Vous avez écrit un article, publié pour la première fois en 1986, intitulé "Prendre les catégories au sérieux"[1] *Pourquoi devrions-nous prendre les catégories au sérieux ?*

Dans tous les domaines dans lesquels la théorie des catégories est activement utilisée, le concept catégorique de foncteur adjoint s'est avéré remplir un rôle-clé. Un tel instrument universel pour guider l'apprentissage, le développement et l'utilisation des mathématiques avancées est également indiqué dans des domaines tels que les mathématiques scolaires et au collège, dans les relations les plus basiques entre l'espace et le nombre, et dans les calculs basés sur ces relations. En disant "Prenez les catégories au sérieux", je voulais exprimer le fait que l'on pourrait rechercher, cultiver et enseigner des exemples utiles de nature élémentaire.

La relation entre enseignement et recherche s'incarne en partie dans des concepts généraux simples qui peuvent guider l'élaboration d'exemples dans les deux cas. Les notions et les constructions, comme l'analyse spectrale des systèmes dynamiques, ont des aspects importants qui peuvent être compris et poursuivis sans les complications dues au fait de devoir limiter les modèles à des catégories spécifiques classiques. L'application de quelques concepts généraux simples de la théorie des catégories peut permettre de passer d'une clarification des constructions de base sur les systèmes dynamiques à une construction du système des nombres réels avec sa structure de catégorie fermée ; appliquée à cette catégorie fermée particulière, la théorie des catégories générale enrichie amène inexorablement aux théorèmes et notions de complétude de Cauchy, rotation, fermeture convexe, rayon et distance géodésique pour les systèmes métriques arbitraires. En fait, ces dernières notions se présentent elles-mêmes sous une forme telle que les calculs de l'analyse élémentaire et de la géométrie peuvent être explicitement guidés par l'expérience qui est concentrée dans le concept d'adjonction. Il semble certain que cette approche, combinée avec une application sobre de l'origine historique de toutes ces notions, pourra être appliquée à de nombreux exemples, unifiant ainsi nos efforts dans l'enseignement, la recherche et l'application des mathématiques.

Je crois également que nous devrions prendre au sérieux les précurseurs historiques de la théorie des catégories tels que Grassman, dont le travail est très clair, contrairement à sa réputation d'être obscur.

Pourriez-vous mentionner d'autres précurseurs historiques de la théorie des catégorie que Grassman, Emmy Noether et Heinz Hopf, que Mac Lane avait l'habitude de souvent citer ?

La méthode axiomatique implique de se concentrer sur les caractéristiques clés des applications courantes. Par exemple, Cantor s'est concentré sur le concept d'isomorphisme, qu'il a extrait du travail de Jakob Steiner en géométrie algébrique. La connexion entre Cantor et Steiner n'est pas mentionnée dans la plupart des livres ; il y a une malheureuse tendance dans les travaux standards d'histoire des sciences à perpétuer certains mythes, plutôt que de découvrir et clarifier les analyses conceptuelles. Le principe indispensable de "l'univers du discours" s'est raffiné dans l'idée de structure amenée par celle d'ensemble abstrait, impliquant de longues chaînes de raisonnement plus concevables par l'idée qu'"il n'y a rien dans la conclusion qui ne soit déjà dans les prémisses". Cette vision a été développée par Dedekind, Hausdorff, Fréchet, et d'autres mathématiciens du 20ème siècle.

En plus des portraits des inventeurs de la théorie des catégories, Eilenberg et Mac Lane, la couverture de notre livre "Ensembles pour les Mathématiques", écrit en collaboration avec Robert Rosebrugh, contient les portraits de Cantor et Dedekind.

Le cœur des théories mathématiques est dans la variation de la quantité dans l'espace et dans l'émergence de la qualité là-dedans. Les branches fondamentales, telles que la géométrie différentielle et la théorie de la mesure géométrique donne naissance aux deux grandes disciplines auxiliaires que sont la topologie algébrique et l'analyse fonctionnelle. Un grand élan à leur cristallisation a été la théorie électromagnétique de Maxwell-Hertz-Heaviside et la science des matériaux de Maxwell-Boltzmann. Ces deux disciplines ainsi que ces applications ont été rendues explicites dans le travail de Volterra. Comme noté par de Rham à l'adresse de Narasimhan, c'est Volterra qui, dans les années 1880, non seulement a prouvé que l'opérateur dérivé extérieur satisfait $d^2 = 0$, mais il a également prouvé un théorème d'existence local auquel on fait habituellement référence de manière inexacte en l'appelant le lemme de Poincaré ; ces résultats restent au

1. Revue Colombienne de Mathématiques 20 (1986) 147-178. Réimprimé dans *Repr. Theory Appl. Categ.* 8 (2005) 1-24 (version électronique).

cœur de la topologie algébrique comme cela s'exprime dans le théorème de De Rham et dans la cohomologie des faisceaux.

Habituellement, la catégorie codomaine d'un foncteur quantitatif sur X est une catégorie $\mathrm{Mod}(X)$ de structures linéaires dans X lui-même ; ainsi, c'est de façon plus basique la nature des catégories X des espaces, que de tels systèmes de nombres ont comme domaines, qui a besoin d'être clarifiée. En se concentrant sur les contributions de Volterra, Hadamard, Fox, Hurewicz et d'autres pionniers, nous arrivons à l'importante idée générale que de telles catégories devraient être des catégories cartésiennes fermées. Par exemple, l'axiome puissance ensembliste des ensembles est une manifestation de cette idée, en notant qu'elle n'est pas justifiée par les éléments afférents à la théorie ensembliste à propos de l'itération des ordinaux, des formules, etc., puisqu'elle doit, comme l'axiome d'infinité, carrément être supposée en plus. Hurewicz était, comme Eilenberg, un topologiste Polonais, et son travail sur les groupes d'homotopie, présenté lors d'une conférence à Moscou, était également pionnier ; sa conférence trop peu connue de 1949 sur les k-espaces, est le premier effort majeur, toujours utilisé par les topologues algébristes et par les analystes, de remplacer la catégorie par "défaut" des espaces topologiques par une catégorie fermée cartésienne plus utile.

En parlant de Volterra, cela me rappelle que vous avez énoncé un jour quelque part[2] *le travail du mathématicien portugais J. Sebastiao e Silva. Pourriez-vous nous en parler ?*

Silva a été l'un des premiers à reconnaître l'importance des espaces bornologiques comme un paradigme pour l'analyse fonctionnelle. Il a ainsi anticipé le travail de Waelbroeck sur l'analyse fonctionnelle lisse et a préparé le chemin pour le travail de Douady et Houzel sur le théorème de finitude de Grauert pour les fonctions propres des espaces analytiques. De plus, malgré mon peu de portugais, je discerne un hommage à la relation proche entre la recherche et l'enseignement dans un esprit que je partage.

Où la théorie des catégories prend-elle son origine ?

Le besoin d'unifier et de simplifier pour rendre cohérents certaines des avancées mathématiques des années 30 ont amené Eilenberg et Mac Lane à concevoir la théorie des catégories, foncteurs et transformations naturelles au début des années 40. La théorie des catégories est apparue pour la première fois dans leur article GTNE[3], avec le besoin de guider les calculs compliqués nécessitant un passage à la limite dans l'étude du saut qualitatif séparant les espaces des objets homotopiques / homologiques. Depuis lors, la théorie est toujours utilisée pour ces problèmes mais également en géométrie algébrique, logique et théorie des ensembles, théorie des modèles, analyse fonctionnelle, physique du continu, combinatoire, etc.

Mac Lane est entré dans le domaine de la topologie algébrique par l'entremise de son ami Samuel Eilenberg. Ensemble, ils ont construit les célèbres espaces d'Eilenberg-Mac Lane, qui "représentent la cohomologie". Ce résultat plutôt technique de géométrie et algèbre nécessite en fait plusieurs avancées méthodologiques frappantes :

(a) la cohomologie est un "foncteur", une sorte de dépendance spécifique au changement de l'espace domaine ;

(b) la catégorie sur laquelle ces foncteurs sont définis a comme fonctions non pas les fonctions continues habituelles, mais plutôt les classes d'équivalences de telles fonctions, où les déformations arbitraires continues des fonctions servent à établir les équivalences ; et

(c) bien que dans toute catégorie, tout objet fixé K détermine un foncteur spécial "représentable" qui assigne, à tout X, l'ensemble $[X, K]$ des fonctions de X dans K, la plupart des foncteurs ne sont pas de cette forme et ainsi, il est remarquable que les foncteurs cohomologiques particuliers intéressants s'avèrent être isomorphes à $H^*(X) = [X, K]$ mais seulement pour la catégorie d'Hurewicz (b) et seulement pour les espaces K du type construit pour H^* par Eilenberg et Mac Lane.

Toutes ces avancées dépendaient des concepts de catégorie et foncteur, inventés aux alentours de 1942 par les collaborateurs. Même si la notion de catégorie elle-même avait été rendue explicite, ce résultat rendit apparent le fait que les catégories "concrètes", dans lesquelles les applications sont déterminées par leurs valeurs sur des points, ne suffisaient pas.

2. F. W. Lawvere, Volterra's functionals and covariant cohesion of space, Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo, serie II, 64 (2000) 201-214.

3. S. Eilenberg et S. Mac Lane, *General Theory of Natural Equivalences (GTNE)*, Trans. Amer. Math. Soc. 58 (1945) 231-294.

Déjà dans GTNE, il fut noté qu'un ensemble préordonné est juste une catégorie avec au plus un morphisme entre toute paire donnée d'objets, et que les foncteurs entre deux telles catégories sont juste les applications préservant l'ordre ; à l'extrême opposé, un monoïde est juste une catégorie avec exactement un objet, et les foncteurs entre deux telles catégories sont juste des homomorphismes de monoïdes. Mais la théorie des catégories ne consiste pas simplement en une classification dans l'esprit de la métaphysique wolfienne (bien qu'un petit nombre de praticiens puissent faire cela) ; c'est plutôt la mutabilité des structures mathématiques précises (par les morphismes) qui est le contenu essentiel de la théorie des catégories). Si les structures sont elles-mêmes des catégories, cette mutabilité est exprimée par les foncteurs, alors que si les structures sont des foncteurs, la mutabilité est exprimée par les transformations naturelles.

Le New York Times, dans son éloge mortuaire d'Eilenberg en 1998 a complètement omis son rôle dans le développement de la théorie des catégories.

Oui, et l'injustice a été un peu moindre à l'occasion de l'hommage quand Mac Lane est décédé, lorsque le Times a rendu compte de son décès.

Dans une lettre au NYT en février 1998, écrite conjointement avec Peter Freyd, vous vous plaignez de cette omission notable. Dans cette lettre, vous insistez sur le fait que la "découverte d'Eilenberg-Mac Lane en 1945 de la théorie des transformations entre catégories mathématiques a fourni les outils sans lesquels les importantes collaborations de Sammy avec Steenrod et Cartan n'auraient pas été possible. Ce travail commun a également amené la base du travail pionnier de Sammy en informatique théorique ainsi que de nombreux développements dans la foulée en géométrie, algèbre, et au sujet des fondements des mathématiques. En particulier, la théorie d'Eilenberg-Mac Lane des catégories était indispensable au développement, en 1960, par le mathématicien français Alexander Grothendieck, de la forme puissante de la géométrie algébrique qui a été un ingrédient dans plusieurs avancées en théorie des nombres, incluant le travail de Wiles sur le théorème de Fermat". Pourriez-vous nous donner une large justification de la raison pour laquelle la théorie des catégories est si utile ?

Chaque jour des activités humaines comme construire une maison sur une colline, concevoir un réseau téléphonique, naviguer dans le système solaire, nécessite des plans qui sont corrects. Planifier de tels systèmes nécessite le développement de la pensée à propos de l'espace. Chaque développement nécessite de nombreuses étapes de pensée et beaucoup sont liées à des constructions géométriques sur des espaces. À cause de cette nature nécessairement multi-étapes de la pensée à propos de l'espace, seules des mesures mathématiques doivent être effectuées pour que le système soit fiable. Seuls des principes explicites de pensée (logique) et des principes explicites d'espace (géométrie) peuvent garantir une telle fiabilité. Cette grande avancée faite par la théorie inventée il y a 60 ans par Eilenberg et Mac Lane a permis de rendre les principes de la logique et de la géométrie explicites ; cela a été accompli en découvrant la forme commune de la géométrie et de la logique de telle manière que la relation entre les deux soit aussi explicite. Ils ont résolu un problème ouvert 2300 ans avant par Aristote avec ses recherches initiales pour rendre explicites les catégories et les concepts. Au 21$^{\text{ème}}$ siècle, leur solution est applicable non seulement à la géométrie plane et au syllogisme médiéval, mais également aux espaces de transformations de dimension infinie, aux "espaces" de données, et à d'autres outils conceptuels qui sont appliqués des milliers de fois par jour. La forme des principes à la fois de la logique et de la géométrie ont été découverts par des catégoriciens pour reposer sur la "naturalité" des transformations entre les espaces et les transformations dans la pensée.

Quels sont vos souvenirs de Grothendieck ? Quand l'avez-vous rencontré pour la première fois ?

Je l'ai rencontré pour la première fois au Congrès International des mathématiciens à Nice en 1970 où nous étions tous les deux conférenciers invités. Je me suis publiquement montré en désaccord avec lui sur quelques points qu'il a présentés dans une conférence séparée sur son mouvement "Survivre", de telle façon qu'il m'appelait (j'espère affectueusement) le "principal contradicteur". En 1973, nous avons tous deux visité en même temps Buffalo, et je me rappelle de façon vivace le cours qu'il m'a donné sur les éclairages basiques de la géométrie algébrique comme "les points ont des automorphismes". En 1981, je lui ai rendu visite dans sa hutte de pierre, au milieu d'un champ de lavande dans le sud de la France, dans le but de lui demander son avis sur le projet de dériver le théorème de Grauert du théorème de Cartan-Serre, en démontrant ce dernier pour un espace analytique compact dans un topos général, puis en spécialisant au topos de faisceaux d'un espace paramètre. Certains ingrédients nécessaires étaient connus, par exemple le fait qu'un espace compact au sens interne devrait correspondre à une application propre vers l'espace paramètre de façon externe. Mais la preuve de ces résultats dépend classiquement de l'analyse fonctionnelle, de telle façon que la théorie des espaces bornologiques aurait dû être faite de façon interne pour réussir. Il a clairement reconnu qu'un tel développement dépendrait de l'utilisation d'un classifieur de sous-objets qui, comme il l'a dit, est l'un des quelques ingrédients de la théorie des topos qu'il n'avait pas prévus. Plus tard dans son travail sur l'homotopie, il a gentiment fait référence à cet objet comme à l'"élément de Lawvere". Ma dernière rencontre avec lui eut lieu au même endroit en 1989 (Aurelio Carboni m'a conduit là depuis Milan) : il était content de me voir, c'était clair, mais ne parlerait pas, à cause d'un vœu religieux ; il a écrit sur un papier qu'il n'avait pas le droit de discuter de mathématiques, bien que rapidement, son âme mathématique triomphe, me laissant avec quelques précieuses notes mathématiques.

Mais la réduction drastique du travail scientifique par un mathématicien aussi grand, due à sa rencontre avec un religieux puissant, est la cause d'une vigilance renouvelée.

Vous êtes né à Indiana. Y avez-vous grandi ?

Oui. On m'a parfois appelé "le fermier d'Indiana".

Vos parents avaient-il un intérêt pour les mathématiques ?

Non. Mon père était fermier.

Vous avez obtenu votre diplôme de premier degré de l'Université d'Indiana en 1960. Merci de nous en dire un peu plus sur votre éducation là-bas. Comment avez-vous appris les catégories ? Nous savons que vous avez commencé comme étudiant de Clifford Truesdell, un expert très connu de mécanique classique[4]

J'ai étudié à l'Université d'Indiana University de 1955 à janvier 1960. J'aimais la physique expérimentale mais je n'appréciais pas le raisonnement imprécis dans certains cours théoriques. Alors j'ai décidé d'étudier d'abord les mathématiques. Truesdell était au département de mathématiques mais il avait de grandes connaissances en physique de l'ingénierie. Il a pris là en charge mon éducation.

Eilenberg avait été un temps à Indiana, mais il était parti en 1947 quand j'avais 10 ans. Ce n'est donc pas d'Eilenberg que j'ai d'abord appris les catégories, ni de Truesdell qui avait abandonné son poste à Indiana en 1950 et qui en 1955 (et ensuite) m'avait conseillé de continuer mes études en mécanique continue et théorie cinétique. C'est un étudiant d'Indiana qui a insisté auprès de moi sur l'importance de la méthode galactique mentionné dans le livre de topologie de J. L. Kelley ; ça semblait trop abstrait au début, mais j'ai appris que "galactique" faisait référence à l'utilisation des catégories et des foncteurs et nous avons discuté de leur potentiel pour unifier et clarifier les mathématiques de toutes sortes. Durant l'été 1958, j'ai étudié la topologie dynamique avec George Whaples, avec comme objectif de la comprendre autant qu'il était possible en termes catégoriques. Quand Truesdell m'a demandé de donner des cours de plusieurs semaines pendant son cours d'Analyse fonctionnelle en 1958-1959, il devint vite apparent que toutes les explications très effectives de sujets tels que les anneaux de fonctions continues et la transformation de Fourier en analyse harmonique abstraite pourraient être fournies en rendant explicite leur fonctorialité et leur naturalité dans le sens précis d'Eilenberg-Mac Lane. En continuant d'étudier la mécanique statistique et la théorie cinétique, à un moment, je découvris le livre de Godement sur la théorie des faisceaux à la bibliothèque et je l'étudiai dans son intégralité. Toute l'année 1959, je développai de moi-même une pensée catégorique et je formulai des programmes de recherche sur l'"amélioration" (dont j'appris plus tard que Kan y avait travaillé plus complètement sous le nom de foncteurs adjoints) et sur les "clusters galactiques" (dont j'appris plus tard que Grothendieck les avait étudiés et appliqués sous le nom de catégories fibrées). Les catégories seraient certainement importantes pour simplifier les fondements de la physique continue. J'en conclus que je ferais de la théorie des catégories la ligne centrale de mes études. La littérature mentionne souvent quelques difficultés mystérieuses sur le fait de baser la théorie des catégories sur la théorie des ensembles traditionnelle : ayant eu un cours sur le livre de Kleene (également avec Whaples) et ayant apprécié de nombreuses discussions avec Max Zorn, dont le bureau était adjacent du mien, j'avais eu une compréhension initiale de la logique mathématique, et j'avais conclu que la solution au problème fondationnel serait de développer une théorie axiomatique de la catégorie des catégories.

Pourquoi avez-vous choisi l'université Columbia pour poursuivre vos études ?

4. C. Truesdell a été le fondateur du journal Archive pour la mécanique rationnelle et l'analyse et pour l'histoire des sciences exactes.

La décision de changer d'école pour le second cycle (avant même d'être diplômé) a nécessité quelques recherches. Quels étaient les experts en théorie des catégories et où donnaient-ils des cours sur ce sujet ? J'ai noté que Samuel Eilenberg apparaissait très fréquemment dans la littérature du domaine, à la fois comme auteur et comme co-auteur avec Mac Lane, Steenrod, Cartan, Zilber. Alors l'université de Columbia était le lieu logique où étudier. En consultant Clifford Truesdell à propos du changement de lieu en question, j'ai été ravi d'apprendre qu'il était un ami personnel de Samuel Eilenberg ; connaissant mon souhait, il appela personnellement Sammy pour faciliter mon entrée à Columbia, et j'envoyais rapidement des documents décrivant mes programmes de recherche à Eilenberg.

La bourse qui a financé ma dernière période à Indiana s'avéra transférable à Columbia. Le département mathématique de Columbia avait contracté un arrangement selon lequel tout étudiant boursier devrait également être assistant d'enseignement. Ainsi je devins assistant professoral pour le cours de calcul de Hyman Bass, i.e. le cours d'algèbre linéaire, jusqu'à janvier 1961.

Quand j'arrivai à New York en février 1960, ma première action a consisté à aller à la librairie française et à m'acheter un exemplaire personnel du Godement. Même si je n'ai pris qu'un cours, d'algèbre homologique, avec Eilenberg, et malgré le fait qu'Eilenberg soit très occupé cette année-là par ses obligations de directeur de département, je pus apprendre une grande partie des catégories de Dold, Freyd, Mitchell, Gray ; avec Eilenberg, je n'eus qu'une seule discussion mathématique sérieuse. Peut-être n'avait-il pas eu le temps de lire mes documents ; quoi qu'il en soit, ce fut un étudiant boursier, Saul Lubkin, qui alors que j'étais à Columbia depuis plusieurs mois, réalisa que ce que j'avais écrit avait déjà été travaillé en détail sous le nom de foncteurs adjoints, et, après avoir discuté avec Eilenberg à ce propos, il me donna une copie du papier de Kan.

En 1960, Eilenberg avait réussi à attirer au moins dix des plus grands contributeurs de la théorie des catégories à Columbia comme étudiants ou enseignants. Ces cours et discussions aidèrent naturellement à rendre plus précise ma conception de la catégorie des catégories, de même que le fit plus tard mon étude de la logique mathématique à Berkeley ; pourtant, la nécessité d'axiomatiser la catégorie des catégories était déjà évidente pour moi pendant que j'étudiais Godement à Indiana.

Quelques mois plus tard, alors que Mac Lane était en visite à New York, Sammy me présenta à Saunders, décrivant mon programme en plaisantant comme le programme surprenant des "ensembles sans points".

Dans son autobiographie[5]*, Mac Lane écrit "Un jour, Sammy me dit qu'il avait un jeune étudiant qui affirmait qu'il pouvait faire de la théorie des ensembles sans éléments. L'idée était difficile à comprendre, et il se demandait si je pourrais parler à l'étudiant en question. (...) Je l'ai écouté avec attention, pendant plus d'une heure. À la fin, j'ai tristement dit "Bill, ça ne marchera juste pas. Tu ne peux pas faire des ensembles sans éléments, désolé," et j'ai rapporté ce résultat à Eilenberg. La bourse d'études de Lawvere à Columbia ne fut pas renouvelée, et moi et ma femme quittâmes l'endroit pour nous installer en Californie."...*

...Je n'ai jamais proposé "des ensembles sans éléments" mais le slogan a causé de nombreuses incompréhensions pendant les 40 années suivantes parce que, pour une raison quelconque, Saunders aimait le répéter. Bien sûr, ce que mon programme rejetait, c'était plutôt l'idée d'appartenance comme une primitive, les idées mathématiquement pertinentes, à la fois d'appartenance, et également d'inclusion, étant des cas particuliers de l'unique divisibilité par rapport à la composition catégorique. Je défendais l'idée que la théorie des ensembles ne devrait pas être basée sur la notion d'appartenance, comme dans la théorie des ensembles de Zermelo-Frankel, mais plutôt sur une structure invariante par isomorphisme.

À propos de l'autobiographie de Mac Lane, notez que quand Mac Lane l'a écrite, il avait déjà un certain âge, et selon sa femme et sa fille, il avait déjà eu plusieurs attaques cérébrales. Malheureusement, l'éditeur se rua chez l'imprimeur à l'occasion de son décès sans laisser sa femme et sa fille corriger les épreuves, comme cela leur avait été promis. Par conséquent, beaucoup de petits détails sont omis, par exemple le nom de famille du seul petit-fils de Mac Lane William, Coimbra qui devient Columbia[6], etc. Bien sûr, aucune mémoire de quiconque n'est si bonne qu'il ou elle puisse se souvenir de l'histoire d'un ou d'une autre précisément, et donc les principaux points concernant mes contributions et mon histoire

5. Saunders Mac Lane, *A Mathematical Autobiography*, A. K. Peters, 2005.
6. Idem, ibidem, p. 351.

contiennent souvent des spéculations qui auraient dû être vérifiées par l'éditeur et l'imprimeur.

Par rapport à cet épisode, il est traité différemment dans le livre, mais dans une version plutôt condensée, amenant quelques incohérences. L'acceptation préliminaire de ma thèse par Eilenberg a été encouragée par Mac Lane qui agit comme un lecteur extérieur, et j'ai défendu ma thèse devant Eilenberg, Kadison, Morgenbesser et d'autres dans l'amphithéâtre Hamilton en mai 1963.

Vous avez étudié à Columbia de février 1960 à juin 1961, y retournant pour soutenir votre thèse en mai 1963. Entre temps, vous êtes allé à Berkeley et à Los Angeles. Pourquoi ?

Même si j'avais reçu un excellent enseignement en logique mathématique de Elliott Mendelson à Columbia, j'ai ressenti un fort besoin de recevoir davantage d'enseignements en théorie des ensembles et en logique de la part d'experts de ces domaines, toujours dans le but, bien sûr, de clarifier les fondements de la théorie des catégories et de la physique. Pour pourvoir à mes obligations financières familiales, et aussi du fait de mon profond intérêt pour l'enseignement mathématique, j'avais été embauché pendant les étés 1960 et 1961 par TEMAC, une branche de l'Encyclopedia Britannica, qui s'engageait à fournir des livres pour l'université en mathématiques modernes dans un nouveau format interactif pas à pas. En 1961, TEMAC construisit un nouveau bâtiment près de l'Université de Stanford dédié à ce projet. Du coup, mon changement de ville suivant n'était pas motivé par le fait d'avoir perdu une bourse, mais plutôt dans deux buts : dans le quartier de la baie, je pourrais habiter à Berkeley, suivre les cours de Tarski, Feferman, Scott, Vaught, et d'autres théoriciens des ensembles de haut niveau, et aussi me rendre à Palo Alto pour continuer à rédiger le livre que j'écrivais principalement à domicile.

Ma première destination en Californie n'était pas ce club de réflexion (think tank) auquel il est fait référence dans le livre de Mac Lane. Plutôt, comme ma progression dans l'écriture du second texte programmé n'était pas aussi rapide que TEMAC l'escomptait, je démissionnai de ce travail.

Un ami de cette époque à Indiana travaillait alors pour le think tank près de Los Angeles, et put les persuader de me donner un travail. Au début, j'ai compris que le travail impliquerait de concevoir des systèmes informatiques pour vérifier des accords possibles sur le contrôle d'armes ; mais quand j'ai finalement obtenu l'habiliation secret défense, j'ai découvert que d'autres sujets étaient impliqués, reliés à la guerre du Vietnam. Le compte-rendu qu'en fait Mac Lane est essentiellement correct concernant la manière dont mon ami mathématicien Bishop Spangler du think tank devint mon supérieur et me donna alors l'opportunité de finir ma thèse sur l'algèbre universelle catégorique. En février 1963, Dana Scott et F. William Lawvere voulaient vraiment me débaucher de mon travail à Los Angeles pour que j'aie un poste d'enseignement à Reed College. J'ai demandé à Eilenberg une lettre de recommandation. Sa réponse très brève fut que la requête de Reed irait dans sa poubelle à moins que ma série de résumés ne soient rapidement terminés à la hâte et remplacés par une vraie thèse. Cet amour vache eut l'effet escompté en quelques semaines. Ayant soutenu ma thèse en 1963, je pus quitter le think tank et réintégrer une vie normale de professeur assistant à Reed College l'année académique 1963-64. En route vers Portland, j'assistais à la rencontre de théorie des modèles en 1963 à Berkeley, où, en plus de présenter mon développement fonctoriel de l'algèbre générale, j'annonçais que les quantificateurs sont caractérisés comme des adjoints de substitution.

Ainsi vous avez passé l'année académique 1963-64 comme professeur assistant à Reed College.

À Reed j'appris que la première année de calcul devrait se concentrer sur les fondements, les formules étant enseignées en seconde année. Ainsi, malgré le fait que j'avais déjà décidé que la catégorie des catégories était le paradigme approprié pour les mathématiques en général, je passais les semaines préparatoires à essayer de définir un cours de calcul basé sur la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel. Pourtant une évaluation sommaire montra qu'il y avait bien trop de niveaux de définitions, occultant la différentiation et l'intégration de la hiérarchie cumulative, pour être capable d'intégrer ces niveaux en un an. La structure de catégorie des ensembles sans structure de Cantor semblait à la fois plus simple et plus fermée. Ainsi la théorie élémentaire de la catégorie des ensembles émergea d'un besoin purement pratique d'enseignement, dans une sorte d'expérience que Saunders explicita également ainsi : *le besoin d'expliquer quotidiennement des éléments à des étudiants est souvent la source de nouvelles mathématiques.*

Une théorie d'une catégorie des ensembles abstraits de Cantor a la même force en termes de preuves théoriques que la théorie de la catégorie des catégories et je l'avais déjà noté dans l'introduction de ma thèse. Plus objectivement, les ensembles peuvent être définis comme des catégories discrètes et inversement, les catégories peuvent être définies comme les diagrammes finis adaptés aux ensembles discrets, et les forces relatives peuvent ainsi être comparées. La catégorie des catégories doit être préférée pour la raison pratique que toutes les structures mathématiques peuvent être construites comme des foncteurs et dans le réglage effectif, il n'y a pas besoin de vérifier dans chaque instance qu'on a un foncteur ou une transformation naturelle.

Après Reed, j'ai passé l'été 1964 à Chicago, où j'ai réfléchi au fait que la théorie de Grothendieck des catégories abéliennes devrait avoir un analogue non-linéaire dont les exemples incluraient les catégories de faisceaux d'ensembles ; j'ai écrit quelques-unes des propriétés que de telles catégories devraient avoir et noté que, sur la base de mon travail sur les catégories d'ensembles, une telle théorie devrait avoir une autonomie plus grande que ne pouvait en avoir la théorie abélienne (c'est seulement durant l'été 1965 sur la plage de La Jolla que j'ai appris de Verdier que lui, Grothendieck et Giraud avaient développé une théorie complètement épanouie de tels "topos", mais sans l'autonomie). Plus tard, à l'ETH à Zurich...

...où vous êtes resté de septembre 1964 à décembre 1966 comme chercheur scientifique en visite à l'Institut de mathématiques Beno Eckmann...

... là, j'ai été capable de simplifier davantage la liste des axiomes de la catégorie des ensembles dans un article que Mac Lane a alors communiqué aux Proceedings de l'Académie des sciences américaine. Là, j'ai aussi écrit pour publication le texte de la conférence "la catégorie des catégories comme fondement des mathématiques", conférence que j'ai donnée aux premières Rencontres internationales sur la théorie des catégories à La Jolla, en Californie, en 1965.

Quels étaient les objectifs de votre théorie élémentaire des catégories d'ensembles ?

Elle était destinée à accomplir deux objectifs. D'abord, la théorie caractérise la catégorie des ensembles et les applications comme une catégorie abstraite dans le sens où n'importe quel modèle pour les axiomes qui satisfont l'axiome additionnel non élémentaire de complétude, au sens habituel de la théorie des catégories, peut être démontré comme équivalent à la catégorie des ensembles. Deuxièmement, la théorie fournit des fondements des mathématiques qui sont un peu différents des théories des ensembles habituelles au sens où beaucoup de théorie des nombres, d'analyse élémentaire, et d'algèbre peuvent apparemment être développées à l'intérieur de ces fondements même si aucune relation avec les propriétés habituelles de $\in$ ne peut être définie.

Philosophiquement, on peut dire que ces développements ont conforté la thèse selon laquelle même en théorie des ensembles et en mathématiques élémentaires, il était également vrai, comme cela avait été longuement ressenti en algèbre avancée et en topologie, que la substance des mathématiques ne réside pas dans la Substance, comme on semble vouloir le signifier lorsque $\in$ est le prédicat irréductible mais dans la Forme, comme cela est clair lorsque la notion guide est la structure à invariance par isomorphisme, comme cela est défini, par exemple, par les propriétés des applications universelles. Comme en algèbre et en topologie, ici à nouveau, la machinerie technique concrète pour l'expression précise et le traitement efficace de ces idées est fournie par la théorie des catégories d'Eilenberg-Mac Lane, des foncteurs et des transformations naturelles.

Retournons à Zurich.

À Zurich, j'ai eu de nombreuses discussions avec Jon Beck et nous avons collaboré sur les doctrines. Le mot "doctrine" lui-même est entièrement dû à Jon et signifie quelque-chose qui est comme une théorie, si ce n'est qu'il n'est pas approprié de l'interpréter dans la catégorie des catégories, plutôt que, par exemple, dans la catégorie des ensembles. Les "algèbres" pour une doctrine méritent d'être appelées "théories" parce qu'en les dualisant en une algèbre fixée, on définit un foncteur sémantique reliant des généralités abstraites et les généralités concrètes correspondantes. Jon insistait sur la clarté mathématique et fit beaucoup pour encourager la précision dans les discussions et dans la formulation des résultats mathématiques. Il remarqua que mon foncteur de structure adjoint à la sémantique est analogue à la définition de descente de cocycle de Grothendieck dans le sens où les deux expriment partiellement la structure qui surgit inévitablement quand des objets sont construits par un processus fonctoriel, qui, si on le suppose, aide à renverser le processus et à discerner l'origine. Implémenter cette notion générale philosophique de la descente nécessite le choix d'une "doctrine" appropriée de théories dans lesquelles la structure induite peut être exprimée.

C'est également depuis Zurich que j'assistais à un séminaire à Oberwolfach où je rencontrai Pierre Gabriel et où j'appris de lui de nombreux aspects peu connus même aujourd'hui de l'approche que Grothendieck avait de la géométrie. En général, l'atmosphère de travail au Forschungsinstitut était si agréable, que j'y suis retourné plus tard, pendant l'année académique 1968/69.

Comme professeur assistant à Chicago, en 1967, vous avez donné avec Mac Lane un cours de mécanique, où "vous avez commencé à penser à la justification de méthodes intuitives plus anciennes en géométrie"[7]*. Vous l'avez appelée la "géométrie différentielle synthétique". Comment êtes-vous parvenu au programme de dynamique catégorique et de géométrie synthétique différentielle ?*

De janvier 1967 à août 1967, j'étais professeur assistant à l'université de Chicago. Mac Lane et moi avons programmé d'enseigner un cours commun basé sur le livre de Mackey "Fondements mathématiques de la mécanique quantique".

Alors, Mackey, un analyste fonctionnel d'Harvard principalement concerné par les relations entre la mécanique quantique et la théorie des représentations, a un lien avec la théorie des catégories.

Ce lien à la théorie des catégories remonte bien plus loin que cela, comme me l'ont expliqué Saunders et Sammy. La thèse de Mackey fournit une pensée remarquable de nature catégorique, même si les catégories n'avaient pas encore été définies alors. De façon plus précise, le fait que la catégorie des espaces de Banach et des applications linéaires continues soient complètement plongées dans une catégorie d'appariement d'espaces vectoriels abstraits, avec la définition et l'utilisation de la "convergence de Mackey" dans une séquence "bornologique" d'espaces vectoriels ont été découvertes là et ont joué un rôle fondamental en quelque sorte dans presque tous les livres d'analyse fonctionnelle depuis. Ce qui n'est malheureusement pas clarifié dans presque tous les livres d'analyse fonctionnelle, c'est que ces concepts sont de nature intensivement catégorique et qu'un meilleur éclairage résulterait de cette clarification.

Et le referee qui, malgré un scepticisme initial, permit au premier article de donner une exposition à la théorie des catégories qui vit le jour dans le TAMS en 1945, n'était autre que George Whitelaw Mackey.

Pour revenir à l'origine de la géométrie différentielle synthétique, d'où les idées d'organiser un tel cours de mécanique sont-elles venues ?

Apparemment, Chandra avait suggéré que Saunders donne quelques cours en lien avec la physique, et notre cours commun était le premier de la série. Finalement Mac Lane donna un exposé sur l'équation d'Hamilton-Jacobi à l'Académie navale à l'été 1970 qui fut publié dans le American Mathematical Monthly.

Dans ma série de cours avancés séparés, auquel a assisté mon étudiant d'alors Anders Kock, ainsi que Mac Lane, Jean Bénabou, Eduardo Dubuc, Robert Knighten, et Ulrich Seip, je commençais à appliquer la théorie des topos de Grothendieck que j'avais apprise de Gabriel au problème des fondements simplifiés de la mécanique continue comme cela avait été inspiré par les enseignements de Truesdell, l'axiomatisation de Noll, et par mes efforts en 1958 pour rendre catégorique le sujet de la topologie dynamique.

De ce que j'avais appris de Gabriel à Oberwolfach sur une vision de la géométrie algébrique comme étant un gros topos, ma contribution spécifique fut d'élever certains ingrédients, comme l'objet représentant le foncteur tangent d'une variété, au rang d'axiomes pour permettre que le développement se fasse sans encombre par une construction particulière. Cet ingrédient particulier n'avait apparemment jamais été remarqué précédemment dans la catégorie C-∞. Il a été immédiatement clair que le programme nécessiterait le développement, dans un esprit axiomatique similaire, de la théorie des topos dont j'avais entendu parlé en 1965 par Verdier sur la plage à La Jolla. En effet, mon recrutement à Chicago avait aussi été encouragé par Marshall Stone qui était enthousiaste à propos de mon observation en 1966 que la théorie des topos rendrait mathématique à la fois les modèles à valeurs booléennes en général, et l'indépendance de l'hypothèse du continu en particulier. Que ces topos apparemment totalement différents, impliquant des mouvements infinitésimaux et de la logique avancée, puissent faire partie d'une même théorie axiomatique simple était une promesse dans mon cours de 1967. Cela devint une réalité seulement après mon second séjour au Forschungsinstitut à Zurich, en Suisse en 1968-69, pendant lequel je découvris la nature du foncteur puissance ensembliste dans les topos comme un résultat de recherches sur le problème de l'expression en termes élémentaires de l'opération de formation du faisceau associé, et après 1969-1970 à

7. Saunders Mac Lane, *A Mathematical Autobiography*, A. K. Peters, 2005.

l'niversité Dalhousie à Halifax, à Nova Scotia, au Canada, lors de ma collaboration avec Myles Tierney.

Vous êtes allé à Dalhousie en 1969 pour exercer l'un des premiers professorats Killam.

En effet, et cela me permit d'avoir une douzaine de collaborateurs selon mon désir, également financés par Killam.

Et c'est alors que vous êtes arrivé, avec le topologue algébriste Myles Tierney, au concept de topos élémentaire. Pourriez-vous nous décrire cette collaboration avec Myles Tierney ?

Myles présenta lors d'un séminaire hebdomadaire l'état courant du travail et en effet, une partie du travail consistait en discussions pendant le séminaire lui-même : les remarques d'étudiants comme Michel Thiebaud et Radu Diaconescu ont parfois été des étapes-clefs. Bien que j'aie été capable de me convaincre moi-même à Zurich, Rome et Oberwolfach, que l'axiomatisation finie de Myles Tierney et Dana Scott était possible, cela nécessita plusieurs étapes de simplifications successives pour parvenir aux quelques axiomes maintenant connus. Le critère de suffisance était qu'en étendant toute catégorie donnée qui satisfaisait les axiomes, il serait possible d'en créer d'autres au moyen de préfaisceaux et faisceaux. Le "théorème fondamental" des tranches fut suivi par notre découverte que les comonades exactes à gauche produisaient aussi des topos, fit plus que couvrir l'aspect préfaisceaux. Le concept de faisceaux amena à la conjecture que des sous-topos devraient être précisément paramétrés par certaines applications intérieures comme les classifieurs de sous-objets, et ceci fut vérifié ; ces applications intérieures sont maintenant connues sous le nom d'opérateurs modaux de Lawvere-Tierney, et correspondent classiquement aux topologies de Grothendieck. Le fait que la sous-catégorie correspondante de préfaisceaux puisse être décrite en termes finis est une caractéristique technique clef, qui a été achevée en rendant explicite le classifieur d'applications partielles. Le fait que la théorie soit élémentaire signifie qu'elle a des modèles dénombrables et d'autres caractéristiques qui la rendent applicable à des résultats d'indépendance en théorie des ensembles et dans des récursions plus hautes, etc., mais d'un autre côté, la théorie de Grothendieck des U-topos est précisément incluse à travers sa propre technique de relativisation en même temps que des axiomes additionnels, tels que la décomposition en épimorphismes et la 2-valuation, sur U lui-même (en fait, ces axiomes additionnels sont positifs ou géométriques de telle façon qu'il y a un topos classifiant pour leurs modèles, un fait qui attend toujours d'être exploité par la théorie des ensembles.)

En 1971, la date officielle de la naissance de la théorie des topos, malheureusement, l'équipe de rêve à Dalhousie a été dispersée. Que s'est-il passé, qu'est-ce qui vous a fait partir au Danemark ?

Quelques-uns des membres de l'équipe et moi-même devînmes actifs contre la guerre du Vietnam et plus tard contre les mesures d'actions de guerre proclamées par Trudeau. Cet acte, similaire en plusieurs points au *Patriot Act* 35 ans plus tard aux États-Unis, suspendit les libertés individuelles sous prétexte d'un danger terroriste. (Le danger allégé à ce moment-là était un groupe au Québec qui se révéla être infiltré par le RCMP, la police secrète canadienne). Douze librairies du Québec (non reliées aux terroristes) furent brûlées par la police ; des activistes politiques de différents groupes à travers le Canada furent incarcérés en hôpitaux psychiatriques, etc. Je m'opposais publiquement à la consolidation de ces lois fascistes, à la fois au Conseil universitaire, et dans des démonstrations publiques. L'administration de l'université me déclara coupable de "rupture des activités académiques". Des rumeurs commencèrent à circuler, par exemple, sur le fait que mes diagrammes catégoriques étaient en fait des plans pour attaquer l'administration en construction. Mon contrat ne fut pas renouvelé.

Et après une courte période à Aarhus, vous êtes allé en Italie. Pourquoi ?

Les conditions à l'Institut mathématique étaient très agréables, et la collaboration avec Anders Kock était très fructueuse et appréciable. Pourtant, quand la longue nuit du nord a commencé, elle s'est avérée mauvaise pour ma santé, aussi j'ai accepté l'invitation de Perugia. J'apprécie encore de visiter le Danemark en été.

Après quelques années en Europe, vous êtes retourné aux États-Unis, à SUNY à Buffalo ...

John Isbell et Jack Duskin purent persuader le doyen que (contrairement au contenu d'un message envoyé par l'un des doyens de Dalhousie), je n'étais pas dangereux et je pourrais même être un atout.

Malgré votre retour aux USA, vous avez gardé un lien étroit avec la communauté mathématique italienne. En novembre 2003, il y a eu une conférence à Florence ("Ramifications de la théorie des catégories") pour célébrer les 40 ans de votre thèse[8]*. Pouvez-vous résumer les principales idées de celle-ci ?*

Les détails sont donnés dans mon commentaire pour la réimpression de TAC[9] (ces réimpressions constituent une excellente source d'autres ressources du début de la théorie des catégories). Le principal point était de présenter le traitement catégorique de la relation entre les théories algébriques et les classes d'algèbres, en incorporant les algèbres "universelles" précédentes de Birkhoff et Tarski d'une manière applicable aux cas spécifiques d'intérêt mathématique tels que traités dans les livres de Chevalley et de Cartan-Eilenberg. La redéfinition sans présentation à la fois des théories et des classes nécessitait une attention spécifique à la catégorie des catégories.

Lors de la conférence de Florence, il y a eu des exposés à la fois sur les mathématiques et sur la philosophie. Vous restez intéressé par la philosophie des mathématiques…

Oui. Parce que le but social le plus fondamental de la philosophie est de guider l'éducation et parce que les mathématiques sont un des piliers de l'éducation, en conséquence, les philosophes discutent souvent de mathématiques. Mais une philosophie moins spéculative basée sur la pratique réelle de la théorisation mathématique devrait finalement devenir un guide important pour l'éducation mathématique.

Comme Mac Lane l'a écrit dans son autobiographie, "L'aspect le plus radical est l'idée de Lawvere d'utiliser les axiomes de la catégorie des ensembles comme fondements des mathématiques. Cette idée attractive et opposée a, pour l'instant, trouvé peu d'écho dans la communauté des spécialistes de logique mathématique, qui ont tendance en général à supposer que tout a toujours commencé et commence toujours avec les ensembles". Avez-vous une explication de cette attitude ?

La tradition des 100 dernières années des "fondements comme justification" n'ont pas beaucoup aidé les mathématiques. Dans ma propre éducation, j'ai eu la chance d'avoir deux professeurs qui utilisaient le terme "fondements" *(ndlt : au sens de fondations)* dans son sens commun (plutôt que dans le sens spéculatif de la tradition Bolzano-Frege-Peano-Russell). Cette façon de penser s'illustre dans leur travail sur les fondements de la topologie algébrique, publiés en 1952 par Eilenberg (avec Steenrod), et les fondements mécaniques de l'élasticité et de la mécanique des fluides, publiés la même année par Truesdell. À chaque fois que j'ai utilisé le terme "fondements" dans mes écrits dans les quarante dernières années, j'ai explicitement rejeté une utilisation réactionnaire de ce terme et à la place utilisé la définition implicite dans le travail de Truesdell et Eilenberg. L'orientation de ces travaux semblait être de "concentrer l'essence de la pratique et en retour, d'utiliser les résultats pour guider la pratique". Notamment, un important composant de la pratique mathématique est l'étude précautionneuse de l'analyse historique et contemporaine, de la géométrie, etc. pour extraire les concepts récurrents essentiels ; rendre ces concepts et ces constructions (tels que ceux d'homomorphismes, de fonctions, de foncteurs adjoints, etc.) explicites fournit un guide puissant pour des développements avancés unifiés de tous les sujets mathématiques, anciens et nouveaux.

Pouvez-vous développer un peu à ce sujet ?

Quel est l'outil premier pour résumer l'essence des développements mathématiques ? L'algèbre ! Les points nodaux dans le progrès de la recherche adviennent dans les cas où un nombre fini d'axiomes pour la métacatégorie des catégories, tout ce que nous connaissons jusque-là, peut être exprimé dans une seule sorte d'algèbre. Je suis fier d'avoir participé avec Eilenberg, Mac Lane, Freyd, et de nombreux autres, à cette prise de conscience contemporaine de l'algèbre comme théorie des catégories. Si cette attention excessive donnée à la possibilité alléguée que les mathématiques soient inconsistantes, avec la dégradation qui l'a accompagnée du F-mot n'avait pas eu lieu au 20$^{\text{ème}}$ siècle, nous l'utiliserions encore selon le sens connu par le grand public : la recherche de ce qui constitue la "base". Nous, qui sommes supposés connaître l'algèbre explicite des homomorphismes, des fonctions, etc. avons trop longtemps négligé notre devoir de trouver des moyens d'enseigner ces concepts aussi dans l'enseignement secondaire.

Avoir reconnu dans les années 60 qu'il n'y a pas une "justification" platonique paradisiaque donnée pour les mathématiques, j'ai essayé de donner au mot "Fondements" des significations plus progressives

8. Sémantiques fonctorielles des théories algébriques, réimpression dans *Repr. Theory Appl. Categ.* 5 (2004) 1-121 (version électronique)
9. Théorie et applications des catégories

dans l'esprit d'Eilenberg et Truesdell. C'est-à-dire que j'ai essayé d'appliquer la méthode vivante de l'axiomatique pour rendre explicites les caractéristiques essentielles d'une science et de la façon dont elle se développe pour aider à fournir un guide à l'utilisation, à l'enseignement, et plus consciemment au développement de la science. De “purs” fondements, qui se transforment en fondements qui oublient leur but et se mettent à devenir purement spéculatifs et centrés sur eux-mêmes, ne sont clairement PAS des fondements.

Les fondements se déduisent des applications par l'unification et la concentration, en d'autres termes, par la méthode axiomatique. Les applications sont guidées par les fondements qui ont été appris à travers l'éducation.

Vous êtes en train de dire qu'il y a une relation dialectique entre les fondements et les applications.

Oui. Toute théorie des ensembles digne de ce nom permet une définition des notions d'application, domaine, codomaine et composition ; c'est en termes de ces notions que Dedekind et plus tard d'autres mathématiciens ont exprimé des structures intéressantes. Par conséquent, tout modèle d'une telle théorie donne naissance à une catégorie et quelles que soient les fonctionnalités additionnelles compliquées qui peuvent être contemplées par la théorie, non seulement les propriétés mathématiques, mais également les propriétés les plus intéressantes “de théorie des ensembles”, telles que l'hypothèse du continu, la finitude de Dedekind, l'existence des cardinaux inaccessibles d'Ulam, etc. dépendent seulement de cette simple catégorie.

Durant les quarante dernières années, nous sommes devenus familiers du fait que les fondements sont relatifs, non absolus. Je crois que même les clarifications les plus grandes des fondements ne seront terminées qu'en appliquant une concentration des applications de la géométrie vers l'analyse, c'est-à-dire en poursuivant la relation dialectique entre les fondements et les applications.

Plus récemment, vous avez donné les formulations algébriques de distinctions entre opposés telles que “unité vs. identité”, quantités variables “extensives vs. intensives”, catégories “spatiales vs. quantitatives”...

Oui, pour montrer qu'à travers l'utilisation de la théorie mathématique des catégories, de telles questions amènent non pas à des spéculations floues, mais à des conjectures mathématiques concrètes et à des résultats.

Cela a été une des caractéristiques de votre travail de creuser sous les fondements d'un concept pour simplifier sa compréhension. En cela, vous êtes vraiment un descendant de Samuel Eilenberg, dans son “insistance à aller à la racine des choses”. Nous nous rappelons très bien d'un exposé que vous avez présenté à Coimbra à nos étudiants de premier cycle. Vous avez récemment publié deux opus d'articles[10]*. Pourquoi trouvez-vous important de dédier une partie importante de votre temps et de vos efforts à cela ?*

Beaucoup de mes publications de recherche sont le résultat de la longue étude de deux problèmes :
(1) Comment effectivement enseigner le calcul à des débutants ;
(2) Comment apprendre, développer et utiliser des suppositions en thermodynamique continue d'une manière qui soit rigoureuse, et encore simple.

En d'autres termes, les résultats eux-mêmes peuvent seulement être des blocs de construction d'une réponse à la question : “Comment pouvons-nous réaliser des étapes pédagogiques et concrètes, pour combler l'énorme fossé qui sépare la société du 20ème siècle du fait que :
(a) tout le monde doit utiliser la technologie qui s'appuie sur la science, qui dépend des mathématiques ; et également
(b) seules très peu de personnes ont une connaissance effective des concepts de base des mathématiques modernes comme les rétractions, les théorèmes de points fixes, les morphismes de graphes dirigés, et les systèmes dynamiques, les produits galiléens, les fonctionnelles, etc.”.

Seulement armés de tels concepts, peut-on espérer répondre avec confiance à la myriade de méthodes, résultats et preuves qui dans le monde moderne sont associés aux mathématiques. Avec Stephen Schanuel, j'ai commencé à relever le défi de cette question dans notre livre Mathématiques conceptuelles qui reflète

10. F. W. Lawvere et R. Rosebrugh, *Sets for Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003 ; F. W. Lawvere et S. Schanuel, *Conceptual Mathematics. A First Introduction to Categories*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

le travail actuel de nombreux mathématiciens.

Quel est votre opinion concernant l'article de Wikipedia vous concernant ?

La désinformation de la version originale a été largement retirée, mais il en reste beaucoup dans d'autres articles de théorie des catégories.

Vous avez célébré récemment l'anniversaire des 100 ans de la naissance de Kurt Gödel. Que pensez-vous de la publicité extra-mathématique autour du théorème d'incomplétude ?

Dans *Arguments diagonaux et catégories fermées cartésiennes*[11], nous démystifions le théorème d'incomplétude de Gödel et la théorie de la définition de la vérité de Tarski en montrant que tous deux sont des conséquences d'une algèbre très simple dans le paradigme fermé-cartésien. Il a toujours été difficile pour beaucoup d'appréhender comment le théorème mathématique de Cantor pourrait être rebaptisé en "paradoxe" par Russell et comment le théorème de Gödel pouvait être si souvent déclaré résultat le plus significatif du 20ème siècle. Il y avait toujours de la suspicion parmi les scientifiques que de tels mouvements de publicité extra-mathématiques cachaient un plan pour ré-établir la croyance comme substitut de la science. Maintenant, une centaine d'années après la naissance de Gödel, les tentatives d'exploiter son grand travail mathématique dans un tel but sont devenus explicites[12].

Vous avez toujours été concerné par le fait d'expliquer comment décrire les règles mathématiques et les faits d'une manière catégorique. La théorie des catégories est-elle seulement un langage ?

Non, elle est plus qu'un langage. Elle concentre les fonctionnalités essentielles de siècles d'expérience mathématique et ainsi agit comme un guide indispensable pour les prochains développements.

Quelles ont été selon vous les contributions majeures que la théorie des catégories a apportées aux mathématiques ?

D'abord, le travail de Grothendieck dans son article Tohoku[13]. Les espaces nucléaires ont été l'une des grandes inventions de Grothendieck. D'ailleurs, Silva a travaillé beaucoup sur ces espaces et l'article de Grothendieck de 1953 sur les fonctions holomorphes[14] a été inspiré par un article de Silva de 1950[15].

Le concept de foncteurs adjoints, découvert par Kan dans le milieu des années 50, fut aussi une pierre de touche, rapidement incorporée comme un élément-clef des fondements de la géométrie algébrique par Grothendieck ainsi que dans les fondements catégoriques de la logique et de la théorie des ensembles.

Je peux aussi mentionner la fermeture cartésienne, l'axiomatisation de la catégorie des catégories, la théorie des topos,... Les catégories fermées cartésiennes sont apparues pour la première fois dans ma thèse, en utilisant cette dénomination. Le nom était apparu initialement dans un article de Kelly et Eilenberg[16]. Je ne suis pas exactement d'accord avec l'emploi du mot "Cartésien". Galilée est la véritable source, et non Descartes.

Vous êtes regardé par de nombreuses personnes comme l'un des grands visionnaires des mathématiques du début du vingt-et-unième siècle. Comment envisagez-vous le développement futur de la théorie des catégories au sein des mathématiques ?

Je pense que la théorie des catégories a un rôle à jouer dans la poursuite de la connaissance mathématique. Il est important de souligner que les théoriciens des catégories continuent de trouver des résultats surprenants malgré toutes les choses pessimistes que nous avons entendues, même il y a 40 ans, notam-

11. Réimprimé dans *Repr. Theory Appl. Categ.* 15 (2006) 1-13 (version électronique).
12. La fondation controversée John Templeton, qui a essayé d'injecter de la religion et de la pseudo-science dans la pratique scientifique, était le sponsor de la conférence internationale organisée par la Société Kurt Gödel Society en honneur des 100 ans de la naissance de Gödel. Cette fondation finance également un programme de bourses de recherche organisé par la Société Kurt Gödel.
13. A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tohoku Math. J. 9 (1957) 119-121.
14. A. Grothendieck, *Sur certains espaces de fonctions holomorphes*, I, J. Reine Angew. Math. 192 (1953) 35-64.
15. J. Sebastiao e Silva, *Analytic functions and functional analysis*, Portugaliae Math. 9 (1950) 1-130.
16. S. Eilenberg et G. M. Kelly, *Closed categories*, Proc. Conf. Categorical Algebra (La Jolla, Calif., 1965), p. 421-562, Springer, 1966.

ment que les généralités abstraites n'avaient pas d'avenir. Nous continuons d'être surpris de trouver de surprenants nouveaux et puissants résultats ainsi que de trouver des exemples particuliers très intéressants.

Nous avons dû nous battre contre le mythe du courant dominant qui dit, par exemple, qu'il y a des cycles durant lesquels à un moment donné, tout le monde travaille sur des concepts généraux, et qu'à d'autres moments, tout le monde travaille sur les exemples particuliers, alors qu'en fait, les mathématiciens sérieux ont toujours fait les deux.

On ne devrait pas se saoûler de l'idée que tout est général. Les théoriciens des catégories devraient revenir à l'objectif initial : appliquer des résultats généraux à des particularités et trouver des connexions entre les différentes parties des mathématiques.

Francis William Lawvere (né le 9 février 1937 à Muncie, dans l'Indiana) est un mathématicien connu pour son travail en théorie des catégories, théorie des topos, logique, physique et philosophie des mathématiques. Il a écrit plus de 60 articles dans les domaines des théories algébriques et des catégories algébriques, de la théorie des topos, de la logique, de la physique, de la philosophie, de l'informatique, de la didactique, de l'histoire et de l'anthropologie, et a publié trois livres (dont l'un est traduit en italien et espagnol) et en a trois autres en préparation en ce moment. Il a également édité trois volumes de la série des Springer en mathématiques et a supervisé douze thèses. La série électronique *Réimpression de la théorie et des applications des catégories* inclut des réimpressions de sept de ses articles fondamentaux, avec commentaires de l'auteur, et parmi ceux-ci, on trouve sa thèse et son traitement complet de la catégorie des ensembles.

Au congrés international des mathématiciens en 1970 à Nice, il introduisit une version algébrique de la théorie des topos qui unifiait la géométrie et la théorie des ensembles. Écrite en collaboration avec Myles Tierney, cette théorie a depuis été développée plus avant par de nombreuses personnes, avec des applications à différents domaines des mathématiques. Deux de ces domaines avaient été précédemment introduits par Lawvere : (1) Ses cours en 1967 à Chicago (publiés en 1978) sur la dynamique catégorique ont montré comment des topos avec des objets infinitésimaux particuliers peuvent fournir un paradigme géométrique flexible pour les modèles de la physique continue, ce qui a amené un nouveau domaine connu sous le nom de Géométrie différentielle synthétique ; (2) Dans son exposé à Los Angeles en 1967, et dans ses articles de 1968 sur les hyperdoctrines et l'adjonction dans les fondements, Lawvere a initié et développé le domaine de la logique catégorique, qui a depuis été largement appliqué à la géométrie et à l'informatique. Ces idées étaient indispensables pour sa preuve simplifiée en 1983 de l'existence d'entropie en thermodynamique de systèmes non-équilibrés.

Bon nombre des publications de recherche de Lawvere résultent de ses efforts d'améliorer l'enseignement du calcul et de la thermodynamique pour l'ingénierie. C'est en particulier son cours en 1963 au Reed College sur les fondements du calcul qui a amené à son axiomatisation en 1964 de la catégorie des ensembles et finalement à la théorie élémentaire des topos.

Le professeur Lawvere a été élève de Clifford Truesdell et de Max Zorn à l'université d'Indiana et il a obtenu une thèse à Columbia en 1963 sous la supervision de Samuel Eilenberg. Avant de terminer sa thèse, il a passé une année à Berkeley en tant qu'étudiant informel en théorie des modèles et théorie des ensembles, suivant les cours d'Alfred Tarski et Dana Scott. En 1964-1966, il était chercheur-professeur visiteur au Forschungsinstitut mathématique à l'ETH de Zurich. Il a ensuite enseigné à l'université de Chicago, travaillant avec Mac Lane, et au Centre d'enseignement CUNY de New-York, travaillant avec Alex Heller. De retour à Zurich en 1968-69, il proposa des axiomes élémentaires (premier ordre) pour les topos généralisant le concept de topos de Grothendieck. L'université de Dalhousie en 1969 initia un groupe de chercheurs à financements Killam avec Lawvere à sa tête ; mais en 1971, le groupe fut arrêté à cause des opinions politiques de Lawvere (notamment son opposition à l'utilisation en 1970 de mesures d'actions armées).

Alors Lawvere alla à l'Institut mathématique de Aarhus (1971-72) et il créa un séminaire à Perugia, en Italie (1972-1974) où il travailla particulièrement sur différentes sortes de catégories enrichies. De 1974 jusqu'à sa retraite en 2000, il a été professeur de mathématiques à l'université de Buffalo, collaborant souvent avec Stephen Schanuel. Là il occupa une position de professeur sur une chaire Martin (1977-82).

Il a aussi été professeur visiteur de recherche à l'IHES à Paris (1980-81).

Il est maintenant Professeur émérite de mathématiques et Professeur adjoint émérite de philosophie à l'université d'état de New York à Buffalo et il continue à travailler à sa recherche de 50 années pour trouver un paradigme rigoureux et flexible pour les idées physiques de Truesdell et Walter Noll, utilisant la théorie des catégories.

Sa vision personnelle des mathématiques, basée sur une connaissance profonde et élargie des mathématiques et de la physique, continue d'influencer des mathématiciens et d'attirer des experts d'autres domaines des mathématiques. Cette influence a été très apparente dans la session d'honneur qui a eu lieu lors de la dernière conférence de théorie des catégories (Carvoeiro, Portugal, juin 2007), à l'occasion de son 70$^{\text{ème}}$ anniversaire, lors de laquelle des hommages spontanés et intenses lui ont été témoignés à la fois par des chercheurs confirmés ainsi que par de jeunes chercheurs. En effet, en plus de ses extraordinaires qualités en tant que mathématicien, nous voulons témoigner du soin et des efforts qu'il a mis dans l'orientation d'étudiants et de jeunes chercheurs, dont nous avons eu confirmation lorsqu'il a donné une conférence de théorie des catégories à des étudiants de premier cycle, et à nouveau, dans les échanges que nous avons été très honorés d'avoir avec lui, lors de la préparation de cet entretien.

Alexander Grothendieck et le concept d'espace

F. William Lawvere

Il y a 50 ans, la première réunion internationale sur la théorie des catégories a eu lieu à La Jolla, en Californie. En fait, une partie de cette réunion s'est déplacée sur la plage, où un discours inspirant par Jean-Louis Verdier a introduit pour beaucoup d'entre nous une nouvelle classe de catégories dues à Grothendieck, en écrivant sur un tableau noir qui avait été amené à la plage dans ce but. Jon Beck a commencé à dessiner des diagrammes dans le sable, et une discussion vivante et enthousiaste a commencé entre les participants. Jean-Louis Verdier a suggéré que ces catégories incarnent la théorie des ensembles, mais Erwin Engeler et moi avons exprimé des doutes, parce que la description semblait avoir besoin d'une théorie des ensembles donnée de l'extérieur pour paramétrer les familles pour les colimites requises.

Il y a plusieurs sujets importants qui sont sortis de cette réunion et qui sont toujours florissants, par exemple, la théorie des catégories enrichies présentée par Eilenberg et Kelly, et en particulier, le rôle des catégories "cartésiennes fermées" dans la géométrie et la logique. Le sujet que j'ai essayé de capturer à La Jolla, à savoir l'utilisation croissante des catégories et des foncteurs comme le langage pour les mathématiques abstraites, se poursuit depuis 50 ans.

La formulation explicite des principes de la théorie des catégories dans mon article a toujours besoin d'une axiomatisation améliorée. Je serai ravi quand une personne jeune réalisera cette tâche.

La disparition récente de tant de piliers de cette époque souligne la nécessité d'une histoire cohérente et correcte comme guide pour l'avenir. Je veux continuer la recherche d'une telle histoire, en me concentrant ici sur le concept d'espace.

Il n'y a pas qu'un seul concept d'espace, mais plusieurs classes de "régularité" [1]. (Pour éviter les malentendus, je ne me concentrerai pas sur l'espace riemannien ou l'espace-temps. Ces structures supplémentaires importantes nécessitent des espaces comme domaines de définition.) Une caractéristique commune des espaces dans ces catégories plus ou moins lisses que j'ai appelées COHÉSION, pour indiquer que les parties d'un espace "sont collées ensemble" et "hésitent" à se séparer (comme en argot américain "je resterai un peu, jusqu'à ce que je me sépare").

Le grand géomètre dialectique Hermann Grassmann a discerné les deux principales contradictions en mathématiques comme étant les oppositions "continues contre discrètes" et "égalité contre inégalité". Parce que le terme "continu" a eu une définition mathématique spécifique pendant plus d'un siècle, je vais plutôt utiliser "cohésif" pour ce concept philosophique, mais bien sûr, je vais immédiatement essayer de l'apprivoiser avec des définitions mathématiques. La dialectique de l'inégalité / égalité a été expliquée de manière assez approfondie par les mathématiciens, selon au moins deux niveaux :

Hurewicz (1935), Kan (1955) et Moore (1955), Quillen (1967), Gabriel et Zisman (1967), Heller (1988), Grothendieck (1983 et 1989), Kan et al. (2004), Maltsiniotis et Cisinski (de 1999 à ce jour), ont fourni quelques-unes des contributions majeures au niveau des espaces eux-mêmes.

Un autre niveau de transformation de l'égalité est codifié dans la notion de catégorie exacte introduite par Myles Tierney lors de notre séminaire à Halifax en 1969 ; il a prouvé que ces catégories sont une délinéarisation de la notion de catégorie abélienne de Grothendieck dans le sens où les groupes abéliens dans une catégorie exacte forment une catégorie abélienne. Cette théorie a été exposée dans le livre de Barr, van Osdol et Grillet, ainsi que dans l'exposé de Barr à l'ICM 1970. Les catégories exactes incarnent la propriété spéciale d'images en théorie des faisceaux qui peuvent être exprimées en termes "logiques" : définir l'image d'une application $X \to Y$ comme étant le plus petit sous-objet de Y à travers lequel l'application se factorise. Cette définition exprime précisément la règle d'inférence de la quantification existentielle ; mais alors dans quelle mesure exprime-t-elle "l'existence effective" ? En d'autres termes, étant donné une figure $Q \to Y$ de forme Q dans le codomaine Y, dans quelle mesure "provient-elle" d'une figure dans X via l'application, en supposant que $Q \to Y$ se trouve dans l'image ainsi définie ? Une partie de la propriété d'exactitude garantit qu'il existe un recouvrement $P \to Q$ de Q avec une figure effective $P \to X$ s'appliquant dans $P \to Q \to Y$, au pullback de la figure en question. L'autre caractéristique des catégories exactes est encore plus transparente sur la transformation de l'égalité : les co-égaliseurs viennent de leurs

Invited address CT Aveiro, juin 2015

1. smoothness = lissité ?

paires de noyaux et les relations d'équivalence émergent toutes de paires de noyaux. Il est clair que la théorie des catégories exactes s'applique largement. Le livre de Barr, Grillet et Van Osdol a beaucoup fait pour la populariser, et le travail de Carboni et d'autres a très efficacement utilisé "la complétion exacte" pour adjoindre les co-égaliseurs adéquats à des catégories non exactes. La plupart de ces travaux postulent les propriétés d'exactitude comme des conditions données sur une catégorie, tout comme le fait la caractérisation de Giraud des topos de Grothendieck ; une partie de la signification du fait de postuler des espaces fonctionnels et des objets puissance est que l'existence de foncteurs adjoints implique l'exactitude sans postulat supplémentaire.

L'idée d'une opposition entre une catégorie d'espaces cohésifs et une catégorie d'ensembles anti-cohésifs s'applique également en particulier à la description de Cantor de la relation entre une catégorie d'ordinaux et une sous-catégorie de cardinaux. En fait, il semble qu'en général, le discret est une sous-catégorie co-réflexive du cohésif, avec la co-réflexion extrayant, comme un arithmos aristotélicien, le "cardinal de X" Cantorien ou les "points de X" de Hausdorff. (Les ensembles des "plus forts" ont des isomorphismes, tout comme en ont les objets dans n'importe quelle catégorie ; la question ici, cependant, n'est pas de passer à des classes d'isomorphismes, mais simplement d'extraire l'aspect discret sous-jacent de chaque espace/ordinal donné). La dialectique Grassmannienne se développe davantage. La sous-catégorie discrète est la négation d'une sous-catégorie identique à l'extrémité opposée, avec le même foncteur pour réflexion. Autrement dit, la même catégorie a comme insertions deux sous-catégories opposées, celle qui illustre que les "plus forts" sont totalement distincts, mais l'autre démontrant qu'ils sont presque indiscernables. Plus précisément, un travail conjoint avec Matias Menni a montré que, selon des hypothèses très générales, l'inclusion co-discrète consiste en les faisceaux booléens que possède tout topos. Cependant, pour une catégorie d'espaces il y a un adjoint supplémentaire à la faisceautisation. Cela indique une restriction non triviale sur cette catégorie cohésive, à savoir l'existence de cet adjoint de Cantor additionnel. De telles restrictions servent d'axiomes pour la cohésion, ce qui est la caractérisation que nous proposons pour les "catégories d'espace".

Mon utilisation de concepts tels que la sous-catégorie booléenne révèle que je suis convaincu que les catégories d'espace sont le plus efficacement modélisées comme des topos appropriés. Un des deux axiomes pour les topos, notamment l'existence d'espaces fonctionnels (la caractéristique qui a été appelée "fermé cartésien" depuis la contribution d'Eilenberg et Kelly il y a 50 ans avait été reconnu comme fondamental par Hadamard et Volterra au moment de la ICM de 1897 à Zurich. Le fait que cette propriété soit essentielle a été souligné par Grothendieck en 1957 dans son article Tohoku. Ces raisons et bien d'autres indiquent que cette opération est centrale à toutes les branches des mathématiques. Afin d'obtenir la propriété d'espace de fonctions (dans les modèles de cohésion qui sont construits comme des catégories de structures dans une base discrète), la structure fondamentale doit avoir la nature des figures et les relations d'incidence plutôt que les algèbres de fonctions (qui peuvent être récupérées naturellement). Mon article de Palerme de 1997 a tenté d'expliquer cette nécessité. Ce papier, comme celui de 1965 d'Eilenberg et Kelly, et comme les publications de Steenrod, Kelly et Brown, mentionnait comme un exemple important les k-espaces basés sur l'utilisation d'espaces compacts comme types de figures. Cependant, aucun de nous n'a mentionné l'origine réelle des k-espaces, dont j'ai appris plus tard au téléphone par David Gale (lorsque j'ai lu sa publication de 1950 dans les Actes de l'AMS). Cette notion de k-espace avait été présentée par Witold Hurewicz dans ses conférences de Princeton à la fin des années 40. En fait, au début des années 40, Hurewicz avait souligné cette nécessité, qui a conduit à la solution partielle par Ralph Fox en 1945 pour le cas des séquences convergentes comme figures. Hurewicz n'avait pas parlé explicitement en termes de catégories, mais dans les lois exponentielles qu'il exigeait, on peut reconnaître immédiatement la caractéristique de l'adjonction.

Il est frappant qu'Hurewicz, qui en 1935 avait initié des avancées fondamentales dans l'étude de la transformation de Grassmann des inégalités en égalités, ait fourni également des contributions fondamentales au développement de l'autre transformation de Grassmann entre les caractères continu et discret. Ses contributions bien connues à la théorie des dimensions (qui utilisait déjà les espaces fonctionnels en 1941), mais aussi sa contribution moins citée à la reconnaissance du rôle fondamental des espaces fonctionnels en général. S'il n'y avait pas eu la tentation de la pyramide à Uxmal, il nous aurait montré davantage de la relation qui existe entre les deux principes de Grassmann.

De l'analyse fonctionnelle aux dérivateurs, le travail d'Alexander Grothendieck a immensément illuminé cette relation.

Le grand livre de Hausdorff "Mengenlehre" était en fait un livre sur la topologie (qui est un élément important de l'étude de la cohésion), illustrant à nouveau l'opposition et la transformation mutuelle entre cohésion et caractère discret, telle qu'elle est abordée dans son travail sur le chaos sous le pseudonyme de Paul Mongre.

Un aspect remarquable de la dialectique continu / discret est que les ensembles abstraits de "lauter Einsen", terme abstrait pour signifier la cohésion des espaces, peut réciproquement servir de base, via des schémas spécifiques dans leur catégorie, à des structures constituant des modèles pour toutes les sortes d'objets mathématiques, incluant en particulier les espaces eux-mêmes. Comme critères pour juger de l'adéquation de nos axiomes, Myles Tierney et moi avons insisté sur la preuve des constructions de sites et de faisceaux de Grothendieck. Cette preuve a été publiée par Radu Diaconescu en 1975 comme préalable nécessaire à sa preuve de changement de base pour les topos. Autrement dit, pour un morphisme géométrique $E \to U$ satisfaisant une condition-limite, E peut être reconstruit, par un zigzag de trois morphismes géométriques, à partir d'un site interne à U : la première jambe est l'homéomorphisme local donné par la tranche topos sur un objet de U qui paramètre les objets d'une catégorie interne, la seconde est donnée par la comonade exacte à gauche qui adjoint l'action de "pré-faisceaux" des applications de cette catégorie interne, et la troisième est la pleine inclusion des faisceaux pour un opérateur de localité. (Chacune des trois jambes est un cas particulier de la propriété importante de fermeture générale distincte de la classe des topos.) Pour un tel "U-Topos" E, le U lui-même peut être un topos élémentaire, renforçant l'observation de Grothendieck concernant l'ubiquité du principe puissant de relativisation ; il n'est pas nécessaire que ce soit un univers inaccessible, comme dans les exemples originaux de Grothendieck dans SGA4 ; il n'est pas non plus besoin que ce soit la partie discrète d'un topos cohésif, comme souligné ici. Pour chaque topos U, il y a la 2-catégorie Top/U des U-topos ; en effet, faire varier U peut simplifier le traitement de certains problèmes.

La conférence de Varsovie en 1959 par Saunders Mac Lane a en fait introduit l'idée de catégorie enrichie, dans son cas particulier de "catégorie localement petite". En reflet de la distinction de Bernays classe / ensemble, la croyance s'est développée que les catégories qui ne sont pas localement petites sont "illégitimes". Je suggère le point de vue alternatif suivant.

Dans la métacatégorie des catégories, il existe des catégories fermées monoïdales et donc d'autres catégories enrichies en elles. Cela montre la nécessité de l'existence d'un catégorie réelle appelée la catégorie des petits ensembles, dans la métacatégorie close cartésienne de toutes les catégories réelles. La catégorie foncteur de deux catégories réelles devrait aussi être réelle, même si bien sûr des propriétés comme la finitude locale ne sont pas conservées. Les catégories potentielles (correspondant aux sous-catégories de cette métacatégorie) peuvent ou non avoir des catégories réelles qui les représentent à équivalence près. L'un des principaux objectifs des mathématiques abstraites est d'illustrer et d'utiliser les transformations mutuelles entre espace et quantité. Les espaces et les quantités d'un intérêt majeur sont "petits", il est donc raisonnable de définir de petits ensembles satisfaisant la dualité Banach-Isbell et de postuler qu'il existe une catégorie réelle U représentant cette notion de petitesse. Ce postulat semble désormais être l'un des amendements raisonnables à ma tentative de La Jolla de 1965 de résumer en axiomes les caractéristiques-clé utiles d'une métacatégorie de catégories. Alors les catégories de foncteurs des catégories réelles peuvent ne pas avoir de petits ensembles de *hom*, mais elles sont réelles et donc soumises à toutes les propriétés des catégories réelles en général.

Ce que j'ai dit jusqu'à présent a été profondément influencé par le travail d'Alexander Grothendieck. Permettez-moi maintenant d'évoquer ses contributions spécifiques au problème de l'espace tel que je l'ai décrit. On dit souvent qu'il a inventé les topos comme domaines de cohomologie et qu'ils étaient une "généralisation" des espaces topologiques. Mais déjà en 1960, il définissait et utilisait des catégories en géométrie complexe, qui étaient des topos même s'ils n'étaient pas explicitement appelés ainsi. Son célèbre exercice Médaille en Chocolat (dans SGA4) est, comme je le lui ai dit, une clé pour toute la théorie et l'application des topos ; il a exprimé son accord, visiblement heureux que quelqu'un l'ait remarqué. Là, il explique une version (en termes de sites) de la relation entre le gros topos d'un espace et un petit topos du même espace ; les espaces en question sont pris dans une catégorie d'espaces qui pourrait seulement elle-même être le gros topos d'un point. Il s'agit toujours d'un exercice en cours que de clarifier la distinction qualitative entre ces sortes de topos qui apparaissent comme "gros" ou comme "petit" dans ce genre de situation, c'est-à-dire entre des catégories qui représentent une détermination générale de la cohésion et des catégories constituées d'ensembles de variables paramétrés par une sorte d'espace généralisé. Les espaces généralisés incluraient les espaces étales découverts par Grothendieck.

Quelle était la caractéristique indésirable des fondements initiaux des schémas de Dieudonné-Grothendieck, que Grothendieck a rejetés avec tant d'emphase dans sa conférence au colloque de Buffalo de 1973 ?

La structure contravariante avait déjà été considérée par Hurewicz et d'autres comme étant problématique, mais dans la notion d'espace local annelé, cette structure a été disséquée davantage en deux composants en interaction, des ensembles ouverts et des faisceaux d'anneaux locaux. Avec le recul, des problèmes auraient déjà pu être discernés à partir de 1960 lors de l'examen par Serge Lang des EGA. À ce moment-là, Lang est enthousiaste à propos du fait que tant de concepts classiques peuvent être inclus dans le changement de base ; il est également enthousiasmé par la preuve du virtuose Grothendieck que de tels produits fibrés existent réellement. En effet de notre point de vue de calculateurs moins capables, un virtuose était tenu de prendre les ingrédients séparés et de les réassembler en ingrédients similaires pour un schéma de produit ; en particulier, l'espace topologique sous-jacent ne sous-tend pas le schéma produit.

Quelle était la nature de la solution de Grothendieck ?

Dans un topos de foncteurs à valeurs définies sur des ensembles sur la catégorie des algèbres finiment représentables, chaque espace X a, grâce à Yoneda, un "intérieur" dont les objets sont les figures (en général singulières) de formes représentables, avec des relations d'incidence données par des triangles commutatifs. Cela peut être considéré comme une catégorie discrètement opfibrée, mais c'est équivalent à un foncteur à valeurs dans un ensemble. [Je ne suis pas d'accord avec le terme "foncteur de points" pour cela, car c'est un foncteur dont les valeurs réelles incluent toutes les figures de X. Bien sûr, les "points" d'un autre espace associé à X peuvent représenter des figures dans X, mais pour X lui-même, ses points sont juste la restriction de X à la catégorie des extensions de corps fini. Cette catégorie engendre la partie booléenne du grands topos. La définition habituelle de la notion de point est compliquée car elle revient à prendre la limite directe non exacte de ce foncteur restreint de points. En général, ce topos booléen est bien mieux adapté que la catégorie des ensembles abstraits pour servir de "topos de base" dans le cas d'un corps de base non fermé algébriquement. Faire confluer les "figures en X" avec les "points de X" a un air de science-fiction qu'il n'avait probablement pas l'intention d'avoir. Volterra les a appelés les "éléments".] Une meilleure version de "l'espace topologique sous-jacent" est interne au topos Barr-Boole-Galois où atterrit le foncteur de points réels ; ce choix est également nécessaire pour un produit préservant le foncteur des composants.

Entre le site de Galois pour la partie booléenne et le site pour la catégorie des espaces tout entière, il y a la catégorie des algèbres qui sont de dimension finie sur le corps de base ; parce que les espaces représentables correspondants sont les domaines des figures infinitésimales en X, on peut les appeler sites de Leibniz. L'importance de ces figures a été soulignée par Grothendieck et ses collègues en connexion avec les faisceaux tangents, les applications étales, etc. Deux propriétés fortes de cette catégorie par rapport à la catégorie beaucoup plus grande sont les suivantes : les formes de figure générale Y du grand site ont la propriété de Birkhoff relativement aux inclusions $L(X) \to X$ du noyau de Leibniz de tout X ; à savoir Y perçoit ces inclusions comme des épimorphismes au sens où une application infinitésimale $L(X) \to Y$ peut être intégrée d'une façon au plus à une application $X \to Y$. (Cela signifie que l'algèbre des fonctions à valeur Y sur X est une sous-algèbre d'un produit d'algèbres spéciales très petites.). L'autre propriété forte (dont on trouve des traces chez Euler) est que tout sous-topos de l'ensemble qui contient les objets de Leibniz contiendra tous les objets Y du grand site (affine) ; cela découle du fait qu'il y a suffisamment d'espaces de fonctions infinitésimaux pour engendrer ce grand site, par exemple, la ligne est une rétraction de l'auto-exponentielle du domaine des nombres duaux. On peut facilement extraire la sous-catégorie des espaces localement affines, c'est-à-dire les schémas algébriques.

La description ci-dessus d'un topos de Grothendieck d'espaces algébriques sur un corps de base semble fonctionner aussi bien pour un semi-anneau de base. Il a été démontré en détail que cela fonctionne pour les géométries lisses par Wraith, Kock, Reyes, Moerdijk, Bunge, Dubuc, Gago, Lavendhomme, et d'autres. Certaines versions sont susceptibles de fonctionner également pour la géométrie analytique.

En effet, le domaine de l'analyse / géométrie complexe est très avancé depuis 1960 et devrait avoir de nombreuses implications et clarifications des topos. Par exemple, la relation entre le théorème de l'image directe de Grauert comme relativisation de son cas particulier par Cartan-Serre devrait être clarifié par une topos-relativisation explicite. Quand j'ai proposé cela à Grothendieck, il a admis que c'était intéressant, mais a plaidé que son expertise en logique était insuffisante pour fournir une preuve. Plus récemment, l'étude des espaces Brady-hyperbolique a une très forte saveur de topos qui n'a pas encore été rendue explicite (pour autant que je le sache).

Grothendieck a apporté une contribution importante à ce qu'il a appelé la "topologie apprivoisée". Il n'a donné aucune définition générale, mais a insisté (comme je l'avais fait lors de mes exposés à Milan en 1977) sur la découverte de catégories adéquates qui ne contiendraient pas certaines anciennes pathologies qui avaient fait leur retour en cohomologie. À mon avis, les objets tels que les courbes qui remplissent l'espace auraient dû amener une "critique des fondements" plus centrale que les soi-disant paradoxes ; cependant, elles ont apparemment simplement été tolérées pendant de nombreuses décennies, avec une certaine résignation selon laquelle la complexité est inévitable. Mais Grothendieck a hardiment proposé d'utiliser les connaissances accumulées pour construire des catégories moins pathologiques qui suffiraient pour le travail mathématique. Il est arrivé à une proposition impliquant des fonctions réelles-analytiques par morceaux. Pendant ce temps, des logiciens, dont Wilkie, Pillay, MacIntyre et van den Dries, avaient étudié un problème connexe de Tarski, formulé en termes de décidabilité. Ils l'ont résolu en 1986, trouvant également que "l'analyse réelle par morceaux" était un ingrédient-clé, bien que n'étant pas le seul. Ces logiciens ont fini par reconnaître le travail de Grothendieck comme étant lié au leur. On doit attendre inversement le moment où le travail de leur école o-minimale éclairera l'étude plus profonde de l'espace cohésif.

Le travail de Grothendieck a illuminé et fait progresser le travail de Cantor, Grassmann, Volterra, Hausdorff, Hurewicz, Galois, Kan, Eilenberg et Mac Lane et inspiré notre communauté entière ; il continuera d'inspirer et d'orienter les travaux des générations futures.

Commentaires sur le développement de la théorie des topos
F. William Lawvere

Présentation

Résumant quelques points dans le développement de la théorie élémentaire des topos dans ses 30 premières années 1970-2000, cet article historique prépare le lecteur à la publication ultérieure de l'Éléphant de Johnstone (2002) et aux propres avancées de l'auteur lui-même vers des fondements améliorés de la géométrie algébrique dans l'esprit de Grothendieck, mais en utilisant les outils de la logique catégorique et en prenant en compte le thème de la cohésion axiomatique.

Addendum

Un fait important devrait être noté. Il m'était inaccessible au moment d'écrire cet article historique. Il concerne l'origine du concept d'espace fonctionnel qui incarne maintenant l'exemple topologique basique d'une catégorie fermée cartésienne. J'ai cité sept contributeurs à ce sujet à la fin de la section 4. Plus tard, quand j'ai téléphoné à David Gale pour l'interroger au sujet de son article de 1950, il m'a informé qu'en effet, c'était lors de cours à Princeton à la fin des années 1940 que Witold Hurewicz définit et utilisa la notion des k-espaces pour présenter sa solution du problème qu'il avait posé à Fox (et que Fox avait résolu pour le cas séquentiel dans le travail cité ici). Il semble que c'est (directement ou indirectement) Hurewicz qui par cet exemple a inspiré les six autres travaux cités ici.

0. L'outil catégorique appliqué à la géométrie algébrique amène à la naissance des topos

L'unification et la simplification sont nécessaires non seulement pour la dissémination des résultats, mais également pour une avancée cohérente de la recherche dans les différentes branches des mathématiques. Le besoin d'unification et de simplification pour rendre cohérent quelques-unes des nombreuses avancées mathématiques des années 1930 ont amené Eilenberg et Mac Lane [23] à concevoir la théorie des catégories, les foncteurs et les transformations naturelles au début des années 1940. Il est utile de distinguer les catégories générales des catégories linéaires dont l'étude explicite a commencé avec Mac Lane en 1950 [78].

"Les catégories combinant linéarité et exactitude, connues sous le nom de catégories "abéliennes" ont été perfectionnées dans les années 1950 et au début des années 1960. Cette théorie continue de profiter à de nombreuses applications, par exemple à travers l'utilisation des catégories dérivées en analyse. Une étape fondamentale, à mi-chemin de ce développement, a été l'article Tohoku de Grothendieck [42], qui a montré que cette base conceptuelle pour l'algèbre homologique sur un anneau s'applique aussi aux objets linéaires variant comme des faisceaux sur un espace. Ensuite, le fait que les concepts d'exactitude s'appliquent aussi à de nombreuses catégories non-linéaires est devenu graduellement plus connu et utilisé. Le concept des foncteurs adjoints, découvert par Kan (au milieu des années 1950) fut rapidement incorporé comme un élément-clé dans les fondements par Grothendieck de la géométrie algébrique [1] et les nouveaux fondements catégoriques de la logique et de la théorie des ensembles [70, 71]. Grothendieck, et son cercle à l'Institut des Hautes Études Scientifiques près de Paris, a développé au début des années 1960 le concept de topos pour son utilisation en géométrie ; je proposai une simplification de ce concept et des usages supplémentaires à l'Istituto di Alta Matematica à Rome en 1969. Après ce développement initial en 1969-70 en collaboration avec le topologue algébriste Tierney (qui avait indépendamment donné des

Publié initialement dans Développements des mathématiques 1950 - 2000, édité par J-P Pier, pp 715-734, Birkhäuser, Bâle, 2000.
Reçu par les éditeurs le 15 janvier 2014.
Transmis par M. Barr, R. Rosebrugh, et R.J. Wood. Réimpression publiée le 22 mai 2014.
2010 Classification des sujets mathématiques : 03G30, 18B25.
Mots et groupes de mots clefs: topos, théorie des catégories, faisceaux.
Université de l'état de New York à Buffalo

cours sur le besoin de théorie axiomatique des faisceaux), cette théorie des topos simplifiée a été présentée au Congrès International des Mathématiciens à Nice [72]. Des développements plus avant de cette proposition ont amené de nombreux articles et livres mais malgré ces publications, beaucoup d'étudiants ont trouvé difficile de comprendre ce qu'est la théorie des topos, d'où elle vient et où elle va. L'espoir est que la description qui en est brossée ci-après aidera à surmonter cette difficulté.

L'axiome de puissance ensembliste, qui définit les topos parmi les catégories, est présenté en détail dans la section 4 ci-dessous.

Puisque je ne peux fournir ici une description pas à pas, je me concentrerai sur les idées mathématiques, à la fois comme guides pour ceux qui veulent apprendre et développer ces idées, et aussi comme une aide pour ceux qui veulent rechercher les dates et publications. Je souhaite être excusé pour les inévitables omissions. Des versions préalables de cet article ont été lues par Barr, Gabriel, Freyd, Johnstone, Kock, Mac Lane, Ramachandran, Schanuel, et Street, dont les commentaires sont très appréciés.

1. L'analyse fonctionnelle et la topologie algébrique ont besoin d'une maison commune avec un cadre flexible

Le cœur des théories mathématiques est dans la variation de quantités dans l'espace et dans l'émergence de qualité à l'intérieur de ce phénomène. Les branches fondamentales (comme la géométrie différentielle et la théorie de la mesure géométrique) ont donné naissance à (et ont utilisé intensivement) ces deux grandes disciplines que sont la topologie algébrique et l'analyse fonctionnelle. Un grand élan à leur cristallisation a été la théorie électromagnétique de Maxwell-Hertz-Heaviside et les matériaux scientifiques de Maxwell-Boltzmann. Ces deux disciplines ainsi que ces applications ont été rendues explicites très tôt dans le travail de Volterra. Comme cela a été souligné par de Rham à l'attention de Narasimhan [88], c'est Volterra qui, dans les années 1880, non seulement démontra que l'opérateur extérieur de dérivée satisfait $d^2 = 0$, mais prouva également le théorème d'existence locale auquel il est habituellement fait référence de manière erronée en l'appelant le lemme de Poincaré ; ces résultats restent le cœur de la topologie algébrique comme cela est exprimé dans le théorème de de Rham et dans la cohomologie des faisceaux. La théorie de Volterra des fonctions de lignes, présentée lors de ses exposés à Paris en 1912 et ensuite appelée analyse "fonctionnelle", a été développée assez effectivement par ses étudiants et par Silva et Zorn (comme souligné par Fichera dans [26]), en prenant des ensembles ouverts et des ensembles fermés non comme primitives, mais comme dérivées d'une structure plus fondamentale. Dans la période 1950-1985, cette forme de l'analyse fonctionnelle a été largement négligée, mais elle a été revivifiée dans les années 1980 lorsque quelques-uns de ses problèmes-clefs ont été résolus et ses applications à la physique en dimension infinie ont été réactivées par le travail explicitement catégorique de Kriegl et de ses collaborateurs Frölicher, Nel, et Michor [32], [65], [67], et dans le travail explicitement topos-théorique de Penon, Dubuc, et Bruno [92], [22], [6]

En effet, dans un certain sens, le travail récent en théorie des topos réunit finalement organiquement ces deux brins de Volterra (la topologie algébrique et l'analyse fonctionnelle covariante expliquées ci-après), brins qui avaient longtemps été entremêlés dans :

- le travail de Grothendieck sur les espaces nucléaires [41] et sur les duaux holomorphiques [40] ;

- les résultats de Grauert-Cartan-Serre [38], [13] sur les faisceaux analytiques cohérents (dans lesquels, comme Houzel et Douady l'ont exprimé plus explicitement dans les années 1970 [50], [20], l'analyse fonctionnelle nucléaire bornologique joue un rôle pour établir la finitude de certains nombres de Betti "algebrico-topologiques") ;

- l'approche micro-fonctionnelle de Sato-Kashiwara [59] de la théorie des ondes.

2. Un cadre logique est d'abord développé pour la logique et la théorie des ensembles

Malgré son origine géométrique, la théorie des topos a dans les dernières années parfois été perçue comme une branche de la logique, en partie à cause de ses contributions à la clarification qu'elle avait permise de la logique et de la théorie des ensembles. Pourtant, l'orientation de nombreux théoriciens des topos pourrait peut-être être résumée plus précisément par l'observation que ce qui est habituellement appelé logique mathématique peut être vu comme une branche de la géométrie algébrique, et qu'il est utile de rendre cette branche explicite en elle-même. Les exemples centraux étudiés par les premiers théoriciens des modèles Birkhoff [5], Tarski [100] et Robinson [94] montrent que la géométrie algébrique en est plutôt l'origine historique, et les avancées faites dans les 15 dernières années par leurs successeurs van den Dries [21], Macintyre [77], et d'autres montrent de façon flagrante la valeur persistante de la géométrie. La logique catégorique montre simplement de façon systématique qu'il n'y a pas besoin d'une terminologie et d'une notation logique séparées, spéciales, puisque l'implication et les quantificateurs sont des foncteurs adjoints de sortes que l'on trouve plus généralement dans les catégories d'ensembles non pré-ordonnés. (Spécifiquement, l'implication est le cas poset de la transformation de l'espace de fonctions qui est fondamental en analyse fonctionnelle, comme cela a été observé par Curry; et la quantification est l'application particulière, aux foncteurs de valeurs de vérité, de l'extension générale de Kan induite par le changement de domaine ([60]). De plus, les modèles eux-mêmes sont des foncteurs [69], puisque ce que les "théories" syntaxiques présentent est plus efficacement vu comme une certaine sorte de petite catégorie. Cette observation a été faite par Makkai et Reyes [83], après des contributions cruciales par Barr concernant les catégories régulières [2] et l'existence de points à valeurs booléennes [31]. Le travail de Joyal [56] et Freyd [30], tournant autour de la découverte, vers 1972, du fait que le théorème de complétude de la logique du premier ordre est une conséquence du théorème de Deligne [17] qui affirme l'existence de points pour les topos cohérents, a également joué un rôle important.

Mais il y a un raffinement clef, par rapport à la logique mathématique booléenne "classique", qui est forcé par la reconnaissance explicite (que la théorie des topos décrit) de la nature cohésive et variable des ensembles. Pour les personnes travaillant en géométrie algébrique et en analyse, il peut apparaître quelque peu excessif de faire un détour par le langage élaboré de Mitchell-Bénabou qui à son tour nécessite la sémantique de Kripke-Joyal pour obtenir en retour le contenu mathématique d'un topos spécifique. (Cette procédure parfois recommandée est strictement analogue au fait de définir un groupe comme étant le quotient du groupe libre qu'il a engendré lui-même, ce qui de façon analogue peut parfois être utile.). La clause-clef, dans cette sémantique, était présupposée dans le titre "*Quantificateurs et faisceaux*" [72], mais le cas linéaire était un théorème dans Godement 1958 [37], et exprimait par exemple, juste en termes de concepts du 20$^{\text{ème}}$ siècle, le contenu du théorème d'existence locale de Volterra. Brièvement,

a) la règle d'inférence pour la quantification existentielle est juste une expression symbolique de la propriété universelle de l'image géométrique d'une application (pas seulement dans la catégorie des ensembles où l'axiome du choix tient, mais également dans n'importe quel topos) tandis qu'

b) une figure dans une telle image vient en fait seulement localement des images dans le domaine de l'application.

Par exemple, l'image de l'application exponentielle complexe est le plan entier privé d'un point, mais les logarithmes complexes n'existent que localement. Ce théorème d'existence locale serait trivial si tous les objets étaient projectifs, comme l'axiome du choix le nécessiterait. Longtemps avant ce cadre logique, l'expérience mathématique d'utiliser les faisceaux en géométrie et analyse avait produit de nombreuses définitions correctes qui étendaient les concepts des constantes aux variables réelles (et Bénabou [4] et Joyal [56] avaient formalisé cette idée). Par exemple, le concept d'anneau local (Hakim [48]), le concept d'algèbre bornologique convexe multiplicativement (Houzel [49]) et de nombreux autres exemples ont été faisceautisés en insérant la phrase "il existe un recouvrement sur lequel..." juste au bon endroit dans la définition. De la même façon, Grothendieck et d'autres reconnaissaient de façon infaillible quelles sortes de structures étaient "préservées par tous les foncteurs qui préservent les limites finies et les colimites arbitraires". (Une liste très impressionnante fut produite par Grothendieck [47] durant son séjour en 1973 à Buffalo; durant cette même visite, il plaida pour l'abandon de sa définition précédente compliquée de "schéma", mais malheureusement, l'alternative plus simple qu'il proposa ne semble pas avoir trouvé son chemin dans les livres). Pourtant, les mathématiciens moins expérimentés ont trouvé utile une présentation explicite de la logique positive qui formalise ces définitions et ces classes de structures.

Le rôle fondamental de la logique positive (aussi connue sous le nom de logique cohérente ou logique géométrique) suggère un raffinement de la présentation standard de la logique des prédicats. Les prédicats sont des cadres pour les sous-objets, et la possibilité basique, pour deux sous-objets d'un même objet (ou l'univers du discours), que le premier soit inclus dans le second, est logiquement l'assertion qu'un prédicat en implique un autre. Dans un topos, les sous-objets d'un domaine donné forment un treillis distributif, reflétant logiquement en termes de conjonction et disjonction les opérations sur les prédicats, satisfaisant des relations d'adjonction adéquates (les règles d'inférence) relatives à l'implication. L'implication, la conjonction finie, et la disjonction sont préservées par la substitution selon une application de changement de (nom de) domaine arbitraire. La substitution signifie l'image inverse de sous-objets, une opération qui a l'"image" comme adjoint à gauche ; la dernière est connue logiquement comme quantification existentielle le long de l'application. La logique positive n'exclut pas explicitement la plus haute opération de quantification universelle (ni ses cas particuliers d'implication ou de négation) même si les adjoints à droite à la substitution interne sont aussi présents dans tout topos, parce que ces adjoints à droite ne sont typiquement pas préservés par la substitution plus générale dans une application arbitraire continue entre topos. En effet, ces applications continues bénéficiant d'une telle préservation additionnelle (de la logique du premier ordre avec quantificateurs alternés) sont juste les applications continues. Ainsi, bien que dans la logique du premier ordre, l'implication entre deux prédicats puisse être affirmée de façon équivalente en disant que leur implication quantifiée universellement a la propriété d'être "nulle part vraie", en logique positive, les relations fondamentales restent les implications binaires, une pour chaque domaine (incluant les produits cartésiens des domaines de base). D'un point de vue positif, l'élimination des quantificateurs est liée à la définissabilité des quantificateurs, au sens où quelques théories favorisées ont des axiomes suffisamment forts pour permettre carrément la définition de la quantification universelle (e.g. l'implication et la négation) en fonction des opérations positives. Pourtant, si nous nous restreignons aux topos booléens, la logique positive est juste aussi expressive que la logique du premier ordre, en autorisant des prédicats additionnels ; notamment, chaque occurrence d'une formule négative dans un axiome peut être vue comme un nouveau prédicat primitif, caractérisé par deux axiomes du treillis comme complémentaire approprié.

L'expression "topos élémentaire" est un reliquat, qui porte à confusion, de la relation à la logique, le terme "élémentaire" ayant été utilisé par certains logiciens comme synonyme de "premier ordre". L'origine de cette expression réside dans le fait utile que le concept de topos au sens de Lawvere-Tierney est définissable dans un langage logique bien plus profondément que dans le langage infini du premier ordre utilisé à l'origine par Grothendieck et ses étudiants. (De façon interne, tout topos permet l'interprétation de concepts du premier ordre, comme expliqué ci-dessous, mais c'est un autre sujet). Mais en fait, ce langage externe nécessaire est vraiment très éloigné de celui du premier ordre, étant essentiellement équationnel, même les opérateurs logiques nécessaires à ce niveau seulement pour définir les classes spéciales de topos (comme les topos à deux valeurs ou les topos satisfaisant l'axiome du choix).

3. Espaces à paramètres et topos de Grothendieck relatifs au topos de base

Les topos originaux de Grothendieck peuvent être situés [18] dans la classe plus large (des topos au sens "élémentaire") en utilisant un cas particulier du concept de relativisation de Grothendieck, de la façon suivante : une application continue (ou un morphisme géométrique) d'un topos à un autre est un foncteur avec un adjoint exact à gauche. Pour un topos fixé S, un S-topos est un topos équipé d'une application continue vers S et présenté de façon liée comme une catégorie S-cocomplete ; une application de S-topos est un triangle adéquat quasi-commutatif d'applications continues de sommet inférieur S (ce qui implique que l'adjonction, dans l'application entre les deux topos, est elle-même définie sur S). Alors si S s'avère être un univers d'ensembles abstraits, la catégorie des S-topos est équivalente à celle des S-topos au sens de Grothendieck. Dire qu'un topos est un univers d'ensembles abstraits consiste à dire que, pour des objectifs mathématiques, il satisfait des propriétés supplémentaires de 2-valuations et l'axiome du choix (ce qui implique que tous ses treillis de sous-objets sont booléens) ; des axiomes de forte infinité peuvent aussi être imposés à S si besoin, parce qu'ils sont aussi des invariants catégoriques. Pourtant, le programme persiste de refonder les mathématiques relativement à un topos de base arbitraire qui satisfait des contraintes plus faibles. Les théorèmes dans une telle refonte des mathématiques (en plus d'avoir des preuves plus explicites) ont souvent un contenu d'effet plus général que les théorèmes classiques et sont stables sous des variations adéquates continues des paramètres, quand S est un topos de faisceaux sur l'espace des paramètres. De plus, des assertions plus simples peuvent être fournies si le matériau intervenant dans la définition de ce S particulier peut être supprimé. En d'autres termes, une référence à des classes "petites" peut souvent être interprétée dans un sens plus large que seulement dans un sens simplement quantitatif, puisqu'être paramétrable par un objet de la base S peut être en fait une qualité riche.

Existe un théorème [18] selon lequel tout S-topos peut être reconstruit de S par un zigzag à trois étapes.

D'abord, des paramètres additionnels sont ajoutés d'un S-objet choisi, amenant un homéomorphisme local $S' \to S$, i.e. une application continue dont le foncteur inverse préserve effectivement la construction des puissances d'ensembles ; deuxièmement, une "surjection" localement connexe $S' \to S''$, i.e. une application continue dont le foncteur d'image inverse a un S-adjoint sur la gauche et est fidèle, ajoute l'action (parmi les niveaux de paramètres) d'une S-catégorie interne ; et finalement, une "inclusion" $S''' \to S''$, i.e. une application continue dont le foncteur en arrière est plein et fidèle, est restreinte aux objets de S'' qui sont compatibles avec une forme spécifique de recouvrement. La dernière étape consiste à exiger que les objets de S''' satisfassent des axiomes particuliers disjontifs et existentiels selon la forme qu'ils héritent de S''. Ce théorème élémentaire inclut comme cas particulier le théorème caractérisant les topos de Grothendieck via des faisceaux d'ensembles sur les petits sites généraux. L'importance de faire de la théorie des topos sur un topos de base général S (même si S est restreint à être un topos de Grothendieck, c'est-à-dire même si l'on n'est pas concerné par l'analyse non-standard, les résultats d'indépendance en théorie des ensembles, ou la théorie de la récursion d'ordre plus élevé), est assez analogue à l'importance, déjà soulignée par Grothendieck, de faire de l'algèbre commutative sur un anneau de base arbitraire ; la comparaison des ensembles à plus de variables avec ceux à moins de variables émerge et est similaire à la comparaison analogue sur les quantités variables.

Une autre caractérisation conceptuelle des S-topos est que ce sont des objets lex-total dans le domaine de grandes catégories S-paramétrées [98], [99]. Ici, une telle catégorie est dite totalement cocomplète si son plongement de Yoneda a un adjoint à gauche. Cette notion, due à Street et Walters [99], a des applications, décrites par Kelly [62].

"La notion d'une famille d'espaces paramétrée par un espace est plus efficacement traitée par les géomètres via une application unique vers l'espace des paramètres : les espaces dans la famille sont les fibres de l'application ; la relativisation par changement de base de Grothendieck s'applique dans tout topos donné pour amener, pour un objet donné, un nouveau topos de familles paramétré par cette base donnée. L'opération de somme (ou total) d'une famille peut seulement signifier l'adjoint à gauche de l'inclusion des familles constantes, i.e. au changement de base près ; dans ce cas, l'adjoint à gauche est simplement le foncteur qui oublie l'application qui dit comment le tout est distribué sur la base. Cette signification tautologique des sommes est assez efficace habituellement en mathématiques puisque les familles que l'on obtient ne sont pas arbitraires, mais sont habituellement a priori bornées. La même idée s'applique en théorie des ensembles, excepté que cette quête d'ordinaux encore plus grands amène la question de l'existence de familles arbitraires de petits ensembles indexés par un petit ensemble. Il y a deux sortes de réponses à cette question sous la forme d'axiomes de grands cardinaux : si par familles, on entend les familles définissables dans le langage du premier ordre dont les quantificateurs alternés parcourent la catégorie des ensembles que nous sommes en train de décrire, alors l'affirmation de leur existence est essentiellement équivalente au schéma de remplacement, de telle façon que la catégorie est équivalente à une catégorie dérivée d'un modèle de théorie des ensembles complète de Zermelo-Fraenkel. (L'inverse de l'équivalence est l'interprétation classique de Specker des "ensembles" ZF comme structures ressemblant à des arbres, également décrite dans l'appendice à certaines éditions des SGA4.). D'un autre côté, si par familles, on entend familles "arbitraires" (on peut donner à cela une interprétation rationnelle en imaginant notre topos comme étant un objet d'une catégorie spéciale dans un autre topos "plus grand"), alors l'affirmation qu'ils sont chacun dérivables comme fibres d'une application unique dans notre topos est équivalente à la propriété d'"univers de Grothendieck" : notre topos est équivalent à un objet catégorie qui a une cardinalité fortement inaccessible au sens du topos plus grand. L'inaccessibilité forte est habituellement définie en termes d'existence de produits de petites familles de petits ensembles, mais cela découle du fait que notre topos a des espaces d'application parce que le "produit" des familles de fibres d'une application est juste l'ensemble des sections de l'application. Bien sûr, le foncteur produit est défini comme étant l'adjoint à droite de l'inclusion des familles constantes, i.e. à changement de base près. Puisque l'adjoint à droite existe pour tout topos (où, pourtant, il consiste en les sections qui sont lisses au sens où elles sont elles-mêmes les applications dans le topos), on continue à l'appeler le produit infini et même à le noter Π ; il ne fait aucun doute qu'il n'est pas fortuit que Weil ait utilisé plus tôt Π pour noter un cas particulier de cette construction qui émerge en géométrie algébrique.

4. Espaces de fonctions et ensembles de puissance cohésive

L'avancée majeure dans la formulation du concept de topos par Lawvere-Tierney après celle de Grothendieck-Giraud est la reconnaissance explicite de la représentabilité interne des ensembles de puissances (même dans les catégories d'ensembles non abstraits comme les ensembles cohésifs ou les ensembles de variables). Ainsi la puissance exploitée par Cantor, Dedekind, et Hausdorff et d'autres pionniers dans le cas des ensembles abstraits est devenue disponible également pour une utilisation directe en géométrie et analyse. Les applications continues (ou les morphismes géométriques) dans la 2-catégorie des topos ne préserve pas nécessairement sa structure centrale modulo un isomorphisme, mais seulement modulo une application naturelle. (Ce phénomène de "relâchement" serait étrange pour des catégories ordinaires, mais il est commun pour les autres 2-catégories, telles que les catégories fermées). Parce que les ensembles de puissances sont des objets injectifs, leur algèbre peut fidèlement refléter la géométrie (comme cela a été montré en détail dans la thèse de Mikkelsen [84]) ; inversement, la plupart des topos n'ont pas assez d'objets projectifs, ce qui implique que la règle de commutation pour la quantification existentielle interne, comme souligné en (a) et (b) à la section 2, est vraiment nécessaire pour faire avancer les calculs. La manière dont la simple existence du foncteur de puissance ensembliste implique les propriétés nécessaires des topos a été montrée de manière élégante par Paré [91]. Depuis, la définition plus simple des "topos" a été "categorie avec ensemble de puissances".

La construction d'ensemble de puissances peut être utilement vue comme divisée en deux parties : d'abord, il y a une construction d'un espace d'application (discuté ci-dessous) qui est essentielle pour le calcul des variations et pour l'analyse fonctionnelle en générale (et pour la physique continue), mais qui lorsqu'elle est appliquée à un codomaine spéciale amène l'espace de l'ensemble des puissances de l'espace du domaine. (En géométrie différentielle synthétique [64], avec son application projetée dans la dynamique continue [73,74], l'application de la construction de l'espace de fonctions aux domaines spéciaux, infinitésimaux, amène le foncteur fibré tangent et le foncteur fibré supérieur[1] qui est d'une forme très facile à manipuler.).

Deuxièmement, le domaine spécial, spécifiquement un espace de valeur de vérité ou un classifieur de sous-objets, est supposé. Cela "objectifie le subjectif" dans le sens où cela postule l'existence d'un objet qui paramètre parfaitement les valeurs de vérité des jugements de la forme "telle et telle figure appartient à tel et tel sous-objet de son codomaine". Par une méthode bien comprise par les pionniers de la théorie des ensembles et formalisée pour les topos généraux par Freyd en 1972 [31], cela implique en retour (si le topos contient au moins un objet qui n'est pas Dedekind-fini) que le processus subjectif d'itération peut aussi être parfaitement paramétré (par une algèbre de Peano absolument libre ; la méthode utilise le fait que la classe de toutes les sous-algèbres contenant un point donné est paramétrable et que toute classe paramétrable de sous-objets d'un objet donné a une intersection, ces deux faits découlant aisément de la propriété universelle des ensembles de puissances). Mais en retour, la paramétrabilité de l'itération complète implique quelques conséquences physiquement contre-intuitives comme la courbe remplissant l'espace de Peano et des conséquences méthodologiquement gênantes comme le théorème d'incomplétude de Gödel. Grâce à un travail détaillé récent de van den Dries [21] et d'autres, une sorte de travail qui avait été en partie prévu par Grothendieck dans une discussion que nous avions eue en janvier 1982), il est maintenant connu que de telles conséquences peuvent être dérivées de cette manière : un topos adéquat peut être engendré par une sous-catégorie qui contient suffisamment d'espaces et d'applications raisonnablement géométriques, mais qui ne contient pas les algèbres infinies discrètes de Peano ; bien que ces dernières apparaissent comme sous-objets (des espaces géométriques) définis par les équations de vérité, elles ne peuvent pas être définies par des équations valuées dans des espaces dans la catégorie géométrique elle-même.

La première partie de la construction de l'ensemble de puissances, la notion d'espace d'applications, a semblé objectivement inévitable depuis que Bernoulli et d'autres ont développé le calcul des variations. Notamment, si un intervalle de temps, un corps, et un espace ordinaire peuvent être modélisés comme objets d'une catégorie, alors l'espace de tous les chemins dans l'espace, paramétré par l'intervalle de temps dans les chemins autorisés par la catégorie, devrait aussi être un objet, comme devrait l'être l'espace de tous les déplacements autorisés du corps dans l'espace. Alors la quantité qui dépend de la position, comme l'énergie potentielle, ou bien une quantité qui dépend du chemin, comme la vitesse au carré, pourraient être traitées comme une autre application dans la catégorie. Ainsi les trois descriptions d'un mouvement comme un chemin dans l'espace des positions, une position dans l'espace des chemins, ou simplement une application sur l'espace ordinaire d'un espace de couples (particule, instant) sont toutes équivalentes et en effet, l'équivalence (pour tous ces trois objets dans le topos) est l'axiome définissant l'espace des applications comme foncteur adjoint. Typiquement, il y a une notion adéquate de "chemin" généralisé, de telle façon qu'une fonction admissible est juste une fonction qui envoie les chemins sur les chemins de

[1]higher jet bundle

façon covariante ; ceci était un concept-clé de l'école de Volterra en analyse fonctionnelle [24]. Le fait que les espaces d'applications respectant ce simple axiome d'adjonction ne soient pas généralement présents dans la catégorie habituelle des espaces topologiques avait déjà été remarqué par Fox [27], Kelley [61], Brown [8], Spanier [96], Steenrod [97], et Day [16] et plus tard par Frölicher [32], tous ayant proposé des catégories plus ou moins orientées chemins pour réaliser cette construction fondamentale.

5. Quelques classes d'exemples

Comment construire des exemples de topos ? Bien sûr, les faisceaux d'ensembles sont nécessaires comme base pour les catégories de faisceaux abéliens sur des espaces analytiques ou algébriques particuliers comme ont pu les traiter Leray, Oka, Cartan et Serre. En effet, c'est un axe de développement intensivement poursuivi aujourd'hui dans les équations différentielles partielles, mais pour connaître l'histoire de ce domaine, je renvoie à Gray [39] et Houzel [51]. Classiquement, un faisceau sur un espace est un foncteur contravariant (avec condition de recollement) sur un ensemble partiellement ordonné de régions de l'espace. Mais les topos de foncteurs à valeurs sur des ensembles qui ne sont pas partiellement ordonnés sont plus typiques. Considérons par exemple le topos des ensembles simpliciaux qui a été utilisé de manière très répandue en topologie algébrique depuis 1950, et dont le rôle classifiant particulier est expliqué dans Mac Lane et Moerdijk [81] ou bien le topos des foncteurs des anneaux vers les ensembles qui a été la base de la définition simplifiée par Cartier [14] des groupes algébriques et qui a été le précurseur de presque toutes les constructions de modèles particuliers de la géométrie différentielle synthétique [73, 87]. Un traitement détaillé d'un topos de cette sorte qui contient tous les espaces analytiques comme sous-catégorie pleine a été fourni par Grothendieck dans le séminaire de Cartan sur les familles d'espaces analytiques de 1960 [43], même avant que la définition générale par Grothendieck des topos n'ait été cristallisée par Giraud en 1963 [36].

A une position de généralité intermédiaire entre le topos d'espaces généraux et le topos de faisceaux sur un espace classique particulier, on trouve l'idée de topos de faisceaux sur un espace généralisé ; on connaît mieux le fait que les faisceaux sur une sorte particulière d'espace, sur lequel le théorème de fonction implicite ne s'applique pas, ne sont pas complètement déterminés par leur restriction à des sous-régions. Le fait que le théorème de fonction implicite ne s'applique pas en géométrie algébrique est devenu une vertu par la construction brillante de Grothendieck du topos étale d'un espace algébrique, basé sur un site particulier qui n'est pas un espace partiellement ordonné bien qu'il soit encore assez spécial. L'idée est encore plus ancienne d'un espace généralisé équipé non seulement d'un ensemble partiellement ordonné de régions ouvertes, mais également d'une action par les homéomorphismes d'un groupe. Cette catégorie amène à une 2-sous-catégorie de topos qui unifie très efficacement le développement complet qui a commencé avec la découverte par Hurewicz-Hopf de l'effet du groupe fondamental d'un espace sur son homologie [79], en fournissant un univers dans lequel l'espace, ses espaces couvrant, et le groupe fondamental lui-même sont sur un pied d'égalité et sont connectés par des applications, et pour lesquels la cohomologie de l'espace et du groupe sont strictement les instances de la même construction, notamment celle de la catégorie dérivée de l'abélianisation d'un topos. (Les actions d'un groupe sur les ensembles constituent les objets du genre le plus simples des topos booléens.) Les résultats de Joyal et Tierney [58] et de Joyal et Moerdijk [57] étendent ces idées pour donner un groupoide localique : la présentation du groupoide du topos général, un peu comme l'espace général, devrait classiquement être présentée comme le quotient d'un espace de dimension nulle ; comme Mac Lane et Moerdijk l'ont montré dans leur résumé utile du domaine [82], cette présentation étendue n'a pas encore été analysée ni non plus appliquée. Johnstone [54] en démontrant quelques théorèmes de représentation puissants concernant ces extensions de la notion d'espace généralisé, a en effet montré que le récit philosophique commun dans les années 1970 aux topos (basés sur la variation paramétrée et la logique interne) est trop restrictif, ce qui m'a amené dans cet article à baser mon récit sur les relations dialectiques entre la cohésion et la variation et entre la logique interne à un topos et interne à une catégorie de topos.

6. Quelques développements récents

Bien que le $25^{\text{ème}}$ anniversaire de la théorie “élémentaire” des topos (ainsi que le $50^{\text{ème}}$ anniversaire de la théorie des catégories elle-même) ait été célébré à Halifax en 1995, et bien que les fondamentaux en semblent bien établis dans de nombreux articles et livres précédemment mentionnés, de nouvelles avancées qualitatives continuent de voir le jour. Un tel exemple est le travail de Funk, et de Bunge-Funk et Bunge-

Carboni [33], [12], [11].

À la suite d'un exposé à Oberwolfach en 1966 dans lequel j'avais proposé une théorie des distributions (pas seulement dans mais également) sur les topos de préfaisceaux, en 1983 à Aarhus, j'ai posé quelques questions concernant les distributions sur les S-topos. La base de la définition et des questions est une paire d'analogies avec des théories connues (l'algèbre commutative et la théorie de la mesure) pour les quantités variables, couplée avec le fait qu'il y a d'importants exemples de "quantités" variables S-valuées dont les domaines de variation sont les S-topos. On prend les faisceaux sur le topos pour les quantités variant intensivement, i.e. simplement les objets de la catégorie. (Bien sûr, le terme topos signifie "lieu" ou "situation", mais Grothendieck traite la situation générale en traitant plutôt la catégorie des quantités S-valuées qui varient continument sur elle, de la même façon qu'un K-schéma affine est décrit en traitant la K-algèbre des fonctions sur lui. Peut-être que pour éviter la confusion, une notion différente aurait dû être utilisée, E pour la situation et $C(E)$ pour la catégorie des faisceaux sur E, mais la pratique notationnelle a utilisé le même symbole pour les deux, même si fonctoriellement, elles sont opposées de la même façon que X et $C(X)$ le sont en topologie classique. En topologie classique, il n'y a pas d'analogue strict, pour les fonctions continues réelles ou complexes $C(X)$, à l'opération spatial en avant adjoint à droite de l'homomorphisme f^* qui ramènent en arrière les fonctions continues le long d'une fonction continue générale f.). Ces quantités à valeurs sur des ensembles peuvent être ajoutées via des colimites S-paramétrées dans le topos, et elles peuvent être multipliées via les limites finies des faisceaux. Un point est juste une application continue vers le S-topos donné depuis S lui-même (qui est bien sûr l'objet terminal dans la 2-catégorie des S-topos); la partie image inverse du point (ou l'évaluation en le point) est un foncteur qui préserve à la fois l'"addition" et la "multiplication".

Ainsi nous poursuivons le début de l'analyse et définissons une distribution ou une quantité extensivement variable sur un S-topos comme étant une fonction continue linéaire ou un point généralisé, i.e. un foncteur vers S qui préserve les S-colimites, mais pas nécessairement les limites finies. Par exemple, étant donnée une petite catégorie C dans S, les actions à gauche de C sur les objets de S est un S-topos de fonctions dont la catégorie de distributions correspondante ou les processus d'intégration est juste la catégorie S-cocomplète des actions à droite de C sur les objets de S (par un cas particulier du théorème de Kan [60], [35]). Il est facile de voir que dans cet exemple particulier, où aucun recouvrement de Grothendieck n'intervient, la réponse à la question suivante est affirmative. Y a-t-il, pour tout S-topos donné E un autre topos $M(E)$ dont les points sont juste les distributions sur E ? Cette idée géométrique de l'espace de toutes les mesures sur un espace donné peut être décrite selon l'analogie de l'algèbre commutative comme algèbre symétrique, c'est à dire, pour une catégorie S-cocomplète adéquate, est-il toujours possible de lui adjoindre des produits finis (et plus généralement des produits fibrés) d'une manière libre compatible avec la distributivité pour obtenir une catégorie qui est la (catégorie des faisceaux sur) un S-topos ? Cette formulation relativise et renforce l'idée de $M(E)$, de telle façon que comme tous 2-adjoints, M est unique à équivalence près s'il existe.

La question de l'existence semblait sérieuse, puisqu'il est connu qu'il n'y a en général pas d'espace correspondant $F(E)$ des quantités intensives : alors qu'il y a un topos facile à décrire [104] $F(1) = S(X)$ sur S qui est l'"algèbre des polynômes" ou la "ligne affine" dans lequel les S-morphismes vers lui depuis tout S-topos E classifient précisément tous les faisceaux sur (les objets dans) E, des espaces de fonctions existent dans Top$/S$ seulement pour les exposants "localement compacts" E (i.e. seulement [55] pour les rétractions de topos cohérents). En 1995, Bunge a montré que $M(E)$ existe comme S-topos pour tout S-topos E, une preuve plus élégante ayant été donnée par Bunge et Carboni dans [11]

Quels exemples de distributions pouvons-nous nous attendre à trouver ? Pour tout S-topos localement connexe A, il y a par définition un adjoint à gauche de l'adjoint à gauche de l'application structurelle vers S ; cet adjoint à gauche supplémentaire ou foncteur d'"ensemble de composants reliés" est alors automatiquement une distribution sur A qui pourrait peut-être être pensée comme étant la mesure de comptage puisqu'elle est invariante sous tous les automorphismes de A (et même sous tous les endomorphismes essentiels de A). Maintenant, comme avec toute doctrine de quantité extensive, les distributions peuvent être envoyées en avant selon n'importe quelle application continue entre topos, en composant simplement ici le processus d'intégration avec la partie image inverse de l'application. Les résultats remarquables de Funk incluent le fait que toute distribution sur n'importe quel E est le push forward selon une application, pour un certain A localement connexe, de la mesure de comptage des composants sur A. Parmi tous ces A localement reliés sur E qui représentent ainsi une distribution donnée sur E, il y en a un unique le plus proche de E ; la relation de celui-ci en particulier vers E s'avère être, selon le travail de Bunge et

Funk, topos-théoriquement identique à celui de la propagation complète sur E, une notion découverte par Fox [28] dans son investigation topologique des recouvrements ramifiés. D'autres relations avec la topologie classique continuent d'être découvertes, par exemple la description par Plewe d'une large classe d'applications de descente comme triquotients au sens de Michael [93], [85], également présentée lors de la célébration à Halifax.

7. Depuis et vers la physique continue

Quel a été l'élan qui a nécessité la simplification et la généralisation du concept de topos de Grothendieck, si en effet l'application à la logique et à la théorie des ensembles n'étaient pas décisives ? Tierney avait souhaité que la théorie des faisceaux soit axiomatisée pour être utilisée de manière efficace en topologie algébrique. Ma propre motivation venait de mon étude initiale de la physique. Les fondements de la physique continue des matériaux, dans l'esprit de Truesdell, Noll, et d'autres, nécessitaient des idées physiques puissantes et claires qui avaient malheureusement été submergées par un appareil mathématique incluant non seulement les séquences de Cauchy et les mesures additives dénombrables, mais également des choix ad hoc de graphiques pour les variétés et de limites inverses des espaces de Hilbert Sobolev, pour obtenir pour atteindre les espaces nucléaires simples de quantités variant intensivement et extensivement. Mais, comme le regrettait Fichera [25], tout cet appareil fournissait souvent un ajustement très incertain aux phénomènes. Cet appareil pouvait s'avérer utile dans la solution de certains problèmes mais ne nécessitait-il pas que les problèmes eux-mêmes et les axiomes nécessaires soient exprimés d'une manière directe et claire ? Et cela ne pouvait-il pas mener à une solution plus simple et tout aussi rigoureuse ? Ce sont à ces questions auxquelles j'ai commencé d'appliquer la méthode des topos dans mes exposés en 1967 à Chicago [73], [74]. Il était clair qu'un travail sur la notion de topos elle-même serait nécessaire pour parvenir à ce but. J'ai passé l'année 1961-62 avec les logiciens de Berkeley, croyant qu'en écoutant les experts des fondements pourrait être le chemin à emprunter pour clarifier les questions des fondements. (Peut-être que mon premier professeur Truesdell avait eu une conviction similaire 20 ans plus tôt quand il avait passé une année [15] avec les logiciens de Princeton logicians.). Bien que ma croyance se tempère au fur et à mesure, j'ai acquis des connaissances à propos de constructions telles que le forcing de Cohen qui semblait également nécessiter une simplication pour qu'un plus grand nombre de personnes puissent la comprendre suffisamment pour la faire avancer davantage. Ainsi la théorie (comme je l'avais proposé à Rome en 1969, et expliqué à l'ICM de 1970) a été d'abord appliquée par Tierney [101] et Bunge [9] à des questions comme l'indépendance de l'hypothèse du continu et la conjecture de Souslin.

En effet, le rôle-clef de l'ensemble de puissance (et la non importance relative pour les mathématiques de l'espace et de la quantité du schéma de remplacement) avait clairement émergé d'une étude des nombreuses reformulations par Scott de la théorie des ensembles du milieu du siècle. Mais la découverte clef rapportée lors de l'exposé à Rome (après avoir été travaillé au Forschungsinstitut Eckmann à Zurich) a été que non seulement un foncteur de puissance ensembliste P existe de manière non ambigue dans un grand nombre de catégories émergeant mathématiquement, mais que toute topologie de Grothendieck, i.e. toute notion raisonnable de "recouvrement" préféré permettant une restriction aux objets "faisceaux" satisfaisant une disjonction supplémentaire ou des conditions "existentielles", est exprimable comme une seule application dans une telle catégorie, en effet comme un endomorphisme de l'objet-vérité $P1$ qui peut être considéré subjectivement comme un opérateur modal du type "il est localement vrai que...".

Cette observation, avec l'axiomatisation précédente de l'adjoint des espaces de fonctions, a rendu clair le fait qu'en travaillant au niveau des topos, presque toutes les constructions et assertions nécessitent seulement un langage équationnel algébrique essentiellement finitaire pour la formalisation, les langages d'ordres supérieurs infinitaires avec alternances de quantificateurs de Frege externes n'étant pas nécessaires, non seulement pour les axiomes de la théorie générale d'un topos, mais également pour particulariser de nombreuses sortes très spéciales de topos, comme celles qu'on trouve en combinatoire et en géométrie différentielle.

L'opérateur de négation-de-la-négation dans la logique de Heyting a été facilement vu comme satisfaisant l'axiome de Lawvere-Tierney et est ainsi un exemple particulier de topologie de Grothendieck valable dans tout topos, il n'est pas seulement central à des constructions qui "forcent" des résultats d'indépendance en théorie des ensembles et qui extraient la partie minimale dense [52] d'un espace en topologie qui consiste en les sous-corps substantiels [89], [74] en physique continue (tous ceux-ci intervenant juste dans le cas d'un topos avec site partiellement ordonné), mais il permet une formulation très succincte de la condition qu'un topos satisfait le Nullstellensatz de Hilbert, exprimant le rôle important de la théorie de Galois en dimension zéro dans la géométrie algébrique comme un tout. Notamment, les faisceaux pour la double négation, qui dans un certain sens forment la partie booléenne d'un topos arbitraire, constituent, dans le cas d'un topos engendré tous les espaces algébriques définis sur un corps de base donné, le topos classifiant des corps d'extension algébrique de la base (ce sous-topos est peut-être une entité plus traitable que la fermeture algébrique qui existe seulement comme condensation rigidifiée non canonique). Le Nullstellensatz concerne ces quelques topos dans lesquels tous les objets non vides ont des figures zéro-dimensionnelles, i.e. ces points dont les domaines sont les compagnons dialectiques de tels faisceaux booléens [75].

Quelques aspects géométriques du programme de 1967, tels que le rôle des espaces d'applications des objets infinitésimaux, furent travaillés sous le nom de géométrie différentielle synthétique par Wraith [104], Kock [64], Reyes [87], Bunge et Gago [10], Dubuc [22], Yetter 105], Penon [92], Bruno [7], Moerdijk [87] et d'autres. Quelques livres traitant de la théorie des topos simplifiés (Mac Lane et Moerdijk étant le texte le plus récent et le plus lisible) avec les trois excellents livres de géométrie différentielle synthétique [64], [87], [68] fournissent une base solide sur laquelle un traitement plus avancé de l'analyse fonctionnelle et le développement nécessaire de la physique continue peuvent être construits.

Bibliographie

[1] M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier, *Théorie des Topos, SGA 4*, Seconde édition, Springer Lecture Notes in Math. **269** et **270**, 1972.

[2] M. Barr, *Non-abelian full embedding: outline.* Actes, Congrès International, **1** (1970) 309-312.

[3] M. Barr, *Toposes without points*, J. Pure Appl. Algebra **5** (1974) 265-280.

[4] J. Bénabou, *On a formal language for topos theory*, cours non publié, Université de Montréal, avril 1973.

[5] G. Birkhoff, *Subdirect Unions in Universal Algebra*, Bull. Amer Math. Soc. **50** (1944) 764-768.

[6] O. Bruno, *Logical opens of exponential objects*, Cahiers Topologie Géom. Différentielle Catégoriques **26** (1985) 311-323.

[7] O. Bruno, *Vector fields on function spaces in well-adapted models of synthetic differential geometry*, J. Pure Appl. Algebra **45** (1987) 1-14.

[8] R. Brown, *Function Spaces and Product Topologies*, Quart. J. Math. Oxford (2) **15** (1964) 238-250.

[9] M. Bunge, *Topos theory and Souslin's hypothesis*, J. Pure Appl. Algebra **4** (1974) 159-187.

[10] M. Bunge et F. Gago, *Synthetic aspects of C^∞-mappings, II: Mather's theorem for infinitesimally represented germs*, J. Pure Appl. Algebra **55** (1988) 213-250.

[11] M. Bunge et A. Carboni, *The symmetric topos*, J. Pure Appl. Algebra, **105** (1995) 233-249.

[12] M. Bunge et J. Funk, *Spreads and the symmetric topos*, J. Pure Appl. Algebra **113** (1996) 1-38.

[13] H. Cartan et J.-P. Serre, *Un théorème de finitude concernant les variétés analytiques compactes*, C. R. Acad. Sci. Paris **237** (1953) 128-130.

[14] P. Cartier, *Groupes algébriques et groupes formels*, Colloq. Théorie des groupes algébriques, Bruxelles, Librairie Universitaire, Louvain, Gauthier-Villars, Paris (1962) 87-111.

[15] A. Church, *Introduction to mathematical logic* (notes by Truesdell) Princeton, 1956.

[16] B. Day, *On the relationship of Spanier's quasitopological spaces to k-spaces*, M.Sc. thesis, University of Sydney, 1968.

[17] P. Deligne, *Limites inductives locales*, Théorie des Topos et Cohomologie Étale des Schémas, Tome 2, SGA 4, Second Edition, *Springer Lecture Notes in Math.* **270** (1972) 62-82.

[18] R. Diaconescu, *Change of base for toposes with generators*, J. Pure Appl. Algebra **6** (1975) 191-218.

[19] R. Diaconescu, *Axiom of choice and complementation*, Proc. Amer. Math. Soc. **51** (1975) 176-178.

[20] A. Douady, *Le théorème des images directes de Grauert (d'aprés Kiehl-Verdier)*, Astérisque **16** (1974) 49-62.

[21] L. van den Dries, *A generalization of the Tarski-Seidenberg theorem and some nondefinability results*, Bull. Amer. Math. Soc. **15** (1986) 189-193.

[22] E. J. Dubuc, *C^∞-schemes*, Amer. J. Math. **102** (1981) 683-690.

[23] S. Eilenberg et S. Mac Lane, *General Theory of Natural Equivalences*, Trans. Amer. Math. Soc. **58** (1945) 231-294.

[24] L. Fantappiè, *I funzionali analitici*, Atti Accad. Naz. Lincei Mem. (11) **3** (1930) 453-683.

[25] G. Fichera, *I difficili rapporti fra l'Analisi funzionale e la Fisica matematica*, Rendiconti (9) Accademia Nazionale dei Lincei, Roma (1990) 161-170.

[26] G. Fichera, *Vito Volterra and the birth of functional analysis*, Development of Mathematics 1900-1950 (éd. Jean-Paul Pier) Birkhäuser Basel, 1994, 171-183.

[27] R. Fox, *On topologies for function spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **51** (1945) 429-432.

[28] R. Fox, *Covering spaces with singularities, Algebraic Geometry and Topology: a Symposium in Honor of S. Lefschetz*, Princeton University Press (1957) 243-257.

[29] P. Freyd, *Abelian Categories*, 1963.

[30] P. Freyd, A. Scedrov, *Categories, Allegories*, North Holland, Amsterdam, 1990.

[31] P. Freyd, *Aspects of topoi*, Bull. Austral, Math. Soc. **7** (1972), 1-76.

[32] A. Frölicher, A. Kriegl, *Linear Spaces and Differentiation Theory*, Wiley-Interscience, 1988.

[33] J. Funk, *The display locale of a cosheaf*, Cahiers Topologie Géom. Différentielle Catégoriques **36** (1995) 53-93.

[34] P. Gabriel, *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math, France **90** (1962) 323-448.

[35] P. Gabriel et M. Zisman, *Calculus of Fractions and Homotopy Theory*, Ergebnisse der Math. **35**, Springer-Verlag Berlin, 1967.

[36] J. Giraud, *Analysis situs*, Séminaire Bourbaki, Années 1962/63-1963/64, 189-199. Société Mathématique de France, 1995.

[37] R. Godement, *Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux*, Hermann, Paris, 1958.

[38] H. Grauert, *Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen*, Publ. Math. IHES, Bures-sur-Yvette, 1960.

[39] J. Gray, *Fragments of the history of sheaf theory*, in Applications of Sheaves (éds. M.P. Fourman et al.) Springer Lecture Notes in Math. **753**, Springer-Verlag, Berlin (1979) 1-79.

[40] A. Grothendieck, *Sur certains espaces des fonctions holomorphes*, J. Reine Angew. Math., **192** (1953) 35-64 et 77-95.

[41] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Memoirs of the AMS **16**, 1955.

[42] A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tohoku Math. J. **9** (1957) 119-221.

[43] A. Grothendieck, *Techniques des constructions en géométrie analytique*, Séminaire Henri Cartan, 1960-61 **11**, 1-28.

[44] A. Grothendieck, *Séminaire de géométrie algébrique*, **1-7**, Publ. Math. IHES 1960-69.

[45] A. Grothendieck, *Revêtements étales et Groupe Fondamental ("SGA 1")*, Springer Lecture Notes in Math.**224**, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[46] A. Grothendieck, *Algebraic groups*, Buffalo Lecture Notes F. Gaeta, 1973.

[47] A. Grothendieck, *List of classes of structures*, 1973 (maintenant dans le fichier de J. Duskin).

[48] M. Hakim, *Topos Annelés et Schémas Relatifs*, Ergebnisse der Mathematik **64** Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[49] A. Hirschowitz, C. Houzel, *Un spectre pour les algèbres bornologiques complètes*, C. R. Acad. Sci. Paris **274** (1972) 401-404.

[50] C. Houzel, *Espaces analytiques relatifs et théorème de finitude*, Math. Ann. **205** (1973) 13-54.

[51] C. Houzel, (Historical Introduction) in M. Kashiwara, P. Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Springer-Verlag, 1990.

[52] J. Isbell, *Atomless parts of spaces*, Math. Scand. **31** (1972) 5-32.

[53] P. Johnstone, *Topos Theory*, Academic Press, New York, 1977.

[54] P. Johnstone, *How general is a generalized space*, Dowker Memorial Volume, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **93** (1985) 77-111.

[55] P. Johnstone et A. Joyal, *Continuous categories and exponentiable toposes*, J. Pure Appl. Algebra **25** (1982) 255-296.

[56] A. Joyal (with A. Boileau) *La logique des topos*, J. Symbolic Logic **46** (1981) 6-16.

[57] A. Joyal et I. Moerdijk, *Toposes are cohomologically equivalent to spaces*, Amer. J. Math, **112** (1990) 87-96.

[58] A. Joyal et M. Tierney, *An extension of the Galois theory of Grothendieck*, Mem. Amer. Math. Soc. **309**, 1984.

[59] M. Kashiwara, P, Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Springer-Verlag 1990.

[60] D. Kan, *Adjoint Functors*, Trans. Amer. Math. Soc. **87** (1958) 294-329.

[61] J. Kelley, *General Topology*, Van Nostrand, Princeton, 1955.

[62] M. Kelly, *A survey of totality*, Cahiers Topologie Géom. Différentielle Catégoriques **27** (1986) 109-132.

[63] M. Kelly, *Basic Concepts of Enriched Category Theory*, London Math, Soc. Lecture Note Ser. **64**, Cambridge University Press, 1982.

[64] A. Kock, *Synthetic Differential Geometry*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **51**, Cambridge University Press, 1981.

[65] A. Kriegl, L. D. Nel, *A convenient setting for holomorphy*, Cahiers Topologie Géom. Différentielle Catégoriques **26** (1985) 273-309.

[66] A. Krieg, L. D. Nel, *Convenient vector spaces of smooth functions*, Math. Nachr. **147** (1990) 39-45.

[67] A. Kriegl, P. Michor, *Aspects of the theory of infnite-dimensional manifolds*, Differential Geometry and Appl. **1** (1991) 159-176.

[68] R. Lavendhomme, *Basic concepts of Synthetic Differential Geometry*, Kluwer, 1996.

[69] F. W. Lawvere, *Functorial Semantics of Algebraic Theories*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A, **50** (1963) 869-872.

[70] F. W. Lawvere, *An elementary theory of the category of sets*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A, **52** (1964) 1506-1511.

[71] F. W. Lawvere, *Adjointness in Foundations*, Dialectica **23** (1969) 281-296.

[72] F. W. Lawvere, *Quantifiers and Sheaves*, Proc. Intern. Congress on Math., Gauthier-Villars, Nice (1971) 329-334.

[73] F. W, Lawvere, *Categorical Dynamics*, (1967 Chicago Lectures) Topos-Theoretic Methods in Geometry, Aarhus 1979. (See also Historical Remarks in [64] 288-294.

[74] F. W. Lawvere, *Introduction to Categories in Continuum Physics*, Springer Lecture Notes in Math. **1174**, 1986.

[75] F. W. Lawvere, *Categories of Space and of Quantity*, The Space of Mathematics. Philosophical, Epistemological and Historical Explorations. De Gruyter, Berlin (1992) 14-30.

[76] J. Leray, *Sur la forme des espaces topologiques et sur les points fixes des représentations*, J. Math. Pures Appl. **9** (1945) 95-248.

[77] A. Macintyre, K. McKenna, et L. van den Dries, *Elimination of quantifiers in algebraic structures*, Adv. in Math. **47** (1983) 74-87.

[78] S. Mac Lane, *Duality for groups*, Bull. Amer. Math. Soc. **56** (1950) 485-516.

[79] S. Mac Lane, *The origins of the cohomology of groups*, Enseign. Math, **24** (1978) 1-29.

[80] S. Mac Lane, *Concepts and categories in perspective*, in A Century of Mathematics in America (Part I), American Mathematics Society, Providence, RI (1988) 323-366.

[81] S. Mac Lane, I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic*, Springer-Verlag, New York Inc. 1992.

[82] S. Mac Lane, I. Moerdijk, *Topos theory, Handbook of Algebra* **1**, (ed. M. Hazewinkel) Elsevier, Amsterdam (1996) 501-528.

[83] M. Makkai, G.E. Reyes, *First-Order Categorical Logic*, Springer Lecture Notes in Math. **611**, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[84] C. Mikkelsen, *Lattice theoretic and logical aspects of elementary topoi*, Various Publications Series, **25** Matematisk Institut, Aarhus 1976.

[85] E. Michael, *Inductively perfect maps and triquotient maps*, Proc. Amer. Math. Soc. **82** (1981) 115-119.

[86] W. Mitchell, *Boolean topoi and the theory of sets*, J. Pure Appl. Algebra **2** (1972) 261-274.

[87] I. Moerdijk, G.E. Reyes, *Models for Smooth Infinitesimal Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[88] R. Narasimhan, *Analysis on real and complex manifolds*, 3rd edition North Holland, Amsterdam, 1985.

[89] W. Noll, *The geometry of contact, separation, and reformation of continuous bodies*, Arch, Rational Mech. Anal, **122** (1993) 197-212.

[90] G. Osius, *Logical and set-theoretical tools in elementary topoi*, Model Theory and Topoi, Springer Lecture Notes in Math. **445** (1975) 297-346.

[91] R. Paré, *Colimits in topoi*, Bull. Amer Math, Soc. **80** (1974) 556-561.

[92] J. Penon, *Infinitésimaux et intuitionnisme*, Cahiers Topologie Géom. Différentielle Catégoriques **22** (1981) 67-72.

[93] T. Plewe, *Localic triquotient maps are effective descent maps*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **122** (1997) n°1, 17-43.

[94] A. Robinson, *A theorem on algebraically closed fields*, J. Symbolic Logic **14** (1949) 686-694.

[95] J. Sebastião e Silva, *Sui fondamenti della teoria dei funzionali analitici*, Portugal Math. **12** (1953) 1-46.

[96] E. Spanier, *Quasitopologies*, Duke Math. J. **30** (1963) 1-14.

[97] N. Steenrod, *A convenient category of topological spaces*, Michigan Math. J. **14** (1967) 133-152.

[98] R. Street, *Notions of topos*, Bull. Austral. Math. Soc. **23** (1981) 199-208.

[99] R. Street, R. Walters, *Yoneda structures on 2-categories*, J. Algebra **50** (1978) 350-379.

[100] A. Tarski, *Some topics on the borderline between algebra and logic*, Proc. Int. Congress of Mathematicians, Harvard University Press (1950) 718-719.

[101] M. Tierney, *Sheaf theory and the continuum hypothesis*, Toposes, Alg. Geom. and Logic, Springer Lecture Notes in Math. **274**, Springer-Verlag, Berlin (1972) 13-42.

[102] V. Volterra, *Opere matematiche*, Acad. Naz. dei Lincei, 1954-1962.

[103] G. Wraith, *Categorical dynamics and the Lie algebra of a group object*, (unpublished) 1972.

[104] G. Wraith, *Lectures on elementary topoi*, Model theory and topoi, Springer Lecture Notes in Math. **445** (1975) 114-206.

[105] D. Yetter, *On right adjoints to exponential functors*, J. Pure Appl. Algebra **45**, 1987, 287-304, Corrections: J. Pure Appl. Algebra **58** (1989) 103-105.

[106] M. Zorn, *Derivatives and Fréchet differentials*, Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946) 133-137.

Bâtiment de Mathématique
Université de Buffalo
Université d'État de New York
Buffalo, N.Y. 14260
États-Unis
wlawvere@buffalo.edu