmes de Clay à un million de dollars ! Drôle d'idée : tant d'argent pour un seul problème... mais comment me permettre de critiquer cela après avoir reçu le prix Abel ? Pourtant, j'y vois un risque, celui que les gens hésitent à discuter ouvertement de leurs résultats intermédiaires, comme c'est arrivé il y a dix ans avec le théorème de Fermat.

Quant au choix des questions retenues par le Clay Institute, je le trouve très bon. L'hypothèse de Riemann et la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer y figurent très légitimement. La conjecture de Hodge aussi, mais pour une autre raison : il est douteux si la réponse est oui ou non. Ce qui importe, c'est de trouver la réponse (j'espère, bien sûr, que cela ne se révèlera pas indécidable...). Le problème P=NP est dans la même catégorie que celui de Hodge, à ceci près qu'il y aurait bien plus d'applications si la réponse était oui.

M. R. ET C. S. : Avez-vous en tête d'autres problèmes de la même ampleur ?

J.-P. S. : Je vous ai déjà dit que le programme de Langlands est l'une des questions majeures des mathématiques d'aujourd'hui. S'il ne figure pas dans la liste de Clay, c'est sans doute qu'il est difficile de le formuler avec toute la précision nécessaire.

M. R. ET C. S. : Outre vos mérites scientifiques, on vous reconnaît des qualités exceptionnelles de conférencier, dont nous pouvons témoigner à la suite de l'exposé d'aujourd hui [3].

J.-P. S. : Merci. Je viens du sud de la France, où l'on aime parler ; pas seulement avec les lèvres, aussi avec les mains et, dans mon cas, avec un morceau de craie. Quand j'ai compris quelque chose, j'ai le sentiment que tout le monde peut le comprendre aussi, et cela m'est un grand plaisir de l'expliquer à d'autres mathématiciens, que ce soient des étudiants ou des collègues. Le revers de la médaille, c'est qu'une assertion fausse me rend presque physiquement malade. Ça m'est insupportable. Quand j'en entends une lors d'un exposé, j'interromps l'orateur, et quand j'en lis une dans une prépublication, un article ou un livre, j'écris à l'auteur (ou, quand il se trouve que c'est moi l'auteur, je rédige une note en vue d'une nouvelle édition). Je ne suis pas sûr que cette habitude m'ait rendu extrêmement populaire chez les conférenciers et les auteurs...

Accessibilité et importance des mathématiques

M. R. ET C. S. : Les mathématiques font preuve d'un foisonnement de sujets et de disciplines qui rend difficile la maîtrise d'une branche, fût-elle mineure. D'autre part, vous en avez fait la démonstration lors de votre conférence d'aujourd'hui, il est essentiel que les différents secteurs s'entre-fertilisent. Comment les jeunes mathématiciens, tout particulièrement, vont-ils se débrouiller dans cette explosion des connaissances et vont-ils pouvoir trouver des choses nouvelles ?

J.-P. S. : Oui, on m'a déjà posé la question lors de l'interview que j'ai donnée à Singapour pour Intelligencer. Ma réponse est que, lorsque l'on est véritablement intéressé par un problème, on ne trouve que très peu de chose dans la littérature existante qui soit vraiment utile. On doit se débrouiller seul. Quant à l'impression d'une explosion des mathématiques, je suis certain qu' Abel l'avait déjà lorsqu'il a commencé à travailler, après Euler, Lagrange, Legendre et Gauss. Mais il a trouvé de nouvelles questions et de nouvelles solutions. Cela n'a pas changé depuis. Il n'y a pas de souci à se faire.

3. Cette interview a été donnée quelques heures après un exposé fait par Jean-Pierre Serre à l'université d'Oslo.

M. R. et C. S. : Un autre problème actuel est que de nombreux jeunes talents (et aussi les faiseurs d'opinion publique) ne trouvent pas les mathématiques très excitantes.

J.-P. S. : En effet. C'est triste à dire, mais il y a de nombreux exemples de cela. Il y a quelques années, on a rapporté les propos d'un ministre français de la recherche affirmant que les mathématiciens ne servent plus à rien, maintenant qu'il suffit d'appuyer sur une touche d'ordinateur. Sans doute croyait-il que les touches et les programmes d'ordinateurs poussent sur les arbres... Pourtant, j'ai bon espoir que les jeunes continuent de découvrir les mathématiques et d'être attirés par elles. Un des aspects heureux de cette cérémonie Abel est la compétition Abel, destinée aux lycéens norvégiens.

Sports et littérature

M. R. et C. S. : Parlez-nous un peu de ce que vous aimez en dehors des mathématiques.

J.-P. S. : Le sport ! Plus précisément : le ski, le ping-pong et la varappe. Je n'ai jamais réellement excellé dans aucun d'entre eux. Par exemple, quand je skiais, je ne savais pas slalomer, alors je préférais aller tout schuss plutôt que d'essayer de tourner. Mais j'y prenais beaucoup de plaisir. Par un effet de l'âge, mes genoux ne fonctionnent plus (l'un d'entre eux a même été remplacé par une prothèse métallo-plastique), et j'ai dû arrêter le sport. La seule sorte de varappe que je fasse à présent, je la fais par procuration : je vais avec des amis à Fontainebleau et je les encourage à escalader des rochers que j'aurais grimpés moi-même il y a dix ans. Ça reste plaisant : mais ça l'est moins qu'une escalade réelle.

Et puis, il y a les films (Pulp Fiction est l'un de mes préférés, et j'aime beaucoup aussi Altman, Truffaut, Rohmer, les frères Coen,...), les échecs, les livres (de toute espèce, de Giono à Böll et Kawabata en passant par les contes de fées et les Harry Potter).

M. R. et C. S. : Monsieur le Professeur, au nom des Sociétés danoise et norvégienne de mathématiques, merci d'avoir accepté cette interview.

Un entretien avec Jean-Pierre Serre

© *C. T. Chong and Y. K. Leong*
Université nationale de Singapour

Jean-Pierre Serre est né en 1926 en France. Il a étudié les mathématiques à l'École Normale Supérieure. En 1954, à l'âge de 28 ans, il a été récompensé en recevant la médaille Fields de l'Union mathématique internationale, la reconnaissance la plus haute de réalisations en mathématiques. Deux ans plus tard, il est devenu Professeur de la Chaire d'Algèbre et Géométrie au Collège de France, dont il a été pendant environ 15 ans le plus jeune professeur. Il a été visiteur du département de mathématiques de l'Université de Singapour, du 2 au 15 février 1985. Sa visite a été financée par le programme d'échange académique franco-singapourien. Pendant son séjour à Singapour, le Professeur Serre a donné deux conférences au sujet des courbes algébriques sur les corps finis et une conférence au sujet de la fonction de Ramanujan. Il a également donné un exposé de séminaire sur la preuve par Faltings de la conjecture de Mordell, et un exposé de Colloquium intitulé "$\Delta = b^2 - 4ac$" sur les nombres de classes de corps quadratiques imaginaires. Le 14 février 1985, il a donné une interview dans laquelle il a discuté de divers aspects de sa carrière mathématique et de sa vision des mathématiques. Ce qui suit est une transcription de cette interview par C. T. Chong et Y. K. Leong, et révisée par J-P. Serre.

Q : Qu'est-ce qui vous a fait choisir le métier de mathématicien ?

J.-P. S. : Je me rappelle avoir commencé à aimer les mathématiques quand j'avais peut-être 7 ou 8 ans. Au lycée, j'avais l'habitude de faire les problèmes des classes supérieures. J'étais en pension à Nîmes, avec des enfants plus vieux que moi, et ils avaient l'habitude de m'intimider. Alors pour les calmer, je faisais leurs devoirs. C'était un entraînement comme un autre.

Ma mère était pharmacienne (comme mon père), et elle aimait les mathématiques. Quand elle était étudiante en pharmacie, à l'Université de Montpellier, elle avait suivi un cours de première année en calcul, juste pour le plaisir, et elle avait passé l'examen. Et elle avait soigneusement conservé ses livres de calcul (par Fabry et Vogt, si je me souviens bien). Quand j'avais 14 ou

15 ans, j'avais l'habitude de lire ces livres, et de les étudier. C'est comme ça que j'ai appris les dérivées, les intégrales, les séries et ainsi (je l'ai fait de manière purement formelle - dans le style d'Euler pour ainsi dire : je n'aimais pas, et je ne comprenais pas, les epsilons et les deltas). À ce moment-là, il ne me venait pas à l'esprit qu'on puisse vivre en étant mathématicien. Ce n'est que plus tard que j'ai découvert qu'on pouvait être payé pour faire des mathématiques ! Ce que je pensais initialement, c'est que je pourrais devenir professeur de lycée, cela me paraissait naturel. Alors, quand j'ai eu 19 ans, j'ai passé le concours pour entrer à l'École Normale Supérieure, et je l'ai réussi. Une fois que j'étais à "l'École", il devint clair que ça n'était pas professeur de lycée que je souhaitais être, mais chercheur en mathématiques.

Q : Est-ce que d'autres sujets vous intéressaient, comme la physique ou la chimie ?

J.-P. S. : La physique pas tant que ça, mais la chimie, si. Comme je l'ai dit, mes parents étaient pharmaciens, et donc ils avaient plein de produits chimiques et de tubes à essais. Je jouais beaucoup avec quand j'avais environ 15 ou 16 ans, en plus de faire des mathématiques. Et je lisais les livres de chimie de mon père (j'ai toujours l'un d'eux, un livre fascinant, "Les Colloides" de Jacques Duclaux.) Pourtant, quand j'ai appris plus de chimie, j'ai été déçu par son aspect presque mathématique : il y a de longues séries de composés organiques comme CH_4, C_2H_6, etc, tous se ressemblant plus ou moins. J'ai pensé, quitte à avoir des séries, tu ferais aussi bien de faire des mathématiques ! Alors j'ai quitté la chimie - mais pas complètement : j'ai fini par épouser une chimiste.

Q : Avez-vous été influencé par un professeur d'école pour faire des mathématiques ?

J.-P. S. : J'ai eu seulement un très bon professeur. C'était pendant ma dernière année de lycée (1943-1944), à Nîmes. Il était surnommé "Le Barbu" : les barbes étaient rares à cette époque. Il était très clair, et strict ; il exigeait que toute formule et démonstration soit écrite soigneusement. Et il m'a prodigué un entraînement approfondi pour le concours national de mathématiques qu'on appelle le "Concours Général", où j'ai finalement obtenu le premier prix.

En parlant du Concours Général, j'ai aussi tenté ma chance à celui de physique, la même année (1944). Le problème qu'on nous a demandé de résoudre était entièrement basé sur une loi physique que j'étais supposé connaître mais ce n'était pas le cas. Heureusement, seule une formule semblait possible pour cette loi. J'ai supposé qu'elle était correcte, et j'ai réussi à faire la totalité du problème de 6 heures sur cette base. Je pensais même que j'aurais un prix. Malheureusement, ma formule était fausse, et je n'ai rien obtenu - comme je le méritais !

Q : Quelle est l'importance de l'inspiration dans la découverte des théorèmes ?

J.-P. S. : Je ne sais pas vraiment ce que veut dire l'"inspiration". Les théorèmes, et les théories, naissent de manière marrante. Parfois, tu es juste insatisfait par les preuves existantes, et tu en cherches de meilleures, qui peuvent être appliquées dans des situations différentes. Un exemple typique pour moi a été quand je travaillais sur le théorème de Riemann-Roch (aux alentours de 1953), que je voyais comme une formule d'"Euler-Poincaré" (je ne savais pas que Kodaira-Spencer avaient eu la même idée.) Mon premier objectif était de le prouver pour les courbes algébriques - un cas qui était connu depuis environ un siècle ! Mais je voulais une preuve d'un style spécial ; et quand j'ai réussi à la trouver, je me rappelle que cela ne m'a pas pris plus d'une ou deux minutes pour passer de là au cas 2-dimensionnel (qui avait juste été fait par Kodaira). Six mois plus tard, le résultat complet a été établi par Hirzebruch, et a été publié dans son fameux Habilitationsschrift.

Assez souvent, vous n'essayez pas vraiment de résoudre une question particulière par une attaque frontale. Vous avez plutôt quelques idées en tête, dont vous pensez qu'elles devraient être utiles, mais vous ne savez pas exactement pour quoi elles sont utiles. Alors vous regardez autour et vous essayez de les appliquer. C'est un peu comme avoir un trousseau de clefs, et les essayer sur différentes portes.

Q : Avez-vous déjà expérimenté le fait de trouver un probème impossible à résoudre, et alors, après l'avoir laissé de côté quelques temps, une idée a soudainement surgi amenant à la solution ?

J.-P. S. : Oui, bien sûr, cela arrive assez souvent. Par exemple, quand je travaillais sur les groupes d'homotopie ($\sim$ 1950), je m'étais persuadé que, pour un espace donné X, il devrait exister un espace fibré E, de base X, qui est contractible ; un tel espace devrait en effet me permettre (en utilisant les méthodes de Leray) de faire de nombreux calculs sur les groupes d'homotopie et la cohomologie d'Eilenberg-McLane.

Mais comment le trouver ? Cela m'a pris plusieurs semaines (un très long temps, à l'âge que j'avais alors...) pour réaliser que l'espace des "chemins" sur X avait toutes les propriétés nécessaires - si seulement j'osais appeler cela un "espace fibré", ce que je fis. Ça a été le point de départ de la méthode d'espace-boucle en topologie algébrique, de nombreux résultats s'en sont ensuivis.

Q : Avez-vous l'habitude de travailler sur un seul problème à la fois ou sur plusieurs problèmes à la fois ?

J.-P. S. : La plupart du temps, sur un problème à la fois, mais pas toujours. Et je travaille souvent la nuit (dans un demi-sommeil), où le fait que vous ne deviez pas écrire quoi que ce soit donne à l'esprit une bien plus grande concentration, et fait changer de sujet plus facilement.

Q : En physique, il y a de nombreuses découvertes qui ont été faites par accident, comme les rayons X, la radiation du fond cosmologique, etc. Cela vous est-il arrivé en mathématiques ?

J.-P. S. : Un véritable accident est rare. Mais parfois, vous obtenez des surprises parce qu'un argument que vous avez fourni dans un certain but s'avère répondre à une question dans une autre direction ; pourtant, vous pouvez difficilement appeler cela un "accident".

Q : Quels sont les problèmes centraux en géométrie algébrique et en théorie des nombres ?

J.-P. S. : Je ne peux répondre à cela. Vous savez, quelques mathématiciens ont des "programmes" clairs et à long terme. Par exemple, Grothendieck avait un tel programme pour la géométrie algébrique ; maintenant Langlands en a un pour la théorie de la représentation, en relation avec les formes modulaires et l'arithmétique. Je n'ai jamais eu un tel programme, même pas un petit programme. Je ne travaille que sur des choses qui arrivent à m'intéresser à un moment. (En ce moment, le sujet qui m'amuse le plus est de compter des points sur des courbes algébriques sur les corps finis. Ce sont en quelque sorte des mathématiques appliquées : vous essayez d'utiliser tous les outils de géométrie algébrique et de théorie des nombres que vous connaissez... et vous ne réussissez pas tout à fait !).

Q : Que considéreriez-vous comme les plus grands développements en géométrie algébrique ou en théorie des nombres dans les cinq dernières années ?

J.-P. S. : Il est plus facile de répondre à cela. La preuve de Faltings de la conjecture de Mordell, et de la conjecture de Tate, est la première chose qui vient à l'esprit. Je mentionnerais également le travail de Gross-Zagier sur le problème du nombre de classes pour les corps quadratiques (basé sur un théorème précédent de Goldfeld), et le théorème de Mazur-Wiles sur la théorie d'Iwasawa, en utilisant les courbes modulaires. (Les applications des courbes modulaires et des fonctions modulaires à la théorie des nombres est particulièrement stimulante : vous utilisez GL_2 pour étudier GL_1, pour ainsi dire ! Il y a clairement beaucoup à venir de cette direction... peut-être même une preuve de l'Hypothèse de Riemann un jour) !

Q : Certains scientifiques ont fait un travail fondamental dans un domaine et ensuite se tournent rapidement vers un autre domaine. Vous avez travaillé trois années durant en topologie, et ensuite avez travaillé sur autre chose. Comment cela s'est-il produit ?

J.-P. S. : C'était un chemin continu, non pas un changement discret. En 1952, après ma thèse sur les groupes d'homotopie, je suis allé à Princeton, où j'ai donné une conférence à ce sujet (et sur son prolongement : la “C-théorie”), et j'ai assisté au célèbre séminaire Artin-Tate sur la théorie des corps de classes.

Alors, je suis retourné à Paris, où le séminaire Cartan traitait des fonctions de plusieurs variables complexes, et des variétés de Stein. Il se trouva que les résultats récents de Cartan-Oka pouvaient être exprimés beaucoup plus efficacement (et prouvés d'une façon plus simple) en utilisant la cohomologie et les faisceaux. C'était assez excitant, et j'ai travaillé sur ce sujet pendant quelques temps, en appliquant la théorie de Cartan aux variétés de Stein.

Pourtant, une partie très intéressante des fonctions à plusieurs variables complexes est l'étude des variétés projectives (par opposition aux variétés affines - qui sont en quelque sorte pathologiques pour un géomètre) ; alors, j'ai commencé à travailler sur les variétés projectives complexes, en utilisant des faisceaux : voilà comment je suis arrivé au cercle d'idées entourant Riemann-Roch, en 1953. Mais les variétés projectives sont algébriques (théorème de Chow), et ce n'est pas très naturel d'étudier ces objets algébriques en utilisant des fonctions analytiques, qui peuvent aussi bien avoir beaucoup de singularités essentielles. Évidemment, les fonctions rationnelles devraient suffire - et en effet, elles le font. Cela m'a amené (vers 1954) à la géométrie algébrique "abstraite", sur tout corps algébriquement clos. Mais pourquoi supposer que le corps est algébriquement clos ? Les corps finis sont plus excitants, avec les conjectures de Weil et tout ça. Et de là aux corps de nombres, la transition est assez naturelle... Voilà plus ou moins le chemin que j'ai suivi.

Une autre direction de travail est venu de ma collaboration (et de mon amitié) avec Armand Borel. Il m'a enseigné les groupes de Lie, qu'il connaissait comme nul autre. Les connexions entre ces groupes et la topologie, la géométrie algébrique, la théorie des nombres... sont fascinantes. Laissez-moi vous donner juste un tel exemple (dont j'ai pris conscience vers 1968) :

Considérons le sous-groupe discret le plus évident de $SL_2(R)$, c'est-à-dire $SL_2(Z)$. On peut calculer sa "caractéristique d'Euler-Poincare" $\xi(\Gamma)$, qui s'avère être -1/12 (ce n'est pas un entier : cela est dû au fait que Γ a une torsion). Maintenant -1/12 se trouve être la valeur de $\zeta(-1)$ de la fonction zeta de Riemann au point $s = -1$ (un résultat déjà connu d'Euler). Et ce n'est pas une coïncidence ! Cela s'étend à n'importe quel corps de nombres totalement réels K, et cela peut être utilisé pour étudier le dénominateur de $\zeta_k(-1)$. (De meilleurs résultats peuvent être obtenus en utilisant les formes modulaires, comme cela a été trouvé plus tard). De telles questions ne relèvent ni de la théorie des groupes, ni de la topologie, ni de la théorie des nombres : ce sont juste des mathématiques.

Q : Quelles sont les perspectives de réaliser une certaine unification de plusieurs domaines des mathématiques ?

J.-P. S. : Je dirais que cela a déjà été réalisé. J'ai donné tout à l'heure des exemples typiques où les groupes de Lie, la théorie des nombres, etc, viennent ensemble, et ne peuvent pas être séparés les uns des autres. Laissez-moi vous donner un autre tel exemple (et il serait aisé d'en ajouter bien d'autres) :

Il y a un beau théorème prouvé récemment par S. Donaldson sur les variétés compactes différentiables 4-dimensionnelles. Le théorème montre que la forme quadratique (sur H^2) d'une telle variété est sévèrement restreinte ; elle est définie positive, c'est une somme de carrés. Et le nœud de la preuve consiste à construire une variété auxiliaire (un "cobordisme") comme l'ensemble des solutions d'une équation différentielle partielle (non linéaire, bien sûr) ! C'est une application complètement nouvelle de l'analyse à la topologie différentielle. Et ce qui rend cela encore plus remarquable, c'est que, si l'on retire la supposition de la différentiabilité, la situation devient assez différente : par un théorème de M. Freedman, la forme H^2-quadratique peut être alors presque quelconque.

Q : Comment peut-on continuer à suivre, avec l'explosion du savoir mathématique ?

J.-P. S. : Vous n'avez pas vraiment besoin de suivre. Quand vous êtes intéressé par une question précise, vous trouvez que très peu de ce qui a déjà été fait n'est vraiment pertinent pour vous ; et si quelque chose est connexe, alors vous l'apprenez d'autant plus rapidement que vous avez une application à l'esprit. C'est aussi une bonne habitude de regarder régulièrement les Math. Reviews (spécialement les collections de volumes concernant la théorie des nombres, la théorie des groupes, etc). Et vous apprenez beaucoup de vos amis, aussi : il est plus simple de saisir une preuve qui vous est expliquée au tableau que de la lire.

Un problème plus sérieux concerne les "gros théorèmes" qui sont à la fois très utiles, mais également trop longs à vérifier (à moins que vous ne dépensiez à cela une part considérable de votre temps de vie...). Un exemple typique est le théorème de Feit-Thompson : les groupes d'ordre impair sont résolubles. (Chevalley une fois a essayé de prendre ce problème comme sujet d'un séminaire, avec l'idée d'en donner un compte-rendu complet de la preuve. Après deux ans, il a dû abandonner.). Que devrait-on faire avec de tels théorèmes, si quelqu'un doit les utiliser ? Les croire par la foi ? Probablement. Mais ce n'est pas une situation très confortable.

Je suis aussi mal à l'aise avec certains sujets, principalement en topologie différentielle, où l'auteur dessine un dessin compliqué (en 2 dimensions), et vous demande de l'accepter comme preuve de quelque chose ayant lieu en 5 dimensions ou plus. Seuls les experts peuvent “voir” si une telle preuve est correcte ou pas - si vous pouvez appeler cela une preuve.

Q : Quel sera selon vous l'impact des ordinateurs sur le développement des mathématiques ?

J.-P. S. : Les ordinateurs ont déjà fait beaucoup de bien dans certaines parties des mathématiques. En théorie des nombres, par exemple, ils sont utilisés de nombreuses manières différentes. D'abord, bien sûr, pour suggérer des conjectures, ou des questions. Mais également pour tester des théorèmes généraux sur des exemples numériques - ce qui aide beaucoup à trouver des erreurs possibles.

Ils sont aussi très utiles lorsqu'une grande recherche doit être menée (par exemple, si vous devez tester 10^6 ou 10^7 cas). Un exemple célèbre est la preuve du théorème des quatre couleurs. Il y a cependant un problème là, quelque chose de similaire à celui avec Feit-Thompson : une telle preuve ne peut pas être vérifiée à la main ; vous avez besoin d'un ordinateur (et d'un programme très subtil). Ce n'est pas très confortable non plus.

Q : Comment encourageriez-vous des jeunes gens à faire des mathématiques, spécialement à l'école ?

J.-P. S. : J'ai une théorie là-dessus, qui est que dans un premier temps, vous devriez plutôt les *décourager* de faire des mathématiques ; il n'y a pas besoin de trop de mathématiciens. Mais si, après cela, ils continuent d'insister pour faire des mathématiques, alors vous devriez plutôt les encourager, et les aider.

Comme pour les étudiants de lycée, le point principal est de leur faire comprendre que les mathématiques *existent*, qu'elles ne sont pas mortes (ils ont tendance à croire qu'il n'y a des questions ouvertes qu'en physique, ou en biologie). Le problème dans la façon traditionnelle d'enseigner les mathématiques est que le professeur ne mentionne jamais ces questions. C'est dommage. Il y en a tant, par exemple en théorie des nombres, que les adolescents pourraient très bien comprendre : Fermat bien sûr, mais également Goldbach, et l'existence d'une infinité de nombres premiers de la forme $n^2 + 1$. Et on devrait également se sentir libre d'énoncer des théorèmes sans les prouver (par exemple, le théorème de Dirichlet sur les nombres premiers dans les progressions arithmétiques).

Q : Diriez-vous que le développement des mathématiques dans les trente dernières années a été plus rapide que dans les trente années qui avaient précédé ?

J.-P. S. : Je ne crois pas que ça soit vrai. Le style est différent. Dans les années 50 et 60, l'accent était mis assez souvent sur les méthodes générales : distributions, cohomologie, et ce genre de choses. Ces méthodes rencontraient de nombreux succès, mais de nos jours, les personnes travaillent sur des questions plus spécifiques (souvent, sur des questions assez anciennes : par exemple, la classification des courbes algébriques dans l'espace projectif 3-dimensionnel !). Ils *appliquent* les outils qui ont été fabriqués précédemment ; c'est assez joli. (Et ils inventent aussi de nouveaux outils : l'analyse microlocale, les super-variétés, la cohomologie de l'intersection...).

Q : Au vu de cette explosion des mathématiques, pensez-vous qu'un étudiant de premier cycle pourrait absorber cette grande quantité de mathématiques en quatre, cinq, ou six ans et commencer un travail original immédiatement après cela ?

J.-P. S. : Pourquoi pas ? Pour un problème donné, vous n'avez pas besoin d'en savoir à ce point-là, habituellement - et en outre, des idées très simples marcheront souvent.

Certaines théories se simplifient. D'autres disparaissent carrément. Par exemple, en 1949, je me rappelle que j'étais déprimé parce qu'aucun numéro des Annals of Mathematics ne contiendrait d'autre papier sur la topologie qui soit plus difficile que les précédents. Mais personne ne regardent plus ces papiers ; ils sont oubliés (et heureusement que c'est le cas : je ne pense pas qu'ils contiennent quoi que ce soit de profond...). L'oubli est une activité très salutaire.

Et encore, il est vrai que certains sujets nécessitent plus d'entraînement que d'autres, parce qu'ils utilisent beaucoup de technique lourde. La géométrie algébrique est un tel cas ; et également la théorie de la représentation.

En tout cas, il n'est pas évident que quelqu'un ait à dire "Je vais travailler en géométrie algébrique", ou quelque chose comme ça. Pour certaines personnes, c'est mieux qu'elles suivent juste des séminaires, qu'elles lisent des articles, et qu'elles se posent des questions ; et qu'elles lisent la quantité de théorie nécessaire pour ces questions.

Q : En d'autres termes, on devrait se focaliser d'abord sur un problème, et ensuite apprendre les outils qui sont nécessaires pour ce problème.

J.-P. S. : Quelque chose comme ça. Mais puisque je sais que je ne peux pas me donner de conseils à moi-même, je ne devrais pas en donner aux autres. Je n'ai pas de technique clef-en-main pour travailler.

Q : Vous avez mentionné des articles qui ont été oubliés. Quel pourcentage des articles publiés survivront d'après vous ?

J.-P. S. : Un pourcentage non nul, je crois. Après tout, nous relisons encore avec plaisir des articles de Hurwitz, ou d'Eisenstein, ou même de Gauss.

Q : Pensez-vous que vous serez jamais intéressé par l'histoire des mathématiques ?

J.-P. S. : Je suis déjà intéressé. Mais ça n'est pas facile ; je n'ai pas les compétences linguistiques en Latin ou Grec, par exemple. Et je peux constater que cela prend plus de temps d'écrire un article d'histoire des mathématiques qu'un article de mathématiques. De plus, l'histoire est très intéressante ; cela met les choses dans la bonne perspective.

Q : Croyez-vous en la classification des groupes finis simples ?

J.-P. S. : Plus ou moins - et plutôt plus que moins. Cela m'amuserait qu'un nouveau groupe sporadique soit découvert, mais je crains que cela n'arrive pas.

Plus sérieusement, ce théorème de classification est une chose splendide. On peut maintenant vérifier de nombreuses propriétés simplement en parcourant la liste de tous les groupes (un exemple typique : la classification des groupes

n-transitifs, pour n ≥ 4).

Q : Que pensez-vous de la vie après la classification des groupes finis simples ?

J.-P. S. : Vous faites allusion au fait que certains théoriciens des groupes finis étaient démoralisés par la classification ; ils disaient (ou c'est ce qu'on m'a dit) “Il n'y aura plus rien à faire après ça”. Je trouve cela ridicule. Bien sûr qu'il y aura encore plein de choses à faire ! D'abord, bien sûr, simplifier la preuve (c'est ce que Gorenstein appelle le “révisionnisme”). Mais également trouver des applications à d'autres parties des mathématiques ; par exemple, il y a eu des découvertes très curieuses reliant le groupe monstre de Griess-Fischer aux formes modulaires (le dénommé “Moonshine”).

C'est exactement pareil que si on demandait si la preuve par Faltings de la conjecture de Mordell a tué la théorie des points rationnels sur les courbes. Non ! C'est seulement un point de départ. De nombreuses questions restent ouvertes.

(Cependant, il est vrai que parfois, une théorie peut être tuée. Un exemple bien connu est le quinzième problème de Hilbert : pour prouver que tout groupe topologique localement euclidien est un groupe de Lie. Quand j'étais un jeune topologue, c'était le problème que je voulais vraiment résoudre - mais je n'ai pu aller nulle part. C'est Gleason, et Montgomery-Zippin, qui l'ont résolu, et leur solution n'a absolument pas tué le problème. Que peut-on trouver d'autre dans cette direction ? Je ne peux penser qu'à une question : le groupe des entiers p-adiques agit-il effectivement sur une variété ? Cela semble assez difficile - mais une solution n'aurait pas d'application en quoi que ce soit, aussi loin que je puisse en juger.)

Q : Mais on pourrait supposer que la plupart des problèmes en mathématiques sont comme ceux-là, c'est-à-dire que les problèmes en eux-mêmes peuvent être difficiles et stimulants, mais qu'après qu'ils aient été résolus, ils deviennent inutiles. En fait, il y a très peu de problèmes comme l'hypothèse de Riemann pour lesquels même avant leur résolution, les gens connaissent déjà beaucoup de ses conséquences.

J.-P. S. : Oui, l'hypothèse de Riemann est un très beau cas : elle implique beaucoup de choses (incluant des inégalités purement numériques, par exemple sur les discriminants des corps de nombres). Mais il y a d'autres tels exemples : le théorème de désingularisation d'Hironaka en est un ; et bien sûr également la classification des groupes finis simples dont nous avons discuté précédemment.

Parfois, c'est la méthode utilisée dans la preuve qui a de nombreuses applications : je suis confiant dans le fait que c'est ce qui se produira avec Faltings. Et parfois, c'est vrai, les problèmes ne sont pas censés avoir des applications ; ils sont une sorte de test des théories existantes ; ils nous forcent à chercher davantage.

Q : Revenez-vous à des problèmes en topologie ?

J.-P. S. : Non. Je n'ai pas gardé trace des techniques récentes, et je ne connais pas les derniers calculs de groupes d'homotophie des sphères $\pi_{n+k}(S_n)$ (je subodore que les gens ont dû atteindre $k = 40$ ou 50. Je les connaissais avant jusqu'à $k = 10$ ou à peu près.).

Mais je continue d'utiliser des idées de topologie au sens large, telles que la cohomologie, les obstructions, les classes Stiefel-Whitney, etc.

Q : Quelle a été l'influence de Bourbaki sur les mathématiques ?

J.-P. S. : Une très bonne influence. Je sais que c'est tendance de tout reprocher à Bourbaki (les “Maths modernes” par exemple), mais ceci est injuste. Bourbaki n'est pas responsable. Les gens ont juste mal utilisé ses livres ; ils n'étaient pas destinés à l'enseignement universitaire, même pas à l'enseignement en lycée.

Q : Peut-être que cela aurait dû être signifié ?

J.-P. S. : Un tel signe a en effet été donné par Bourbaki : c'est le Séminaire Bourbaki. Le Séminaire n'est pas aussi formel que les livres ; il inclut toutes sortes de mathématiques, et même de la physique. Si vous combinez le Séminaire et les livres, vous obtenez une vision plus équilibrée.

Q : Voyez-vous un déclin de l'influence de Bourbaki sur les mathématiques ?

J.-P. S. : L'influence est différente de ce qu'elle était. Il y a quarante ans, Bourbaki avait une mission ; il devait prouver qu'un compte-rendu organisé et systématique des mathématiques était possible. Maintenant cette mission a été remplie et Bourbaki a gagné. Comme conséquence, ses livres ont maintenant seulement un intérêt technique ; la question est juste de savoir s'ils donnent une bonne exposition du sujet qu'ils concernent. Parfois, ils le font (celui sur les "systèmes de racines" est devenu une référence standard dans le domaine) ; parfois, ils échouent à le faire (je ne donnerai pas d'exemple : c'est trop une affaire de goût).

Q : En parlant de goût, pouvez-vous dire quel sorte de style (pour les livres, ou les articles), vous aimez le plus ?

J.-P. S. : La précision combinée au côté informel ! C'est l'idéal, comme ça l'est pour les exposés. Vous trouvez cet heureux mélange chez des auteurs comme Atiyah ou Milnor, et quelques autres. Mais c'est difficile à obtenir. Par exemple, je trouve les français (moi inclus) un peu trop formels, et quelques russes trop imprécis...

Un point supplémentaire que je voudrais ajouter est que les articles devraient inclure davantage de remarques annexes, de questions ouvertes, et autres. Très souvent, elles sont plus intéressantes que les théorèmes effectivement démontrés. Hélas, la plupart des personnes ont peur d'admettre qu'elles n'ont pas la réponse à une question, et par conséquent, elles omettent de mentionner la question même si c'est une question naturelle. Quel dommage ! En ce qui me concerne, j'aime dire "je ne sais pas".

Interview de Jean-Pierre Serre

Bonjour à toutes, et bonjour à tous. En ouverture de notre conférence "Curves over Finite Fields : Past, present and future", nous avons le plaisir de recevoir Jean-Pierre Serre, plus jeune médaillé Fields et premier prix Abel, à l'occasion de la sortie de son dernier livre "Rational Points on Curves over Finite Fields" dans la collection Documents mathématiques de la Société Mathématique de France. Serre, merci beaucoup.

Eh bien, de rien, j'ai le plaisir d'être ici. Mais quel genre de questions avez-vous envie de me poser... ? Parce qu'on m'a souvent posé des questions, alors...

Oui, je sais que ce n'est pas la première fois que vous faites une interview, et on va essayer de ne pas se répéter, et de poser des questions un peu nouvelles, et aussi un peu centrées sur la conférence, le livre.

On va essayer.

On va essayer.

Est-ce que ?... *(désignant des mains ses deux interlocuteurs).*

On va alterner les questions. C'est Elisa qui va commencer.

Par quoi aviez-vous envie de commencer ?

La première question, je pense que c'est naturel, concerne le livre dont nous parlons aujourd'hui, il est tiré d'une série de cours donnés à Harvard...

Oui, oui, bon, un cours que j'ai donné en 85, et sur un sujet où je venais juste de travailler, parce que j'ai commencé à m'intéresser à ça en 83, 84, à peu près. Alors, il n'y a pas grand chose à dire sur le cours à Harvard lui-même, ça s'est très bien passé, ça se passait toujours très bien, à Harvard, il y avait un public très agréable, il n'y a pas de problème. C'est plutôt est-ce que vous avez envie que je vous raconte comment je suis venu à ce sujet-là peut-être...

Oui, par exemple.

Parce que c'est un peu compliqué. C'est un peu compliqué, j'y ai réfléchi ces temps-ci, je crois qu'au début, ce qui m'a attiré, ça a été ce résultat de Golod-Shafarevich sur les tours de corps de classes parce que ça montrait que les discriminants des corps de nombres, contrairement à ce qu'on pouvait penser, pouvaient rester bornés, ou du moins le root discriminant, c'est-à-dire la racine qu'il faut du discriminant pouvait rester bornée dans des tours, alors que visiblement les anciens, disons Schur par exemple, avaient des exemples qui montraient au contraire que le disciminant croît, que la racine n-ième croît. Et ça, ça a été une grande surprise, et du coup, je me suis mis à m'intéresser aux discriminants. Ensuite, il y a eu quelque chose aussi d'intéressant : Stark s'est aperçu que les bornes de discriminant que donne la géométrie des nombres, à savoir Minkowski, pouvaient s'améliorer par les fonctions zeta. Ça c'était très frappant qu'en travaillant juste sur l'équation fonctionnelle de zeta, et par de petites opérations analytiques pas difficiles, il obtenait de meilleures bornes que Minkowski. Ah ! Ça, c'était amusant et Odlyzko avait amélioré ça, ce sont les années 70, 74, quelque chose comme ça, et je me suis rendu compte à ce moment-là qu'en fait tous ces gens utilisaient ce qu'André Weil appelait les formules explicites de la théorie des nombres, c'est-à-dire les formules où vous mettez en relation les valeurs de certaines fonctions pour les nombres premiers d'une part, et pour les zéros de la fonction zeta de l'autre et en gros, c'est une transformation de Fourier qui va de l'un à l'autre. Alors je me suis rendu compte de ça parce que ça, Odlyzko ne l'avait pas vu. Alors

---

Interview menée à Neuchâtel, le 15 avril 2021, par Elisa Lorenzo-Garcia et Christophe Ritzenthaler, dans le cadre de la conférence "Curves over Finite Fields : Past, present and future".
Cette interview est visionnable ici : https://www.youtube.com/watch?v=hPm7$_x0DP8Q$.
Transcription Denise Vella-Chemla, juin 2021.

du coup, je me suis mis à faire des calculs et c'était très amusant parce que vous obteniez des bornes avec l'hypothèse de Riemann et des bornes sans l'hypothèse de Riemann et je me suis mis à apprécier la force de l'hypothèse de Riemann parce que si je regardais des corps de nombres de degrés 4, 5, des choses comme cela, je m'apercevais que je pouvais en faire qui étaient très voisins de la borne de l'hypothèse de Riemann. Elle était donc ex..., en fait, j'ai même un exemple, je me suis même fait un exemple où je construisais un corps dont la borne "battait" l'hypothèse de Riemann. Heureusement j'ai eu suffisamment de bon sens pour chercher où je m'étais trompé, je m'étais effectivement trompé. Et ça a été un jeu et à ce jeu, j'ai joué beaucoup avec Lenstra par correspondance : on a fait une petite compétition tous les deux, est-ce que tu arrives à faire un corps de tel degré de tel discriminant, oui, oui, oui, j'y arrive, et on a échangé comme ça des lettres, on n'a rien publié là-dessus mais c'était très amusant. Alors après, il y a eu... Alors qu'est-ce qui a commencé, sur les courbes ? Alors, il y a eu Stark et Stark, c'est assez ancien, c'est 60 et quelques, il avait utilisé la méthode p-adique de Stepanov, c'était Stepanov qui avait travaillé là-dessus, c'est ça ? (*interrogeant ses interlocuteurs du regard*), il avait fait une variante de Stepanov où il démontrait mieux que Weil dans certains cas. Alors l'exemple qui m'avait frappé, c'était courbes de genre 2 sur le corps à 13 éléments. Alors comme cette courbe de genre 2, elle revêt une droite qui a au plus 14 éléments, donc elle a au plus 28 éléments et 28 était permis par Weil. Et Stark montrait que non, il n'y est pas. Alors (*il fait la grimace*). Moi, je suis moralement un élève de Weil, ça m'est désagréable qu'une borne de Weil ne soit pas la meilleure. Bon j'ai déjà légèrement amélioré une fois une borne de Weil mais ça, c'est pas sérieux, mais quand même ! Ensuite, il est arrivé, nettement après, un mathématicien, là montrant, mais c'était moins surprenant, qu'on ne peut pas avoir une borne trop près de la borne de Weil parce que ça aurait entraîné des nombres négatifs de points, ça, c'était effectivement un argument magnifique. Finalement, il y a eu cet article, il y a eu Tsfasman-Vlăduţ. Tout ça, c'est vers vers 83 à peu près, quelque chose comme ça. Et puis surtout, il y a eu cet article de Manin qui avait un si beau titre "Combien peut avoir de points une courbe de genre g sur F_2 ?" C'est beaucoup plus beau de demander ça sur F_2 que sur F_q parce qu'il y a un paramètre, là, 2, combien, une courbe de genre 10, de genre 5 ? Combien ?

Ah ! Alors je partais en vacances à ce moment-là et je sais que j'ai passé un mois, je crois que c'était à Ceillac, à me régaler, à essayer de faire ça pour $g = 2, 3, 4$, au fur et à mesure, on y va quoi. Et c'est à ce moment-là que je me suis rendu compte du lien que ça avait avec le jeu sur les discriminants auquel j'avais joué avec Lenstra, qu'il y avait une analogie entre discriminant et genre... Pas aussi évidente que les analogies habituelles, par exemple, que le degré du corps correspond dans cette analogie au nombre de points de la courbe. Alors pourquoi ? Parce qu'en fait, si on a des points rationnels, on les met à l'infini en quelque sorte et ils vont jouer le même rôle que les points à l'infini et sur un corps de nombres, les places à l'infini correspondent au degré à peu près. Alors j'étais moralement préparé à faire ça, à utiliser la formule explicite de Weil que je connaissais bien dans ce cas-là, qui est beaucoup plus facile en plus, donc je me suis beaucoup amusé. Alors amusé... et obligé de temps en temps... (*sifflant entre ses dents pour donner une idée de la difficulté*) de résoudre des problèmes théoriques parce que, par exemple dans le cas de Stark, je tenais beaucoup à comprendre pourquoi il avait réussi à battre Weil, parce que depuis cette époque-là, on avait le théorème de Honda-Tate, donc on savait que toutes les valeurs propres satisfaisant aux conditions de Weil sont possibles pour la variété abélienne. Donc là, j'avais une variété abélienne de dimension 2 qui refusait d'être une jacobienne. Alors, la littérature de cette époque était un peu flottante. On nous disait "les variétés abéliennes, principalement polarisées de dimension 2 sont des jacobiennes, celles de dimension 3 aussi". C'était à peu près ça qu'on entendait. Bon alors, il y avait des petits discours du genre "oui bah, évidemment on accepte un produit de deux courbes elliptiques", c'était comme ça. Hou ! (*se frottant les mains en signe de difficulté*). Ou alors le cas où ça m'a été vraiment utile, ça a pas été tellement le cas de Stark, celui-ci est arrivé assez facilement, mais ça a été le cas de la courbe de genre 7, où... Jusque-là, j'étais arrivé à construire, j'avais trouvé des bornes, j'avais une petite calculette de poche, je pouvais quand-même programmer des petits trucs...

Des nombres de points...

Non, non, non, ça, je ne pouvais pas, non non ça, je ne pouvais pas, non,. Mais je pouvais calculer ce que mes polynômes explicites donnaient, comme bornes, alors je modifiais un petit peu les coefficients, je mettais un 0.1 ici, j'essayais un machin, j'essayais d'arranger, oh, c'était très rigolo. Et simplement pour le genre 7... Alors si je me souviens bien, est-ce que vous vous souvenez, est-ce que la borne, c'est... sur F_2, est-ce que la borne, c'est 11 ? Ou est-ce que c'est 10 ? C'est l'un des deux *(interrogeant du regard ses interlocuteurs, indécis)*. Peut-être que c'est 11, c'est possible, par mes bornes et les formules. C'était quand-même un polynôme d'assez gros degré, pour moi, calculant à la main quoi ! Bon, j'ai fini par arriver à coincer ce polynôme. J'ai été aidé par Cartan. Cartan était tout content, de..., Cartan... Quel âge il avait à l'époque ? Il avait 70 et quelques, ce qui est horriblement vieux comme vous savez *(Serre rit, ayant lui-même 94 ans)*. Mais il aimait bien travailler, il avait une calculette, il m'a aidé, et finalement, j'ai fini par trouver que le polynôme caractéristique, il n'y en avait qu'un de possible, a priori. Pourquoi en fait, il *n'était pas* possible, hou ! Une variété abélienne de dimension 7, ben, j'ai regardé, je me suis dit "ah !", j'ai réussi à le partager en deux morceaux, de 4 et 3 sauf erreur, et qui étaient de résultant 1, ils n'avaient pas de racine commune même modulo p, et donc couper la variété abélienne, oh, ouf ! Ça, je savais quand-même qu'une jacobienne n'est pas coupable, munie de sa polarisation et tout *(murmurant "du Frobenius...")*. C'est comme ça que j'ai appris d'ailleurs un certain nombre de choses sur les courbes, les choses dont j'ai eu besoin. J'ai eu besoin donc de ça, que les variables abéliennes ne sont pas coupables. J'ai eu besoin ensuite pour d'autres choses de regarder si la jacobienne pouvait être un produit de courbes elliptiques. Et là, il y avait des vieux résultats de japonais là-dessus. Bref, j'ai fait mon éducation sur le tas en quelque sorte. Et donc j'ai appris des choses, grâce aux courbes sur les corps finis. Bon, je ne veux pas trop en parler...

Oui, mais donc, juste pour dire, dans ce que vous dites, en fait, dès le départ, en fait, l'aspect asymptotique et l'aspect "on fixe plutôt le genre et on cherche à q", en fait déjà, vous aviez les deux questions un peu mélangées en même temps, en fait ?

Oui, oui, j'ai, bien sûr, oui, oui.

Vous n'avez pas focalisé sur une des choses en vous disant "après, on pourrait inverser"...

Non, pour moi c'est allé en parallèle. Mais j'ai souvent fait ça dans des cours. Par exemple, à Harvard, j'avais fait un cours sur les groupes finis, et c'était, disons, le mardi, la théorie habituelle des groupes finis et le jeudi, la théorie des caractères. J'avais fait aussi un cours sur groupes et algèbres de Lie, et je disais "tel jour, algèbre de Lie et tel jour, les groupes" parce que j'avais l'expérience de ces choses-là, je savais que si je démarrais les groupes de Lie par les algèbres de Lie, toute l'année y passait, c'est long. Tandis que si je faisais les deux en même temps, j'étais tranquille. Et j'ai fait pareil à Harvard, j'ai fait Petits corps F_2 pour un jour et l'autre jour, le genre, le genre fixé. C'était une façon d'être sûr qu'aucun des deux morceaux n'empiète sur l'autre, c'était une protection.

Vous avez dit que vous avez appris beaucoup de choses avec ce cours-là et c'était ça : une même motivation que vous avez pour faire les cours, vous forcer à apprendre, ou...

Je n'ai jamais de motivation.

(Rire d'Elisa).

Je fais ce qui m'amuse, et puis voilà. Et ça m'a amusé en particulier. Mais aussi par le fait que je pouvais exploiter des choses différentes auxquelles j'avais pensé avant, sur les discriminants.

Donc en fait, pour essayer de préciser les choses, il y a eu une invitation de Harvard et vous avez proposé ce cours ? C'est comme ça que ça s'est passé ?

J'avais une invitation plus ou moins permanente d'Harvard. Je pouvais y aller quand je voulais, et chaque fois, je faisais un cours, parce que c'est plus amusant, pour moi, de faire un cours et ils aimaient bien ça. Et c'était moi qui choisissais chaque année le sujet.

Donc la motivation, en fait, pour faire tant de cours, c'était simplement, en fait, que vous aimiez ça, c'était amusant, il y en a sans doute le contact personnel avec les gens... ?

Non, ça n'est pas ça, le plaisir pour moi était de raconter. Et il y avait un public, un très bon public, ça, c'était vraiment bien.

(Elisa, riant.) **En fait, nous avons une question sur ça.**

(Serre l'encourage.) Alors allez-y.

Dans une interview, à Lille, je pense, vous avez dit que les étudiants de Harvard, je ne sais pas si c'est ainsi qu'il faut le dire, étaient "meilleurs" que les étudiants normaliens.

Ce n'est pas ça, j'ai pas dit meilleurs, un !...

Mais dans quel sens ?

Ouf ! *(Soupir encore exaspéré).* Alors je vais vous raconter deux histoires, mais ça n'a pas beaucoup de rapport avec les courbes sur les corps finis, mais...

Avec les cours en tout cas...

Oui, ça a un rapport. J'ai donné un cours à l'École Normale, ce qui est devenu le Cours d'arithmétique, alors je ne fais aucun commentaire sur personne. Mais, ce qui arrivait, c'est que ce cours, je me rappelle, était le mercredi. C'était le mercredi matin, dans une des salles de l'École Normale et je commençais mon cours. Et puis au bout de 15, 20 minutes, arrivait un type, toujours le même. C'était le mercredi, il avait acheté le journal Le Canard enchaîné, il s'installait au premier rang, et il ouvrait son journal, pendant que je faisais mon cours. Je n'ai pas été assez courageux pour le mettre dehors. Eh ben, ça, à Harvard, ce n'était pas possible du tout. Et vingt ans après, à l'École Normale, ça ne s'était pas amélioré, je leur ai fait une série de cours sur un joli sujet chaque fois, chaque semaine, je prenais une jolie petite histoire de maths ; par exemple, les algèbres normées de Gelfand, quelque chose comme ça, un truc isolé, une heure et demi, je racontais, au début, un peu l'histoire du sujet, mais il n'y avait personne, pratiquement, il y en avait un à deux et en fait, en général, ils n'étaient pas de l'École Normale, c'étaient des étudiants d'Orsay qui avaient eu le droit de venir... Et les Normaliens arrivaient... dix minutes... un quart d'heure... une demi-heure... trois quarts d'heure en retard, et au milieu du cours. En plus, ils entraient à côté du tableau... Je me suis juré que je ne recommencerais plus à donner des cours à l'École Normale. Voilà...

D'accord. Bon après, moi, ce que j'espère, c'est qu'on a la dissolution de l'ENA, là, j'espère que vous n'allez pas provoquer la dissolution de l'ENS avec ce qu'on vient de dire maintenant.

(Rires et léger silence de réflexion).

Alors, on a envie de dire que malheureusement les élèves de Harvard payaient quelque chose ou leurs parents payaient assez cher et les élèves de l'École Normale étaient payés et ça, ça change un peu la psychologie, c'est un peu triste mais j'ai peur que ça soit l'explication... Il y avait de ça.

Si on revient un petit peu sur sur le cours, enfin plutôt sur le livre, et sur la manière dont ça s'est passé, donc comme Elisa l'a dit, c'était un cours que vous avez donné en 85, c'est un vieux serpent de mer de l'éditer mais donc, ça a duré un moment, et donc vous avez reçu, en fait, notre proposition de le transformer en livre, il y a à peu près 3-4 ans, comment ça s'est passé, pour vous, de revenir sur un travail qui avait été...

Aucune difficulté.

Comment ça a été de revenir sur un travail alors qu'il s'était écoulé un tel laps de temps, en fait, est-ce que c'était plaisant ?...

Ce laps de temps n'avait pas d'importance non. Quelque chose qu'on a bien compris se garde. Quand on a compris à moitié, ça tombe à zéro pour cent très vite. Mais si on l'a bien compris, ça va. Et ça, à l'époque, je l'avais vraiment bien compris donc je me suis remis dedans sans aucun problème... donc, ça, c'était... Et ça me faisait plaisir qu'il soit publié parce qu'effectivement, c'est un peu idiot d'avoir des choses qui sont juste photocopiées. Puis la rédaction, vous la connaissez, elle n'était pas très précise, la rédaction des notes de cours. Non, non, ça a été agréable, ce qui a été plus difficile pour moi, ça a été de me mettre dans le système de TeX qui était utilisé, qui est un système que je n'utilise jamais parce qu'il est trop savant pour moi, avec les propositions, avec des tas de symboles, et tout. Non, moi, je tape en TeX proposition 1, carrément, et je paye le prix ! C'est-à-dire que quand je change la numérotation... *(Rires)*. C'est une catastrophe... ! Mais ça, ça a été dur, mais une fois que je m'y suis mis dedans, ils ont été très gentils. Qui est-ce qui m'a aidé, en particulier, sur TeX ?

Alp Bassa.

Oui, c'est ça, oui, il m'a bien aidé. Mais remettre les choses... J'ai été obligé de permuter certains morceaux par exemple. Et alors, un grand succès de ce bouquin, alors ça, j'en suis ravi, c'est que ça a amené Oesterlé a rédiger cette démonstration qui est vraiment compliquée. Et puis, il l'a joliment rédigée, cette démonstration, et ça s'est inséré, comme chapitre, ça, c'était parfait.

Vous voulez dire sur les formules explicites ? Je me souviens, je pensais à cette difficulté d'éditer un livre tellement longtemps après le cours, je me souviens de cette anecdote, à ce mail que j'ai vu passer où vous écriviez à Beauville : "Beauville, vous avez énoncé ce théorème..."

(L'interrompant pour corriger) "Tu, Tu", on a été à Bourbaki...

(Reprenant) **"Beauville, tu as énoncé ce théorème, à cette époque et d'où ça vient ?"**

(Riant) Oui, mais quelle importance ça a, en plus, je l'ai mis dedans, effectivement, bon, parce qu'aucun des deux ne sait lequel a fait quoi, et puis très bien, c'est parfait.

Et vous avez eu du plaisir aussi, parce que vous vous êtes relu, avec des choses que vous avez complétées, certains paragraphes, en vous disant "peut-être là, j'aurais pu aller un peu plus loin"...

Oui, il y a certains endroits effectivement, où j'ai essayé d'aller un peu plus loin, mais sans plus. Par exemple, j'ai un peu mieux compris les... Il y avait ce cas qui m'avait énormément amusé quand je m'en étais rendu compte. Par accident, je me suis rendu compte que les courbes de Deligne-Lusztig qui avaient été introduites pour des raisons complètement différentes donnaient de bons exemples. C'était d'autant plus drôle que les courbes de Deligne-Lusztig n'avaient aucun point rationnel telles qu'elles sont définies par Deligne-Lusztig. Ce sont des courbes affines, des variétés affines, aucun point. C'est d'ailleurs conforme à cette philosophie que les points rationnels sont les points à l'infini. Chez eux, c'était explicite comme ça. Et ce qLusue j'arrivais à faire... Je n'ai aucun souvenir de la façon dont j'arrivais à trouver les polynômes qui me donnaient les bornes que je voulais, ça... Dans le bouquin, elles sont introduites en disant "Posons".

Probablement, je tâtonnais, et ça, je ne garde pas de souvenir de ces choses-là. En tout cas, c'était là. À la révision, j'ai regardé ce que ça donnait pour d'autres genres qui étaient interdits par Deligne-Lusztig, et ça donne des bornes pas très jolies, mais explicites quand-même. Bon... Bon, continuons...

Bon, un peu en rapport avec la dernière question, est-ce qu'il y avait des questions que vous avez pensé à traiter pendant le cours et que vous n'avez pas eu le temps, ou... qui sont revenues plus tard ?

J'ai l'impression que dans le cours de Harvard, j'ai dit à peu près ce que j'avais envie de dire et que je n'ai rien laissé.

D'accord.

Les questions que j'ai laissées ouvertes, en général, elles le sont encore, alors, ça fait trente et quelques, combien ? *(Rire d'Elisa, qui répond 35.).* Trente cinq presque, oui, bon. Alors sur ces questions-là, peut-être que vous avez envie que j'en parle un peu, je ne sais pas...

Oui, avec plaisir, oui.

Celle que je trouve la plus jolie, c'est d'essayer de montrer que la borne de Weil n'est pas si mauvaise que ça, qu'à une constante près, elle est optimale. Ça, donc, le genre est fixé, par exemple 3, comme vous le savez... "What else ?" comme on dit *(Rires)* et... Ça me ferait plaisir, en quelque sorte, qu'elle soit optimale, mais je n'ai pas vraiment de raison de conjecturer ça. Bon la seule raison, si vous faites une conjecture, autant qu'elle soit jolie. Donc pour que ce soit joli, on aurait envie de conjecturer qu'elle est effectivement optimale mais c'est un peu sentimental comme raison, ce n'est pas de... *(s'adressant à Christophe)* Mais vous, qui avez travaillé dessus, est-ce que vous pensez que c'est optimal pour 3, pour 3 ?

Donc, vous voulez dire qu'on s'éloigne plus de 3, de la borne, mais est-ce que vous mettez 6 ?...

Moi, je sais que j'avais écrit 6 pour avoir de la marge, mais vous, vous savez, il n'y a pas de contre-exemple avec 3.

Non, il n'y a pas de contre-exemple avec 3.

Avec la borne de Weil, ou avec la borne de Weil modifiée.

Avec votre borne.

Ah, bon, alors je pense que mon 6 était relatif à la borne de Weil, c'est pour ça, je pense, que j'avais mis 6.

Non, il n'y a pas de contre-exemple, en même temps, enfin, comme vous dites, sans... C'est un petit peu... On joue un petit peu avec le futur, donc, il n'y a pas vraiment de raison de dire dans un sens ou dans l'autre...

Non, et c'est même un peu bête d'essayer de faire des conjectures dans des situations pareilles. Ça m'est arrivé souvent de faire des conjectures mais il faut un réseau de raisons... ou une harmonie. L'harmonie, là, elle y est, quand-même, je trouve, l'harmonie. Mais donc je n'oserais pas appeler ça une conjecture, vraiment, ça.

D'ailleurs, vous dites c'est une question, je crois, dans le livre.

Mais oui, je me méfie, parce que les gens sont tellement contents, ensuite, de publier un "contre-exemple à une conjecture de Serre". *(Rires).* Je me rappelle un article dans les Annals dont c'était le titre. Et je n'avais jamais conjecturé ça : j'avais dit "on ne sait pas si..." et puis et en fait, même mentalement, je n'avais absolument aucun choix. C'était tellement plus joli de dire "Contre-exemple...".

Mais alors, vous n'avez pas de conjecture, pour le genre 3 ? Parce que pour 4, ce n'est pas 4, ça, on a trouvé un contre-exemple, dans les tables, dans le mainpoint.
- Oui, après , quand on augmente le genre, effectivement...

Pour 4, vous ne pensez pas que c'est borné.

Ah non, on n'a pas dit ça, on a juste dit qu'en fait la règle simpliste qui voudrait dire que ça va être toujours plus petit que g, bon déjà, elle n'est pas vraie pour 2...

Non non non, écoutez, un grand O, on n'en est pas au point de mesurer le grand O, vous voyez, déjà, demander de démontrer que c'est un $O(1)$, c'est une conjecture très optimiste, alors autant dire que c'est pour plus tard...

Mais alors pour 3, si on revient au cas $g = 3$, on ne peut pas conjecturer quelque chose, mais en maths, il faut partir dans une direction. Si je devais partir dans une direction, ça serait la direction de prouver que ce n'est pas le cas.
- De trouver un contre-exemple...

Vous avez bien raison. *(Ils rient car JPS semblait dire qu'il était difficile de choisir).*

Ah vous voyez, quand-même !

Non, non non non, vous avez raison parce que quand on veut réfléchir à un sujet de ce genre, d'ailleurs Nagata disait ça, pour les anneaux commutatifs, pour les exemples et contre-exemples : il essayait de prouver les deux, soit que c'était faux, sont de construire un contre-exemple. Alors, il travaillait, il travaillait, finalement, il y en avait un en général qui gagnait, des deux... Mais travailler sur les deux, j'ai aussi un exemple comme ça, d'un théorème que j'ai démontré, ou quelques heures avant, je ne pouvais pas vous dire si j'allais démontrer que c'était vrai ou que c'était faux. J'essayais de trouver un contre-exemple, je croyais que j'avais trouvé un contre-exemple, et je m'apercevais "Ah ! Bon Dieu ! Non ! Ça ne peut pas marcher **parce que** quelque chose s'y oppose". Et du coup... Mais finalement, c'est le **parce que** qui a gagné et j'ai réfléchi et j'ai alors démontré ce que je voulais. Mais c'est grâce au jeu de balançoire entre les deux. Il y a d'ailleurs un jeu, qui était très à la mode à Princeton en 52, qui est exactement ça.

C'est un jeu qui est sur un grand losange et on dispose de pièces que l'on met, c'étaient des boules, des jaunes et des noires et les jaunes mettent leurs boules, l'un après l'autre, alternativement et il faut qu'ils connectent ce côté-ci avec ce côté-là, donc il faut qu'ils y arrivent ; les noirs doivent connecter *(geste pour désigner la perpendiculaire pour les pions noirs)* et là, c'est un jeu où l'on sait que l'un des deux gagne. Mais quand on y joue, on a constamment en tête les deux stratégies, c'est-à-dire d'empêcher l'autre de connecter et soi-même de connecter. C'est tout à fait analogue au jeu que nous jouons quelquefois, vous essayez de prouver et vous essayez de faire un contre-exemple. Malheureusement, nous ne sommes pas sûrs, nous, que l'un des deux côtés gagne.

Oh, mais c'est une très jolie métaphore. C'est vrai.

C'était Nash qui jouait à ce jeu-là ; on l'appelait le Nash, mais en fait, ce n'était pas lui qui l'avait inventé, ça se fait avec des hexagones, enfin, c'est un joli jeu.

Vous avez en tête d'autres questions comme ceci, qui sont dans le livre, et que vous aimeriez voir un jour résolues.

Sur le sujet des courbes sur les corps finis, il me semble que vous m'en aviez cité une autre, non ? Celle-là, c'est la principale, il n'y a aucun doute.

Il y a le cas asymptomatique, effectivement.

Oh, ils sont un peu moins... Ah ! Quand même, si, sur F_2. Ah oui, le fait que ces bornes sont ridicules, réellement, sur un nombre premier. Ah non, ça, c'est vraiment lamentable.

Vous voulez dire les bornes inférieures. Qu'on n'arrive pas à construire des bonnes familles qui se rapprochent suffisamment...

Oui, sur F_2, si je prends un genre qui est très grand, les exemples connus sont... Non, ça, c'est désagréable parce que, bien sûr, sur les carrés, c'est essentiellement optimal, mais même sur les puissances d'un nombre premier, quand la puissance n'est pas 1, les bornes ne sont pas mal ; tandis que sur 2, cette borne que j'ai fabriquée en log, c'est pas très malin comme méthode, c'est vraiment de la combinatoire facile, je suis même surpris que les combinatoristes n'arrivent pas à faire mieux. Mais de toute façon, un terme en log, alors qu'on attend une puissance... Alors ça, je serais vraiment curieux de savoir quelle est la vraie borne. Est-ce que, par hasard, ce log est correct. En tout cas, c'est une question à laquelle je n'ai aucune envie de réfléchir : j'y ai réfléchi dans le temps, j'ai vu que je ne pouvais rien faire, j'ai abandonné. Ça, c'est...

Vous voyez, là, autant sûrement effectivement c'est peut-être parce que c'est plus mon domaine, sur le genre 3, je dirais que je partirais dans un sens, mais là, savoir si les corps premiers F_p avec p premier, sont vraiment différents de F_{p^3} dans leur comportement.

Ça ne paraît pas normal.

Je n'oserais pas m'aventurer, ni dans un sens, ni dans l'autre.

Non, moi non plus, alors vraiment, alors, autant, j'aurais envie quand même, pour l'autre, que ce soit $O(1)$, que ça marche, tandis que pour 2, il faudrait deviner un ordre de grandeur, et ça, c'est beaucoup plus difficile, tandis que $O(1)$, n'importe qui peut deviner $O(1)$. Mais après, est-ce que c'est $O(p^{1/12})$ ou Dieu sait quoi, non.

Ou alors, il faudrait trouver une raison, je veux dire, presque intrinsèque pour laquelle...

(Il le coupe.) Vous trouvez une démonstration, les raisons... Je ne crois pas au terme de "raisons".

Une démonstration.

(Désignant le nombre élevé de questions sur la feuille de ses interlocuteurs) On ne va pas faire tout ça, à ce rythme.

Non, ne vous inquiétez pas, on y va en diagonale.

Essayez de choisir quelque-chose.

Je voulais juste vous demander, parmi les questions... Vous évoquez beaucoup de choses dans le livre et ça va un peu dans tous les sens, mais je trouve que ça fait vraiment un peu son charme dans le cours : il y a des morceaux de maths qui se recollent un petit peu partout, et à un moment, vous sortez des corps finis pour parler de ce problème des jacobiennes décomposables.

Ah oui, oui.

Vous allez le réaborder après avec Ekedal d'ailleurs, vous êtes revenu dessus plus tard.

Bon, dans mes livres et dans mes articles, j'essaye toujours de mettre des petites choses amusantes, pour qu'ils sortent un peu du thème, pour que ça ne soit pas trop lourd. Gide n'aimait pas beaucoup Romain Rolland. Romain Rolland écrivait des romans et Gide les comparait à ces gâteaux alsaciens un peu lourds et dans lesquels on trouve, de temps en temps, des petits grains de raisin. Et je me suis dit qu'il fallait mettre des grains de raisin dans les textes mathématiques, et de temps en temps, je mets des grains de raisin. Alors quelquefois, ils font sauter en l'air le lecteur qui ne connaît pas le sujet du tout, il se dit "mais qu'est-ce que ça vient faire ?..." C'est un grain de raisin. Et donc, là, le grain de raisin, ce sont ces curieuses questions, effectivement, qu'il y a des courbes de grand genre, dont la jacobienne se casse. Hou ! Elle n'a pas le droit de se casser avec sa polarisation, mais elle se casse, même à isogénie près, c'est déjà.... Et ça, nos ancêtres aimaient beaucoup ça, parce qu'ils étaient tout contents, parce que les intégrales qu'ils ne savaient pas calculer, de genres plus grands, se réduisaient aux intégrales elliptiques, alors ils étaient sur terrain... Oui, parce que c'est la même chose. Dans le livre, je l'ai dit pour les intégrales de première espèce, mais en fait je crois que c'est vrai aussi pour les intégrales de seconde espèce, elles se ramènent aussi aux intégrales elliptiques, je crois, quand la jacobienne est comme ça.

C'est bien possible.

Oui c'est une drôle de question. Avec Ekedal, on s'était amusé à faire des tas d'exemples.

Je crois que c'est 1200, le plus grand exemple, pour une courbe modulaire.

Alors, les deux grands exemples, c'est 1000 et quelques et 500 et quelques, et nous avons publié ensemble une Note aux Comptes-rendus. Et la note aux Comptes-rendus, on nous obligeait à écrire une note aux Comptes-rendus en français et une note aux Comptes-rendus en anglais. Alors dans la note aux Comptes-Rendus en français, j'avais écrit "Nous fabriquons des courbes jusqu'à 1000 machin..." et dans le compte-rendu anglais "des courbes jusqu'à 500 et quelques", oui, j'avais mis des bornes moins bonnes, dans le résumé anglais, pour m'amuser. correctes, bien sûr, mais donc pour m'amuser. Alors est-ce qu'il y en a pour des genres assez grands, est-ce qu'il faut faire des conjectures ? Si un machin marche jusqu'à 1000, il y a des trous d'ailleurs, il y a des trous vers trente et quelques. Là, je n'ose pas faire de conjecture là-dessus. Mais... ça m'avait intéressé d'un point de vue probabiliste parce que si vous cherchez les chances qu'une variété abélienne soit un produit de courbes elliptiques, c'est presque rien : la variété, c'est un truc immense, c'est quadratique en g, j'ai oublié combien c'est. Tandis que les modules de courbes, c'est linéaire en g, il y a énormément de variétés abéliennes, et pourtant en degré 1000, par exemple, vous en trouvez une.

En fait, la philosophie est un peu la même : quand vous cherchez à construire des courbes en partant de variétés abéliennes que vous savez exister par la théorie de Honda-Tate, c'est essayer de localiser si une de ces belles variétés que vous avez construites tombe dans le lieu des jacobiennes. Donc en fait, c'est un peu...

C'est sûr, dans le crâne, ça se loge dans le même genre d'endroit. *(Riant en montrant des endroits divers sur son front)* Cependant, cela n'a rien à voir avec les courbes sur les corps finis, ça, c'est plutôt sur les complexes. Ça chance de niveau d'ailleurs, même, sur les corps finis parce qu'il y a quand-même Frobenius qui a tendance à casser les choses en morceaux, sur $\mathbb{C}$.

Vous faites une remarque à ce sujet en disant qu'effectivement sur les corps finis, la situation est complètement différente, si on fixe les angles des Frobenius.

Oui, on peut aussi formuler... *(s'interrompant)* Bon, alors, est-ce que vous avez d'autres questions ?

Oui, si je peux, sur des questions mathématiques un peu plus précises ; c'était dans le dernier cours que vous avez donné, c'est celui à Taiwan.

Ce n'est pas mon dernier cours.

Ah, pardon.

Oui, peut-être que c'est le dernier, oui, je me suis beaucoup amusé.

Et le livre, avec les notes...

Ah oui, ce n'était pas tellement différent. Mais d'abord ce n'étaient pas des courbes, c'étaient, en général, des variétés. Et le jeu n'était quand-même pas le même : on fixe la variété, on se la donne quand même, par exemple une courbe elliptique, et puis vous la regardez modulo tous les p donc et vous regardez comment ça varie, asymptotiquement, formule exacte, rapport avec Langlands, là, on tombe justement sur toutes les choses dans la philosophie de Langlands. Et c'est très différent mais il y a quand-même des petits rapports, par exemple, dans une question que je pose dans le... (est-ce que je l'avais posée à Harvard ou est-ce que je la pose seulement dans le texte de maintenant) : quand vous prenez une courbe elliptique, oui, c'est uniquement elliptique, et que vous la réduisez modulo p et vous vous demandez si vous trouvez une infinité de fois ou pas la borne de Weil.

Vous aviez posé la question à l'époque.

Et, semble-t-il, il a été démontré en multiplication complexe et j'aimerais vraiment, d'ailleurs, comprendre la démonstration, parce que je suis vraiment très surpris qu'on ait pu faire ça et ça, bon, ça avait sa place dans le bouquin, de dire ça. Mais ça a des rapports avec des choses assez différentes, qui m'avaient beaucoup impressionné, de Bhargava, Bhargava arrivant à estimer des nombres de points dans des régions, dans des situations où les méthodes standard de Minkowski ne marchent pas, parce que le truc est par exemple... *(décrivant la forme de la variété avec ses mains)*, il y a bien des pointes très fines, et si la taille de la pointe est plus petite que 1, vous ne pouvez pas remonter le nombre de points entiers en vous disant que c'est la surface, quoi, c'est pas... Mais, lui, il y arrive, à faire des choses comme ça, Bhargava. Mais là, on s'écarte un peu...

Non, non, pas du tout

Toutes ces choses forment un ensemble délicieux !

Dans ce cours-là, par exemple, vous parlez de la conjecture de Sato-Tate, des groupes de Sato-Tate et vous donnez des actions.

Alors ça, c'est quelque chose qui m'a intéressé depuis très très longtemps. J'ai finalement fait publier une lettre que j'avais écrite à Borel quand j'avais commencé à comprendre ces choses-là. *(Long soupir)* Ah ! Quelle est la grande période de ces choses-là ? C'est 76 ou 67, je ne me souviens plus, une erreur de dix ans, c'est embêtant ! Il y a eu... C'est 67, c'est ça, parce que vers 67 sont apparues 3 choses en même temps : la théorie des motifs de Grothendieck, la philosophie de Langlands, et la troisième chose, une chose de Sato-Tate, tout ça, ah, non, troisième chose : l'article de Weil. L'article de Weil, pour moi, s'est combiné avec le reste. Parce que voilà ce que faisait Weil : si vous prenez une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$, un peu tout le monde pensait que la fonction L qu'on peut écrire a une équation fonctionnelle du type habituel. À l'époque, on n'avait pas une idée claire de la notion de conducteur, donc on ne savait pas à quel niveau. Mais ce qu'on savait, par la faute de Hecke, si j'ose dire, eh bien, c'est que dès que le conducteur était au moins 4 ou 5, il y avait une infinité de fonctions qui avaient cette équation fonctionnelle mais qui étaient plus moches les unes que les autres et qui n'étaient visiblement pas celles qu'on voulait. Ça, c'était très démoralisant, parce qu'on se disait "non, on n'arrivera jamais à montrer que...". Et puis Weil fait cet article "Caractérisation par leur Functionline Lineshungun".

Ne vous inquiétez pas, on est en suisse romande, ils ne vont pas vous attaquer pour ça.

J'ai le droit de toute façon. Gleichungen, parce qu'il avait repris le titre d'un article de Hecke, où c'était Gleichung... et ce que montrait Weil, c'est que... et c'était une de ses philosophies... que si une série de Dirichlet a un sens arithmétique et que vous la tordez par des caractères, vous mettez des petits $\chi(n)$ devant, elle doit aussi avoir de bonnes propriétés, l'équation fonctionnelle par exemple, et alors là, il montre que si on ajoute ça, si on ajoute qu'en tordant, il y a une équation fonctionnelle et un rabiot, un rabiot auquel vraiment personne n'avait pensé, ça ne suffit pas : il faut que la constante de l'équation fonctionnelle dépende de la torsion d'une façon complètement explicite assez subtile avec des sommes de Gauss. À ce moment-là, oui, c'est une forme modulaire. Alors ça, quand nous avons vu ça, on a... C'est pour ça que j'ai trouvé ridicule la controverse avec Shimura parce que Shimura n'avait rien fait dans cette direction-là. Il n'avait même pas cité la conjecture de Taniyama, mais c'est bien puisque Taniyama était un copain et puis, ça a été publé. Mais il n'avait rien fait. Tandis que Weil, là, en introduisant cette idée, ouh ! ! ! On était tous (Birts, Tandayer), tout ça, ça a été un énorme... Tout ça, c'est en 67, qui est pour moi une année-charnière en théorie des nombres. Et puis tout ça prenait en masse, avec les motifs qui devaient donner des formes modulaires, c'était merveilleux, c'est resté merveilleux.

Vous voulez dire que c'est encore le sujet ou le point mathématique qui vous qui vous émerveille le plus à l'heure actuelle, ces espèces de grands ensembles avec Langlands...

Oui, oui, je crois. D'autant plus que les derniers sujets passionnants. Prenez l'hypothèse de Riemann. L'ennui, c'est que si vous travaillez là-dessus, vous risquez de passer votre vie à ne pas la démontrer. Par exemple, Paul Cohen y a passé une bonne partie de sa vie, Halphen, tandis que le groupe de choses qui s'appelle la philosophie de Langlands se découpe en morceaux, en petits morceaux, petits morceaux qui ont l'avantage de, expérimentalement, on les voit qui se font petit à petit peu, même si ce sont des articles de 300 pages qui font les petits morceaux *(riant)*. Mais, mais au moins, les gens qui travaillent là-dessus arrivent en général à faire quelque chose, c'est beaucoup plus agréable pour des gens, c'est difficile. Mais surtout, c'est une unification extraordinaire, et puis des gens qui savent l'utiliser en déduisent des choses très concrètes, des gens comme Gross par exemple, ils ont des déduisent l'existence d'extensions de $\mathbb{Q}$ avec des groupes de Galois donnés, par exemple. Ça a eu des retombées qui n'étaient absolument pas prévues, par ça. Donc de loin, je dirais, du moins de ce que je connais des maths, je dirais que c'est ce qu'il y a de plus important. Mais je n'y travaille surtout pas, non non.

J'allais dire, pour essayer justement un peu de positionner ces grandes théories mathématiques, les courbes sur les corps finis, en tout cas comme vous l'avez fait, on a l'impression, en tout cas, en lisant le livre, que vous avez un vrai plaisir en fait à manipuler différentes sortes de maths. De temps en temps, vous faites un exemple, de temps en temps, vous partez sur un théorème de théorie des nombres, de temps en temps, vous avez besoin d'un gros argument de théorie algébrique, et ce mélange, de dire, ben oui, que de temps en temps, on doit faire de l'algorithmique, de temps en temps on doit faire des exemples, de temps en temps on doit faire des choses expérimentales, c'est assez jouissif mais on a l'impression que c'est vraiment quelque chose qui vous plaît.

Alors le bouquin sur le cours de Taiwan, il est encore plus comme ça parce que il y a des théorèmes carrément sur les caractères des sous-groupes finis, il y a des fractures... Là, c'est un mélange parce qu'on est tout près de Langlands, là-dedans, justement, mais en même temps... *(Temps de réflexion)* Oui, vous donnez une idée de ce que je ne veux pas faire : j'ai été très choqué, une fois, Lang, nous expliquant dans un exposé, il avait fait avec quelqu'un d'autre une série d'articles sur un certain sujet. Et il nous avait dit en s'en vantant "Et nous avons essayé qu'il n'y ait qu'une seule idée par article." Alors je l'avais interrompu et je lui avait dit "at most one !"[1]. Mais ça, ça me dégoûtait, comme idée, l'idée que dans un article, il n'y ait qu'une idée originale, oh non non, si on pour mettre plus, ah ! J'aimais beaucoup les articles, j'en avais écrit un par exemple, sur le groupe $SL(2)$ et sur les groupes de congruence, où il y avait deux cas, et dans un cas, c'était de l'arithmétique assez difficile, et dans l'autre, c'était de la géométrie, c'étaient des géodésiques et des trucs comme ça et j'étais ravi que... Ah non,cette idée de Lang était, mmm !

Généralement, de créer des liens, en fait, entre les choses, en mathématiques, c'est ça qui est plaisant, qui est beau ?

Vous avez employé "créer"...

Elles sont là.

Les liens, ils existent, oui.

Alain Valette nous a raconté qu'il y a 10 ans, enfin ou quelque chose comme ça, vous aviez été invité, c'était à Lausanne, et en sortant, vous aviez trébuché mais apparemment, grâce à vos réflexes venant du judo, vous aviez réussi à faire une...

Je me souviens, c'était au Copernic, j'ai buté contre quelque chose par terre, et j'avais fait un tout petit peu de judo quand j'étais jeune, et le peu qu'on en avait fait, on m'avait appris uniquement à tomber et

1. Au plus, une. *(inclut 0)*

alors j'ai fait ce qu'on doit faire dans ces cas-là, j'ai laissé aller, j'ai fait un tour complet et puis voilà, je me suis redressé. Ils étaient un peu inquiets à l'idée qu'à 80 ans et quelques, ou quoi...

(Une quatrième personne (peut-être Alain Valette), collègue de Serre, dit sans qu'on le voie)

Oui, on s'était inquiétés.

Oui, vous vous étiez inquiétés, moi pas.

Mais vous citiez l'escalade, moi j'y vois souvent, quand même, en fait, on est confronté à un problème quand on fait de l'escalade.

Oui, oui oui, d'ailleurs d'ailleurs les anglais appellent "problème", ce que nous appelons une "voie d'escaladé", pour eux, ça s'appelle "problème", c'est ça le mot, oui, c'est très amusant. Parce que ce n'est pas comme l'escaladé en salle où il y a un nombre assez clair de prises, non non là, vous essayez de chercher si vous trouvez une astuce, vous mettez le pied un peu mieux, ça passe.

Donc c'est comme les maths ;

Oui, mais vraiment, mon niveau d'escaladé n'était vraiment pas haut. J'ai un affreux souvenir, affreux, parce que j'aurais pu causer un accident, céait il y a environ cinquante ans. Bombieri était venu à Paris et je lui avais dit "mais viens avec moi" (je ne me rappelle plus si je parlais français avec Bombieri, ou anglais) "viens avec moià Fontainebleau. Il est venu avec moi, il était habillé en veston, et tout ça, et puis il y avait un rocher qui montait *(mesurant au jugé en regardant le plafond)* pas tout-à-fait, je veux dire un peu moins que le plafond, mais pas beaucoup moins, un angle... Moi j'avais grimpé et je lui ai dit "tu peux y aller, tu peux y aller" Ouh ! ! ! En chaussures de ville ! Alors, il y va, il sort (de la voie) et me dit après ça "Plus jamais ! Plus jamais !". Alors l'histoire a une suite, à savoir que 30-40 ans après, je repasse à cet endroit, je n'aimais pas trop cet endroit, je me suis souvenu, j'ai fait faire ça à Bombieri en chaussures de ville, moi qui ai des chaussures comme il faut, je vais y aller, et c'était il y a cinq ans, j'avais donc un âge respectable, bon j'y vais, et puis tout à fait en haut, j'ai glissé et je suis tombé. En principe on a un tapis de sol, un crashpad, bien entendu, je suis tombé à côté du crashpad. Je suis tombé directement sur les pieds, je me suis tassé comme ça, le lendemain, je ne pouvais plus marcher et puis ça s'est arrangé et j'ai écrit à Bombieri, tu sais, il y a une justice divine *(Rires)*. Et Bombieri m'a répondu, non non non, je te le garantis, ce n'est pas la justice divine, c'est le diable, c'était rassurant... bon !

Eh bien merci en tout cas.

Merci d'avoir écouté.

C'était un plaisir.

Une interview de Jean-Pierre Serre

Mon premier demi-siècle au Collège de France

Jean-Pierre Serre a été Professeur au Collège de France, titulaire de la chaire d'*Algèbre et géométrie* de 1956 à 1994.

Vous avez enseigné au Collège de France de 1956 à 1994, dans la chaire d'*Algèbre et Géométrie*. Quel souvenir en gardez-vous ?

J'ai occupé cette chaire pendant 38 ans. C'est une longue période, mais il y a des précédents : si l'on en croit l'Annuaire du Collège de France, au XIX^{e} siècle, la chaire de physique n'a été occupée que par deux professeurs : l'un est resté 60 ans, l'autre 40. Il est vrai qu'il n'y avait pas de retraite à cette époque et que les professeurs avaient des suppléants (auxquels ils versaient une partie de leur salaire).

Quant à mon enseignement, voici ce que j'en disais dans une interview de 1986 [1] : “Enseigner au Collège est un privilège merveilleux et redoutable. Merveilleux à cause de la liberté dans le choix des sujets et du haut niveau de l'auditoire : chercheurs au CNRS, visiteurs étrangers, collègues de Paris et d'Orsay - beaucoup sont des habitués qui viennent régulièrement depuis cinq, dix ou même vingt ans. Redoutable aussi : il faut chaque année un sujet de cours nouveau, soit sur ses propres recherches (ce que je préfère), soit sur celles des autres ; comme un cours annuel dure environ vingt heures, cela fait beaucoup !”

Comment s'est passée votre leçon inaugurale ?

À mon arrivée au Collège, j'étais un jeune homme de trente ans. La leçon inaugurale m'apparaissait presque comme un oral d'examen, devant professeurs, famille, collègues mathématiciens, journalistes, etc. J'ai essayé de la préparer. Au bout d'un mois, j'avais réussi à en écrire une demi-page.

Interview par Marc Kirsch, Maître de conférences, dans La lettre du Collège de France n°18, p. 43
https://www.college-de-france.fr/media/lettre-du-college-de-france/UPL7660698939177588616$_{C}DF_{L}18_{I}$*nterieur.pdf*

1. M. Schmidt, Hommes de Science, 218-227, Hermann, Paris, 1990.

Arrive le jour de la leçon, un moment assez solennel. J'ai commencé par lire la demi-page en question, puis j'ai improvisé. Je ne sais plus très bien ce que j'ai dit (je me souviens seulement avoir parlé de l'Algèbre, et du rôle ancillaire qu'elle joue en Géométrie et en Théorie des Nombres). D'après le compte-rendu paru dans le journal *Combat*, j'ai passé mon temps à essuyer machinalement la table qui me séparait du public ; je ne me suis senti à l'aise que lorsque j'ai pris en main un bâton de craie et que j'ai commencé à écrire sur le tableau noir, ce vieil ami des mathématiciens.

Quelques mois plus tard, le secrétariat m'a fait remarquer que toutes les leçons inaugurales étaient rédigées et que la mienne ne l'était pas. Comme elle avait été improvisée, j'ai proposé de la recommencer dans le même style, en me remettant mentalement dans la même situation. Un beau soir, on m'a ouvert un bureau du Collège et l'on m'a prêté un magnétophone. Je me suis efforcé de recréer l'atmosphère initiale, et j'ai refait une leçon sans doute à peu près semblable à l'originale. Le lendemain, j'ai apporté le magnétophone au secrétariat ; on m'a dit que l'enregistrement était inaudible. J'ai estimé que j'avais fait tout mon possible et je m'en suis tenu là. Ma leçon inaugurale est restée la seule qui n'ait jamais été rédigée.

En règle générale, je n'écris pas mes exposés ; je ne consulte pas mes notes (et, souvent, je n'en ai pas). J'aime réfléchir devant mes auditeurs. J'ai le sentiment, lorsque j'explique des mathématiques, de parler à un ami. Devant un ami, on n'a pas envie de lire un texte. Si l'on a oublié une formule, on en donne la structure ; cela suffit. Pendant l'exposé j'ai en tête une quantité de choses qui me permettraient de parler bien plus longtemps que prévu. Je choisis suivant l'auditoire, et l'inspiration du moment.

Seule exception : le séminaire Bourbaki, où l'on doit fournir un texte suffisamment à l'avance pour qu'il puisse être distribué en séance. C'est d'ailleurs le seul séminaire qui applique une telle règle, très contraignante pour les conférenciers.

Quelle est la place de Bourbaki dans les mathématiques françaises d'aujourd'hui ?

C'est le séminaire qui est le plus intéressant. Il se réunit trois fois par an, en mars, mai et novembre. Il joue un rôle à la fois social (occasion de rencontres) et mathématique (exposé de résultats récents - souvent sous une forme plus claire que celle des auteurs) ; il couvre toutes les branches des mathématiques.

Les livres (*Topologie, Algèbre, Groupes de Lie,...*) sont encore lus, non seulement en France, mais aussi à l'étranger. Certains de ces livres sont devenus des classiques : je pense en particulier à celui sur les systèmes de racines. J'ai vu récemment (dans le *Citations Index* de l'AMS [2]) que Bourbaki venait au 6e rang (par nombre de citations) parmi les mathématiciens français (de plus, au niveau mondial, les numéros 1 et 3 sont des Français, et s'appellent tous deux Lions : un bon point pour le Collège). J'ai gardé un très bon souvenir de ma collaboration à Bourbaki, entre 1949 et 1973. Elle m'a appris beaucoup de choses, à la fois sur le fond (en me forçant à rédiger des choses que je ne connaissais pas) et sur la forme (comment écrire de façon à être compris). Elle m'a appris aussi à ne pas trop me fier aux “spécialistes”.

La méthode de travail de Bourbaki est bien connue : distribution des rédactions aux différents membres et critique des textes par lecture à haute voix (ligne à ligne : c'est lent mais efficace). Les réunions (les “congrès”) avaient lieu 3 fois par an. Les discussions étaient très vives, parfois même passionnées. En fin de congrès, on distribuait les rédactions à de nouveaux rédacteurs. Et l'on recommençait. Le même chapitre était souvent rédigé quatre ou cinq fois. La lenteur du processus explique que Bourbaki n'ait publié finalement qu'assez peu d'ouvrages en quarante années d'existence, depuis les années 1930-1935 jusqu'à la fin des années 1970, où la production a décliné.

En ce qui concerne les livres eux-mêmes, on peut dire qu'ils ont rempli leur mission. Les gens ont souvent cru que ces livres traitaient des sujets que Bourbaki trouvait intéressants. La réalité est différente : ses livres traitent de ce qui est utile pour faire des choses intéressantes. Prenez l'exemple de la théorie des nombres. Les publications de Bourbaki en parlent très peu. Pourtant, ses membres l'appréciaient beaucoup, mais ils jugeaient que cela ne faisait pas partie des *Éléments* : il fallait d'abord avoir compris beaucoup d'algèbre, de géométrie et d'analyse.

2. AMS : American Mathematical Society.

Par ailleurs, on a souvent imputé à Bourbaki tout ce que l'on n'aimait pas en mathématiques. On lui a reproché notamment les excès des "maths modernes" dans les programmes scolaires. Il est vrai que certains responsables de ces programmes se sont réclamés de Bourbaki. Mais Bourbaki n'y était pour rien : ses écrits étaient destinés aux mathématiciens, pas aux étudiants, encore moins aux adolescents. Notez que Bourbaki a évité de se prononcer sur ce sujet. Sa doctrine était simple : on fait ce que l'on choisit de faire, on le fait du mieux que l'on peut, mais on n'explique pas pourquoi on le fait. J'aime beaucoup ce point de vue qui privilégie le travail par rapport au discours - tant pis s'il prête parfois à des malentendus.

Comment analysez-vous l'évolution de votre discipline depuis l'époque de vos débuts ? Est-ce que l'on fait des mathématiques aujourd'hui comme on les faisait il y a cinquante ans ?

Bien sûr, on fait des mathématiques aujourd'hui comme il y a cinquante ans ! Évidemment, on comprend davantage de choses ; l'arsenal de nos méthodes a augmenté. Il y a un progrès continu (ou parfois un progrès par à-coups : certaines branches restent stagnantes pendant une décade ou deux, puis brusquement se réveillent quand quelqu'un introduit une idée nouvelle).

Si l'on voulait dater les mathématiques "modernes" (un terme bien dangereux), il faudrait sans doute remonter aux environs de 1800 avec Gauss.

Et en remontant plus loin, si vous rencontriez Euclide, qu'auriez-vous à vous dire ?

Euclide me semble être plutôt quelqu'un qui a mis en ordre les mathématiques de son époque. Il a joué un rôle analogue à celui de Bourbaki il y a cinquante ans. Ce n'est pas par hasard que Bourbaki a choisi d'intituler ses ouvrages *Éléments de mathématique* : c'est par référence aux *Eléments* d'Euclide. (Notez aussi que "Mathématique" est écrit au singulier. Bourbaki nous enseigne qu'il n'y a pas plusieurs mathématiques distinctes, mais une seule mathématique. Et il nous l'enseigne à sa façon habituelle : pas par de grands discours, mais par l'omission d'une lettre à la fin d'un mot).

Pour en revenir à Euclide, je ne pense pas qu'il ait produit des contributions réellement originales. Archimède serait un interlocuteur plus indiqué.

C'est lui le grand mathématicien de l'Antiquité. Il a fait des choses extraordinaires, aussi bien en mathématique qu'en physique.

En philosophie des sciences, il y a un courant très fort en faveur d'une pensée de la rupture. N'y a-t-il pas de ruptures en mathématiques ? On a décrit par exemple l'émergence de la probabilité comme une manière nouvelle de se représenter le monde. Quelle est sa signification en mathématiques ?

Les philosophes aiment bien parler de "rupture". Je suppose que cela ajoute un peu de piment à leurs discours. Je ne vois rien de tel en mathématique : ni catastrophe, ni révolution. Des progrès, oui, je l'ai déjà dit ; ce n'est pas la même chose. Nous travaillons tantôt à de vieilles questions, tantôt à des questions nouvelles. Il n'y a pas de frontière entre les deux. Il y a une grande continuité entre les mathématiques d'il y a deux siècles et celles de maintenant. Le temps des mathématiciens est la "longue durée" de feu mon collègue Braudel.

Quant aux probabilités, elles sont utiles pour leurs applications à la fois mathématiques et pratiques ; d'un point de vue purement mathématique, elles constituent une branche de la théorie de la mesure. Peut-on vraiment parler à leur sujet de "manière nouvelle de se représenter le monde" ? Sûrement pas en mathématique.

Est-ce que les ordinateurs changent quelque chose à la façon de faire des mathématiques ?

On avait coutume de dire que les recherches en mathématiques étaient peu coûteuses : des crayons et du papier, et voilà nos besoins satisfaits. Aujourd'hui, il faut ajouter les ordinateurs. Cela reste peu onéreux, dans la mesure où les mathématiciens ont rarement besoin de ressources de calcul très importantes. À la différence, par exemple, de la physique des particules, dont les besoins en calcul sont à la mesure des très grands équipements nécessaires au recueil des données, les mathématiciens ne mobilisent pas de grands centres de calcul.

En pratique, l'informatique change les conditions matérielles du travail des mathématiciens : on passe beaucoup de temps devant son ordinateur.

Il a différents usages. Tout d'abord, le nombre des mathématiciens a considérablement augmenté. À mes débuts, il y a 55 ou 60 ans, le nombre des mathématiciens productifs était de quelques milliers (dans le monde entier), l'équivalent de la population d'un village. À l'heure actuelle, ce nombre est d'au moins 100 000 : une ville. Cet accroissement a des conséquences pour la manière de se contacter et de s'informer. L'ordinateur et Internet accélèrent les échanges. C'est d'autant plus précieux que les mathématiciens ne sont pas ralentis, comme d'autres, par le travail expérimental : nous pouvons communiquer et travailler très rapidement. Je prends un exemple. Un mathématicien a trouvé une démonstration mais il lui manque un lemme de nature technique. Au moyen d'un moteur de recherche - comme Google - il repère des collègues qui ont travaillé sur la question et leur envoie un e-mail. De cette manière, il a toutes les chances de trouver en quelques jours ou même en quelques heures la personne qui a effectivement démontré le lemme dont il a besoin. (Bien entendu, ceci ne concerne que des problèmes auxiliaires : des points de détail pour lesquels on désire renvoyer à des références existantes plutôt que de refaire soi-même les démonstrations. Sur des questions vraiment difficiles, mon mathématicien aurait peu de chances de trouver quelqu'un qui puisse lui venir en aide).

L'ordinateur et Internet sont donc des outils d'accélération de notre travail. Ils permettent aussi de rendre les manuscrits accessibles dans le monde entier, sans attendre leur parution dans un journal. C'est très pratique. Notez que cette accélération a aussi des inconvénients. Le courrier électronique produit des correspondances informelles que l'on conserve moins volontiers que le papier. On jette rarement des lettres alors que l'on efface ou l'on perd facilement les emails (quand on change d'ordinateur, par exemple). On a publié récemment (en version bilingue : français sur une page, et anglais sur la page d'en face) ma correspondance avec A. Grothendieck entre 1955 et 1987 ; cela n'aurait pas été possible si elle avait été électronique.

Par ailleurs, certaines démonstrations font appel à l'ordinateur pour vérifier une série de cas qu'il serait impraticable de traiter à la main. Deux cas classiques : le problème des 4 couleurs (coloriage des cartes avec seulement quatre couleurs) et le problème de Kepler (empilement des sphères dans l'espace à 3 dimensions). Cela conduit à des démonstrations qui ne sont pas réellement vérifiables ; autrement dit, ce ne sont pas de vraies "démonstrations" mais seulement des faits expérimentaux, très vraisemblables, mais que personne ne peut garantir.

Vous avez évoqué l'augmentation du nombre des mathématiciens. Quelle est aujourd'hui la situation ? Où vont les mathématiques ?

L'augmentation du nombre des mathématiciens est un fait important. On pouvait craindre que cela se fasse au détriment de la qualité. En fait, il n'y a rien eu de tel. Il y a beaucoup de très bons mathématiciens (en particulier parmi les jeunes français - un très bon augure).

Ce que je peux dire, concernant l'avenir, c'est qu'en dépit de ce grand nombre de mathématiciens, nous ne sommes pas à court de matière. Nous ne manquons pas de problèmes, alors qu'il y a un peu plus de deux siècles, à la fin du XVIII^{e}, Lagrange était pessimiste : il pensait que "la mine était tarie", qu'il n'y avait plus grand-chose à trouver. Lagrange a écrit cela juste avant que Gauss ne relance les mathématiques de manière extraordinaire, à lui tout seul. Aujourd'hui, il y a beaucoup de terrains à prospecter pour les jeunes mathématiciens (et aussi pour les moins jeunes, j'espère).

Selon un lieu commun de la philosophie des sciences, les grandes découvertes mathématiques sont le fait de mathématiciens jeunes. Est-ce votre avis ?

Je ne crois pas que le terme de "grande découverte" s'applique à moi. J'ai surtout fait des choses "utiles" (pour les autres mathématiciens). En tout cas, lorsque j'ai eu le prix Abel en 2003, la plupart des travaux qui ont été cités par le jury avaient été faits avant que je n'aie 30 ans. Mais si je m'étais arrêté à ce moment-là, on ne m'aurait sans doute pas donné ce prix : j'ai fait aussi d'autres choses par la suite (ne serait-ce que des "conjectures" sur lesquelles beaucoup de gens ont travaillé et travaillent encore).

Dans ma génération, plusieurs de mes collègues ont continué au-delà de 80 ans, par exemple mes vieux amis Armand Borel et Raoul Bott, morts tous deux récemment à 82 ans. Il n'y a pas de raison de s'arrêter, tant que la santé le permet. Encore faut-il que le sujet s'y prête. Quand on a des sujets très larges, il y a toujours quelque chose à faire, mais si l'on est trop spécialisé on peut se retrouver bloqué pendant de longues périodes, soit parce que l'on a démontré tout ce qu'il y avait à démontrer, soit au contraire parce que les problèmes sont trop difficiles. C'est très frustrant.

Les découvertes mathématiques donnent de grandes joies. Poincaré, Hadamard, Littlewood [3] l'ont très bien expliqué. En ce qui me concerne, je garde surtout le souvenir d'une idée qui a contribué à débloquer la théorie de l'homotopie. Cela s'est passé une nuit de retour de vacances, en 1950, dans une couchette de train. Je cherchais un espace fibré ayant telles et telles propriétés. La réponse est venue : l'espace des lacets ! Je n'ai pas pu m'empêcher de réveiller ma femme qui dormait dans la couchette du dessous pour lui dire : ça y est ! Ma thèse est sortie de là, et bien d'autres choses encore. Bien sûr, ces découvertes soudaines sont rares : cela m'est arrivé peut-être deux fois en soixante ans. Mais ce sont des moments lumineux, vraiment exceptionnels.

Le Collège de France est-il un endroit où l'on échange avec d'autres disciplines ?

Non, pas pour moi. Même entre les mathématiciens du Collège, il n'y a pas de travail collectif. Il faut préciser que nous travaillons dans des branches souvent très séparées. Ce n'est pas un mal : le Collège n'est pas censé être un club. Un certain nombre de lieux communs modernes comme *le travail collectif, l'interdisciplinarité et le travail en équipe* - ne s'appliquent pas à nous.

Qu'avez-vous pensé du dialogue entre un spécialiste de neurosciences, Jean-Pierre Changeux, et le mathématicien Alain Connes, qui est restitué dans le livre *Matière à pensée* ?

Ce livre est un bel exemple de dialogue de sourds. Changeux ne comprend pas ce que dit Connes, et inversement. C'est assez étonnant. Personnellement, je suis du côté de Connes. Les vérités mathématiques sont indépendantes de nous [4]. Notre seul choix porte sur la façon de les exprimer. Si on le désire, on

3. J.E. Littlewood, A Mathematician's Miscellany, Methuen and Co, 1953. Ce livre explique bien la part inconsciente du travail créatif.

4. Il y a quelques années, mon ami R. Bott et moi-même allions recevoir un prix israélien (le prix Wolf) remis dans la Knesseth, à Jérusalem. Bott devait dire quelques mots sur les mathématiques. Il m'a demandé : "Que dire ?". Je lui ai dit "C'est bien simple ; tu n'as qu'à expliquer ceci : les autres sciences cherchent à trouver les lois que Dieu a choisies ; les mathématiques cherchent à trouver les lois auxquelles Dieu a dû obéir.". C'est ce qu'il a

peut le faire sans introduire aucune terminologie. Considérons par exemple une troupe de soldats. Leur général aime les arranger de deux façons, soit en rectangle, soit en 2 carrés. C'est au sergent de les placer. Il s'aperçoit qu'il n'a qu'à les mettre en rang par 4 : s'il en reste 1 qu'il n'a pas pu placer, ou bien il arrivera à les mettre tous en rectangle, ou bien il arrivera à les répartir en deux carrés.

[Traduction technique : le nombre n des soldats est de la forme $4k+1$. Si n n'est pas premier, on peut arranger les soldats en rectangle. Si n est premier, un théorème dû à Fermat dit que n est somme de deux carrés.]

Quelle est la place des mathématiques par rapport aux autres sciences ? Y a-t-il une demande nouvelle de mathématiques, venant de ces sciences ?

Sans doute, mais il faut séparer les choses. Il y a d'une part la physique théorique, qui est tellement théorique qu'elle est à cheval entre mathématique et physique, les physiciens considérant que ce sont des mathématiques, tandis que les mathématiciens sont d'un avis contraire. Elle est symbolisée par la théorie des cordes. Son aspect le plus positif est de fournir aux mathématiciens un grand nombre d'énoncés, qu'il leur faut démontrer (ou éventuellement démolir).

Par ailleurs, notamment en biologie, il y a tout ce qui relève de systèmes comportant un grand nombre d'éléments qu'il faut traiter collectivement. Il existe des branches des mathématiques qui s'occupent de ces questions. Cela répond à une demande. Il y a aussi des demandes qui concernent la logique : c'est le cas de l'informatique, pour la fabrication des ordinateurs. Il faut mentionner aussi la cryptographie, qui est une source de problèmes intéressants relatifs à la théorie des nombres.

En ce qui concerne la place des mathématiques par rapport aux autres sciences, on peut voir les mathématiques comme un grand entrepôt empli de rayonnages. Les mathématiciens déposent sur les rayons des choses dont ils garantissent qu'elles sont vraies ; ils en donnent aussi le mode d'emploi et la manière de les reconstituer. Les autres sciences viennent se servir en fonction

dit. La Knesseth a apprécié.

de leurs besoins. Le mathématicien ne s'occupe pas de ce qu'on fait de ses produits. Cette métaphore est un peu triviale, mais elle reflète assez bien la situation. (Bien entendu, on ne choisit pas de faire des mathématiques pour mettre des choses sur les rayons : on fait des mathématiques pour le plaisir d'en faire).

Voici un exemple personnel. Ma femme, Josiane, était spécialiste de chimie quantique. Elle avait besoin d'utiliser les représentations linéaires de certains groupes de symétries. Les ouvrages disponibles n'étaient pas satisfaisants : ils étaient corrects, mais employaient des notations très lourdes. J'ai rédigé pour elle un exposé adapté à ses besoins, et je l'ai ensuite publié dans un livre intitulé *Représentations Linéaires des Groupes Finis*. J'ai fait mon travail de mathématicien (et de mari) : mis des choses sur les rayons.

Le vrai en mathématiques a-t-il le même sens qu'ailleurs ?

Non. C'est un vrai absolu. C'est sans doute ce qui fait l'impopularité des mathématiques dans le public. L'homme de la rue veut bien tolérer l'absolu quand il s'agit de religion, mais pas quand il s'agit de mathématique. Conclusion : croire est plus facile que démontrer.

"Serre est un Mozart qui aurait vécu jusqu'à 90 ans".

Michel Broué [1].

Faire communiquer les différents champs mathématiques pour façonner des idées et des outils nouveaux : tel est le principal apport de Jean-Pierre Serre, qui remplit les amphis de Harvard à Singapour. Explications, par Michel Broué.

Jean-Pierre Serre (né en 1926) est le plus jeune lauréat de la médaille Fields, qu'il a obtenue en 1954, à moins de 28 ans...

Le Point : Récipiendaire de la fameuse médaille Fields à moins de 28 ans, élu professeur au Collège de France avant 30 ans, Prix Abel en 2003, Jean-Pierre Serre est très certainement un surdoué des maths. Mais quel est son apport ?

Michel Broué : Après avoir participé au séminaire de topologie algébrique d'Henri Cartan à l'École Normale Supérieure, il a découvert que la théorie de Leray des espaces fibrés et de leur suite spectrale pouvait être appliquée dans un cadre beaucoup plus large qu'on ne l'imaginait alors. Cela l'a amené au calcul des groupes d'homotopies des sphères, via des méthodes et des résultats qui ont révolutionné la topologie algébrique, et lui ont valu la médaille Fields en 1954. Mais il est beaucoup plus que cela. C'est un théoricien hors pair, l'un des rares aujourd'hui à avoir une vision panoramique des mathématiques, ce qui lui permet de relier les différentes spécialités pour inventer de nouveaux objets, de nouvelles idées. Il est ainsi devenu une référence incontournable en matière de topologie, mais aussi l'un des plus éminents spécialistes de la géométrie algébrique, de la théorie des groupes, de la théorie des nombres. C'est un Mozart des mathématiques qui aurait vécu jusqu'à 90 ans.

Comment travaille-t-il ?

Prenez son célèbre article "Géométrie algébrique et géométrie analytique" [2], ou "Gaga" : il illustre parfaitement cette capacité à relier entre elles des spécialités différentes ; ici, la géométrie algébrique - partie des mathématiques où l'on peut faire de la géométrie pour comprendre des équations algébriques et faire de l'algèbre pour comprendre des figures géométriques - et la géométrie analytique, qui, plus proche de l'intuition physique et de la géométrie au sens premier du terme,

1. © *Article paru dans le magazine Le Point Références, Comprendre les mathématiques, en février/mars* 2017, *n*° 68, *p.* 83. (*transcription en Latex* : *DV*, 15.9.2020)

2. https://www.college-de-france.fr/media/jean-pierre-serre/UPL1698785858825941763$serre_{G}AGA.pdf$.

est pour lui une source de compréhension du côté algébrique, et de résultats applicables dans un cadre général. En s'appuyant sur les notions d'"homologie" et de "faisceaux", introduites par Leray, il parvient à créer ce dialogue interdisciplinaire. Il utilise un principe qui a depuis fait florès dans la recherche mathématique : passer par l'extérieur, relier chacun des deux mondes à un troisième, ne pas s'entêter à trouver des liens trop directs, mais au contraire monter plus haut pour constater que les liens vivent au-dessus. Il réussit ainsi à établir une équivalence entre la catégorie des faisceaux algébriques cohérents sur une variété projective complexe et la catégorie des faisceaux analytiques cohérents sur l'espace analytique correspondant.

Ce que Grothendieck va utiliser...

Exactement, Serre, qui avait deux ans de plus que lui, va beaucoup l'inspirer, leur correspondance en témoigne, notamment pour la théorie des schémas et celle des faisceaux. Grothendieck va savoir mettre en musique quelques-unes de ses idées pour produire l'une des plus extraordinaires périodes de l'histoire des mathématiques.

Vous le tenez pour un "classique" de la langue française moderne. Pourquoi ?

Je ne suis pas le seul à penser cela. Son écriture est particulièrement précise, claire et efficace. C'est un auteur qui chasse l'adverbe redondant. Peu de scientifiques se sont donné la peine de rédiger autant de livres, avec autant de soin. Vous savez qu'à l'université Yale, l'examen de français en dernière année de mathématiques consiste à traduire un paragraphe de Serre ou de Bourbaki, dont il a été l'un des producteurs les plus actifs ?

Ses textes en témoignent, il est très difficile d'accès...

Il faut effectivement beaucoup travailler pour essayer de maîtriser sa pensée, mais les mathématiques contemporaines sont devenues presque inaccessibles...

Propos recueillis par Catherine Golliau

Michel Broué est mathématicien, spécialiste, notamment, de la théore des représentations. Il est professeur à l'Université Paris-Diderot après avoir été directeur de l'Institut Henri Poincaré et du département de mathématique et d'informatique de l'École Normale Supérieure.