Le théorème de Morley

dans *Geometry revisited* de H. S. M. Coxeter et S. L. Greitzer

L'un des plus surprenants théorèmes de géométrie élémentaire a été découvert environ en 1904 par Frank Morley (le père de Christopher Morley, dont le roman, *Thunder on the Left* *, a un pli dans sa suite temporelle qui interpelle particulièrement les géomètres). Il en parla à des amis à Cambridge en Angleterre et le publia il y a une vingtaine d'années au Japon. Pendant ce temps, ce théorème a été redécouvert et présenté comme un problème de l'Educational Times. Deux solutions furent envoyées dont l'une, par M. T. Naraniengar †, est aussi soignée que n'importe laquelle des douzaines d'autres qui ont été conçues depuis. Le théorème stipule :

Théorème 2.91. *Les points d'intersection des trissectrices adjacentes des angles d'un triangle quelconque sont les sommets d'un triangle équilatéral.*

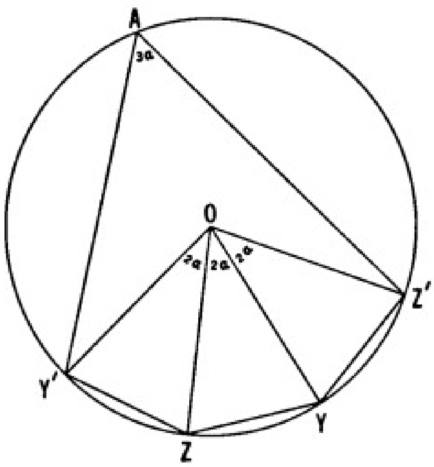

Figure 2.9A

La preuve de Naraniengar nécessite un théorème préparatoire ou lemme (illustré sur la Figure 2.9A) :

Lemme. *Si quatre points Y', Z, Y, Z' satisfont les conditions*

$$Y'Z = ZY = YZ'$$

et

$$\widehat{YZY'} = \widehat{Z'YZ} = 180^o - 2\alpha > 60^o$$

alors ils appartiennent à un même cercle. De plus, si un point A, du côté de la droite $Y'Z'$ éloigné d'Y, est ainsi positionné de façon que $\widehat{Y'AZ'} = 3\alpha$, alors ce

Geometry revisited, H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, Mathematical association of America, 19, 1967.

∗. Tonnerre sur la gauche

†. Mathematical Questions and Their Solutions from the Educational Times (New Series), 15 (1909), p. 47.

cinquième point A appartient également au même cercle.

Pour prouver le lemme, faisons se croiser les bissectrices internes des angles égaux YZY' et $Z'YZ$ en O. Alors $OY'Z$, OZY, OYZ' sont des triangles isocèles congruents ayant comme angles à la base $90^o - \alpha$. Leurs côtés égaux OY', OZ, OY, OZ' sont rayons d'un cercle de centre O, et leurs angles à ce sommet commun égalent 2α. En d'autres termes, chacune des cordes égales $Y'Z$, ZY, YZ' sous-tend un angle 2α au centre O et conséquemment sous-tend un angle α en tout point de l'arc $Y'Z'$ ne contenant pas Y. Cet arc peut être décrit comme le lieu des points (du côté de la droite $Y'Z'$ éloigné d'Y) pour lesquels la cordre $Y'Z'$ sous-tend un angle 3α. Un tel point est A ; par conséquent A appartient au cercle.

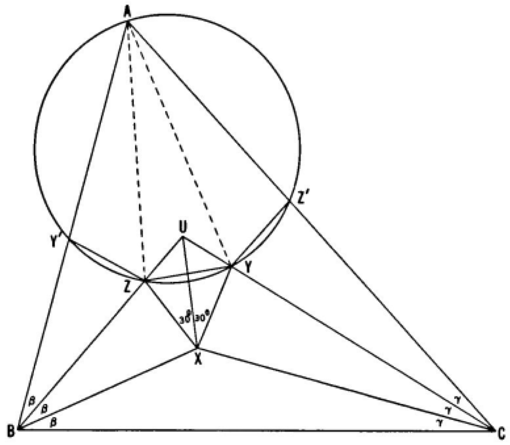

Figure 2.9B

Maintenant nous sommes prêts pour attaquer le Théorème 2.91 lui-même. Sur la Figure 2.9B, les trissectrices des angles $B = 3\beta$ et $C = 3\gamma$ se croisent comme on le voit en les points U et X. Dans ΔBCU, les angles en B et C sont bissectés par BX et CX ; par conséquent X est le centre du cercle inscrit, et l'angle en U est bissecté par UX. Si nous construisons les points Y et Z sur les droites CU et BU de telle façon que XY et XZ font des angles égaux 30^o avec XU sur les côtés opposés, alors $\Delta UXY \cong \Delta UXZ, XY = XZ$, et puisque l'angle en X est 60^o, il s'ensuit que ΔXYZ est équilatéral.

De plus ΔUZY est isocèle. Son angle en U est le même que celui du ΔUBC, dont les autres angles sont égaux à 2β et 2γ ; par conséquent, les angles égaux de ΔUYZ en Y et Z mesurent chacun $\beta + \gamma$.

En écrivant $\alpha = A/3$, nous déduisons de $A + B + C = 180^o$ que

$$\alpha + \beta + \gamma = 60^o, \qquad \text{d'où} \qquad \beta + \gamma = 60^o - \alpha.$$

Donc

$$\widehat{YZU} = 60^o - \alpha \qquad \text{et} \qquad \widehat{XZU} = 120^o - \alpha.$$

La prochaine étape consiste à marquer $BY' = BX$ sur BA, et $CZ' = CX$ sur CA. Nous avons maintenant

$$\Delta BZX \cong \Delta BZY' \qquad \text{et} \qquad \Delta CYX \cong \Delta CYZ',$$

de telle façon que

$$Y'Z = ZX = ZY = YX = YZ'.$$

Avant que nous puissions appliquer le lemme, nous devons encore évaluer $\widehat{YZY'}$ et $\widehat{Z'YZ}$. Toutefois, c'est chose simple. Puisque les angles égaux BZY' et BZX ont des compléments égaux,

$$\widehat{UZY'} = \widehat{XZU} = 120^{\text{o}} - \alpha$$

et

$$\begin{aligned}\widehat{YZY'} &= \widehat{YZU} + \widehat{UZY'} = (60^{\text{o}} - \alpha) + (120^{\text{o}} - \alpha) \\ &= 180^{\text{o}} - 2\alpha.\end{aligned}$$

De la même façon, $\widehat{Z'YZ} = 180^{\text{o}} - 2\alpha$; et bien sûr $\alpha = \frac{1}{3}A < 60^{\text{o}}$.

En appliquant le lemme, nous déduisons que les cinq points Y', Z, Y, Z', A appartiennent tous à un même cercle. Puisque les cordes égales $Y'Z$, ZY, YZ' sous-tendent des angles égaux α en A, les droites AZ et AY trissectent l'angle A de ΔABC. En d'autres termes, les points X, Y, Z, qui ont été construits artificiellement de manière à former un triangle équilatéral, sont en fait les points décrits par le théorème de Morley. La preuve est maintenant complète.