Remarques sur l'approche d'Alain Connes concernant le modèle standard en géométrie non-commutative

Daniel Kastler, Thomas Schücker

dédié à la mémoire de E. M. Polivanov

Dans les dernières années, Alain Connes a produit une interprétation remarquable du modèle standard (pour les secteurs électrofaibles et chromodynamiques) dans sa théorie des variétés riemanniennes de spin non-commutatives [1-4]. Tous les termes du lagrangien bosonique habituel sont obtenus via un analogue non-commutatif de l'algorithme de Yang-Mills dans lequel une courbure simple est attachée à une paire d'algèbres dans la dualité de Poincaré (viz. l'algèbre électrofaible $\mathcal{A} = C^\infty \otimes (\mathbb{C} \oplus \mathbb{H})$ et l'algèbre chromodynamique $\mathcal{B} = C^\infty \otimes (\mathbb{C} \oplus \mathbf{M}_3(\mathbb{C}))$ construisant un "espace non-commutatif" $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ qui incorpore les "degrés internes de liberté". La géométrie différentielle de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ est spécifiée (d'une façon généralisant la spécification de la géométrie différentielle d'une spin^c-variété par son opérateur de Dirac) par un "K-cycle 4^+-sommable" (un $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-module de Kasparov) $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathrm{l}} \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{q}}$, somme directe des espaces de Hilbert $\mathbb{Z}/2$-échelonnés leptonique et de quarks, sur lesquels agit aussi un opérateur de Dirac généralisé $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\mathrm{l}} \oplus \mathcal{D}_{\mathrm{q}}$. La représentation $\pi = \pi_l \oplus \pi_q$ de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ sur le bimodule $\mathcal{H}_{\mathrm{l}} \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{q}}$ se développe en une représentation du produit tensoriel $\Omega_D\mathcal{A} \otimes \Omega_D\mathcal{B}$ de leur "complexes de De Rham non-commutatifs" (des ensembles de formes différentielles quantiques). La théorie produit les quatre bosons de jauge habituels plus le boson de Higgs apparaissant comme un cinquième boson de jauge connecté avec le caractère discret. Pour des détails, nous nous référons à [5] et [8].

Le "schéma de Yang-Mills non-commutatif" consiste à "intégrer" le carré de la courbure quantique au moyen d'une trace $\underline{\tau_{\mathcal{D}}}$ sur les endomorphismes des formes quantiques dérivées de la trace $\tau_{\mathcal{D}} = Tr_\omega[\mathcal{D}^{-4}\pi(\cdot)]$ sur les formes quantiques construites via la trace de Dixmier et ont généralisé l'opérateur de Dirac. En fait, comme cette trace se sépare en traces partielles indépendantes selon les séparations naturelles de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, la combinaison convexe de ces traces partielles donne naissance à une famille convexe d'"intégrations" (dépendant de la séparation adoptée). La séparation maximale en sous-modules irréductibles produit le lagrangien du modèle standard habituel avec ses 18 paramètres libres. Un choix plus restreint naturel correspond à la séparation $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathrm{l}} \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{q}}$ en les espaces de Hilbert leptonique et de quark, avec des combinaisons convexes des traces possibles

$$\alpha_l \tau_{\mathcal{D}_l} + \alpha_q \tau_{\mathcal{D}_q}, \quad \alpha_l = \frac{1}{2}(1+x), \alpha_q = \frac{1}{2}(1-x), \quad -1 \leq x \leq 1, \tag{1}$$

parmi lesquelles le choix symétrique $x = 0$ amène un lagrangien avec 4 paramètres de moins qu'habituellement (les paramètres libres sont les entrées de la matrice de masse des fermions plus une constante simple de couplage universel).

Centre de Physique théorique, CNRS - Luminy, BP 907, 13288 Marseille Cedex, et Université d'Aix-Marseille II et Université de Provence.

Traduction de l'article arxiv hep-th:0111234, par Denise Vella-Chemla, mars 2021.

De telles versions contraintes du modèle standard (naturelles tant qu'elles postulent des développements de l'"universalité fermionique") sont potentiellement intéressantes puisqu'elles contiennent plus d'information que le modèle standard habituel (ces modèles sont de type "unification", avec un Higgs unique, et sans termes croisés mettant en péril la stabilité du proton). Des prédictions physiques authentiques selon de telles lignes devraient bien sûr nécessiter une théorie des champs quantiques renormalisée - une étape non encore atteinte dans le niveau actuel purement classique (lagrangien), où la quantification habituelle et la renormalisation simplifiée détruiraient les contraintes et restitueraient les 18 paramètres libres habituels.

Avec ceci à l'esprit, il est, pourtant, peut-être intéressant, pour une première exploration des lagrangiens contraints et pour faire des spéculations, de regarder les résultats à un niveau arborescent. La trace de Dixmier (1) amène au lagrangien bosonique suivant (jauge et Higgs) [5]:[1]

$$\mathcal{L}_B = -A\mathbf{g}^a{}_{\mu\nu}\mathbf{g}_a{}^{\mu\nu} - B\mathbf{f}_{\mu\nu}\mathbf{f}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}C\mathbf{h}^s{}_{\mu\nu}\mathbf{h}_s{}^{\mu\nu} + 2L\mathbf{D}_\mu\Phi_j\mathbf{D}^\mu\Phi^j + K(\Phi_i\Phi^i - 1)^2, \tag{2}$$

présentant les courbures $\mathbf{g}, \mathbf{f}$ et $\mathbf{h}$ des respectivement $SU(3)$-, $U(1)$-, et $SU(2)$-connexions avec les une-formes $\mathbf{c}, \mathbf{a}$, et $\mathbf{c}$, et le covariant $\mathbf{D}_\mu\Phi_j$, où

$$\mathbf{D}_\mu = \nabla_\mu + i(\mathbf{a}_\mu - \mathbf{b}^s{}_\mu\frac{\tau_s}{2}). \tag{3}$$

avec les constantes A à travers K [2] données par

$$\begin{cases} A = \frac{N}{2}(1-x) \\ B = \frac{N}{3}(10-x) \\ C = N(2-x) \\ L = Tr[\alpha_l\mu_e + 3\alpha_q(\mu_u + \mu_d)] \simeq \frac{3}{2}(1-x)m_t^2 \\ K = \frac{3}{2}Tr[\alpha_l\mu_e^2 + 3\alpha_q(\mu_u^2 + \mu_d^2)] + 3\alpha_q Tr[\mu_u\mu_d] \\ \qquad -[1/(\alpha_l + 6\alpha_q) + 1/(2\alpha_l + 6\alpha_q)]N^{-1}L^2 \\ \quad \simeq \frac{9}{4}(1-x)m_t^4 - \frac{9}{8}(1-x)\frac{3x^2-8x+5}{5x^2-17x+14}m_t^4 \end{cases} \tag{4}$$

où $\mu_e = M_e M_e^*, \mu_u = M_u M_u^*, \mu_d = M_d M_d^*$, M_e, M_u, M_d les matrices de masse respectives des leptons chargés, les quarks les plus élevés et les quarks les plus bas. Nous indiquons des valeurs approximatives en fonction de la masse élevée m_t supposée dominante.

Nous rappelons l'expression de la partie jauge et Higgs du lagrangien du modèle standard traditionnel :

$$\mathcal{L}_{gauge} + \mathcal{L}_{Higgs} = -\frac{1}{4}\mathcal{G}^a{}_{\mu\nu}\mathcal{G}_a{}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W^s{}_{\mu\nu}W_s{}^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) + \frac{\mu^2}{v^2}(\phi^*\phi - \frac{v^2}{2})^2, \tag{5}$$

[1]Dans ce qui suit, nous ne nous préoccupons pas du fait que le lagrangien traditionnel est lorentzien alors que le lagrangien NCDG est euclidien, puisque ce point ne porte pas sur les constantes de couplage.

[2]Les valeurs approximatives pour L et K sont valides à 1% près, ce qui est consistant avec le fait de négliger toutes les masses de fermions contre la masse top.

avec la dérivée covariante D_μ donnée par :

$$D_\mu = \partial_\mu - i\frac{g_1}{2}B_\mu - ig_2 W^s{}_\mu \frac{\tau_s}{2}. \tag{6}$$

Nous trouvons pratique d'utiliser les paramètres de base suivants du modèle standard - numériquement tous connus excepté μ :

$$\begin{cases} g = \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \\ \cos\theta_W = g_2/g \\ \mu \\ v \end{cases}. \tag{7}$$

En fonction du dernier, on a $g_1 = g\sin\theta_W, g_2 = g\cos\theta_W$, et les masses suivantes :

$$\begin{cases} m_H = \sqrt{2}\mu \\ m_Z = \frac{1}{2}vg \\ m_W = m_Z\cos\theta_W = \frac{1}{2}vg_2 \end{cases} \tag{8}$$

alors que le potentiel de Higgs est donné par :

$$V_{Higgs} = \frac{\mu^2}{v^2}(\phi^*\phi - \frac{v^2}{2})^2. \tag{9}$$

L'identification des dérivées covariantes (3) et (6) est synonyme avec les identifications :

$$\begin{cases} \mathbf{c} = g_3\mathcal{G} \\ \text{dans les composants } \mathbf{c}^a{}_\mu = g_3\mathcal{G}^a{}_\mu \quad a = 1, ..., 8, \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} \mathbf{a} = -\frac{1}{2}g_1 B \\ \text{dans les composants } \mathbf{a}_\mu = g_1 B_\mu, \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} \mathbf{b} = g_2 W \\ \text{dans les composants } \mathbf{b}^s{}_\mu = g_2 W^s{}_\mu, \quad s = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{12}$$

impliquant

$$\begin{cases} \mathbf{f}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}g_1 B_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}g_2\cos\theta_W B_{\mu\nu} \\ \\ \mathbf{h}^s{}_{\mu\nu} = g_2 W^s{}_{\mu\nu}, \qquad \text{s=1,2,3,} \\ \\ \mathbf{g}^a{}_{\mu\nu} = g_3\mathcal{G}^a{}_\mu, \qquad \text{a=1,...8} \end{cases} \tag{13}$$

En supposant que ϕ et Φ diffèrent d'une constante (insensible à la multiplication de ϕ resp. Φ, par des constantes), la dernière découle de la comparaison des quatrièmes termes de (2) et (5), amenant

$$\frac{v}{\sqrt{2}}\Phi = \phi. \tag{14}$$

En insérant (10) par (14) dans (2), on aboutit à :

$$C^{-1}g_2^{-2}\mathcal{L}_B = -\tfrac{A}{C}\tfrac{g_3{}^2}{g_2^2}\mathcal{G}^a{}_{\mu\nu}\mathcal{G}_a{}^{\mu\nu} - \tfrac{B}{4C}\tan^2\theta_W B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \tfrac{1}{4}W^s{}_{\mu\nu}W_s{}^{\mu\nu} + \tfrac{4L}{Cv^2g_2^2}\left\{(D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) + \tfrac{K}{v^2L}\left(\phi^*\phi - \tfrac{v^2}{2}\right)^2\right\}, \tag{15}$$

que nous identifions avec (5). L'dentification des premiers termes amène :

$$g_3 = \frac{1}{2}(C/A)^{1/2}g_2. \tag{16}$$

L'identification des seconds termes fixe l'angle de Weinberg :

$$\tan^{-2}\theta_W = \frac{B}{C} \quad \text{d'où} \quad \sin^2\theta_W = \frac{C}{B+C} \tag{17}$$

L'identification des termes du milieu fixe le rapport de la masse m_W du W-boson à la masse m_t du quark :

$$v^2g_2^2 = 4m_W^2 = 4\frac{L}{C} \tag{18}$$

d'où

$$m_W = (L/C)^{1/2}. \tag{18a}$$

L'identification du rapport des derniers termes fixe le rapport de la masse m_H du boson de Higgs à la masse m_t du quark top :

$$\mu^2 = K/L, \tag{19}$$

d'où

$$m_H = (2K/L)^{1/2}. \tag{19a}$$

Insérer (3) dans ces relations donne

$$g_3 = \frac{1}{2}[\frac{4-2x}{1-x}]^{1/2}g_2 \quad (= g_2 \quad \text{pour} \quad x=0), \tag{20}$$

$$\sin^2\theta_W = \frac{3(1-x/2)}{8-2x} \quad (= \frac{3}{8} \quad \text{pour} \quad x=0), \tag{21}$$

et, *en négligeant toutes les masses des fermions contre la masse top m_t*:

$$m_W = \left(\frac{3(1-x)}{4N(1-x/2)}\right)^{1/2} m_t \quad (= \frac{1}{2}m_t \quad \text{pour} \quad x=0 \quad \text{et} \quad N=3) \tag{22}$$

et

$$m_H = \left(3 - \frac{3}{2}\frac{3x^2-8x+5}{5x^2-17x+14}\right)^{1/2} m_t. \tag{23}$$

Les relations (20) et (21) ont une saveur de “grande unification”. Nous montrons maintenant que, étant données les relations (10), (11), (12) entre les champs et les formes de connexion, ces relations procèdent directement du choix (1) de la trace de Dixmier avec le contenu de jauge du K-cycle leptonique et quark $\mathcal{H}_l$ et $\mathcal{H}_q$. Concernant le dernier, nous rappelons les définitions des espaces de Hilbert leptonique et quark Hilbert (cf. [4],[5]) : on a $\mathcal{H}_l = L^2(\mathbf{S_M})\otimes H_l$ et $\mathcal{H}_q = L^2(\mathbf{S_M})\otimes H_q$, où $\mathbf{S_M}$ est le fibré de spin, et :

$$H_l = H_{lR}\oplus H_{lL} \tag{24}$$

avec [3]

$$\begin{cases} H_{l_R} = \mathbb{C}^1_R \otimes \mathbb{C}^N, & \mathbb{C}^1_R \text{ fibré par } \ e_R, \\ \\ H_{l_L} = \mathbb{C}^2_L \otimes \mathbb{C}^N, & \mathbb{C}^1_R \text{ fibré par } \ \nu_L, e_L \end{cases}, \tag{25}$$

respectivement :

$$H_q = H_{q_R} \oplus H_{q_L} \tag{26}$$

avec

$$\begin{cases} H_{q_R} = \mathbb{C}^2_R \otimes \mathbb{C}^N, & \mathbb{C}^2_R \text{ fibré par } \ u_R, d_R, \\ \\ H_{q_L} = \mathbb{C}^2_L \otimes \mathbb{C}^N, & \mathbb{C}^2_L \text{ fibré par } \ u_L, d_L, \end{cases} \tag{27}$$

Les représentants matriciels T^3_l, C^3_l, Q_l of T^3, C^3 agissent sur l'espace leptonique interne $\mathbb{C}^1_R \oplus \mathbb{C}^2_l$, ainsi que la charge électrique Q [4] , où $iT^3 \in SU(2)$, $iC^3 \in SU(3)$:

$$T^3_l = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} e_R \\ \nu_L \\ e_L \end{matrix} \quad \text{tels que} \quad Tr(T^{3*}_l T^3_l) = \frac{1}{2}, \tag{28}$$

$$C^3_l = 0 \tag{29}$$

$$Q_l = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_R \\ \nu_L \\ e_L \end{matrix} \quad \text{tels que} \quad Tr(Q^*_l Q_l) = 2. \tag{30}$$

De même que les représentants T^3_q, C^3_q, Q_q of T^3, C^3, et Q agissent sur l'espace interne des quarks $\mathbb{C}^2_R \oplus \mathbb{C}^2_L$, avec les matrices :

$$T^3_q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} u_R \\ d_R \\ u_L \\ d_L \end{matrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{tels que} \quad Tr(T^{3*}_q T^3_q) = \frac{3}{2}, \tag{31}$$

$$C^3_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} u_R \\ d_R \\ u_L \\ d_L \end{matrix} \otimes \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{tels que} \quad Tr(C^{3*}_q C^3_q) = 2 \tag{32}$$

[3]Le facteur $\mathbb{C}^N$ correspond à la génération de N fermions avec comportement de jauge identique, et peut être omise dans le calcul à venir.

[4]Nous choisissons de travailler avec la charge électrique Q pour la définition de laquelle il y a consensus, plutôt qu'avec l'hyper-charge Y qui est définie différemment par différents auteurs. Nous aurons besoin du générateur infinitésimal R du groupe $U(1)$ pour écrire la formule (34) ci-dessous, mais nous n'en aurons pas vraiment besoin.

$$Q_q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{matrix} u_R \\ d_R \\ u_L \\ d_L \end{matrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{tels que} \quad Tr(T_q^{3*}T_q^3) = \frac{10}{3}. \tag{33}$$

Les formes bilinéaires invariantes sur les algèbres de Lie $su(3), su(2)$, et $u(1)$ sont uniques à échelle près. La forme bilinéaire la plus invariante sur l'algèbre de Lie $SU(3) \oplus SU(2) \oplus U(1)$ du groupe de jauge est par conséquent une combinaison linéaire du type :

$$\begin{aligned} \langle A, A' \rangle = \tfrac{1}{{g_3}^2} Tr(C^*C') + \tfrac{1}{g_2^2} Tr(T^*T') + \tfrac{1}{g_1^2}\tfrac{1}{2}\bar{R}R', \\ A = (C, T, R), A' = (C', T', R') \in SU(3) \oplus SU(2) \oplus U(1) \end{aligned} \tag{34}$$

En identifiant ceci avec la forme bilinéaire sur l'algèbre de Lie du groupe de jauge limité par la trace de Dixmier (1):

$$\langle A, A' \rangle = \alpha_l Tr(A_l^* A_l') + \alpha_q Tr(A_q^* A_q'), \quad A, A' \in SU(3) \oplus SU(2) \oplus U(1), \tag{35}$$

on aboutit alors à la relation

$$\left(\frac{g_3}{g_2}\right)^2 = \frac{\alpha_l Tr(T_l^{3*}T_l^3) + \alpha_q Tr(T_q^{3*}T_q^3)}{\alpha_l Tr(C_l^{3*}C_l^3) + \alpha_q Tr(C_q^{3*}C_q^3)} = \frac{\frac{1}{2}\alpha_l + \frac{3}{2}\alpha_q}{2\alpha_q} = \frac{2-x}{2(1-x)}, \tag{36}$$

identique à (20), et la relation (9)

$$\sin^2\theta_W = \frac{\alpha_l Tr(T_l^{3*}T_l^3) + \alpha_q Tr(T_q^{3*}T_q^3)}{\alpha_l Tr(C_l^* C_l) + \alpha_q Tr(Q_q^* Q_q)} = \frac{\frac{1}{2}\alpha_l + \frac{3}{2}\alpha_q}{2\alpha_l + \frac{10}{3}\alpha_q} = \frac{3}{4}\frac{2-x}{4-x}, \tag{37}$$

identique à (21). Pour $x = 0$, ce calcul est formellement identique à celui effectué dans la $SU(5)$-grande unification, la raison étant que le contenu des fermions et la pondération sont les mêmes.

Notre second point est une courte discussion du comportement ou des relations (20) à (23) lorsque x couvre l'intervalle de -1 à +1. Cela est illustré par la table:

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	0.99	1
$(g_3/g_2)^2$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{2}$	50.5	∞
$\sin^2\theta_W$	$\frac{9}{20}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{28}$	0.252	$\frac{1}{4}$
m_t/m_W	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{6}$	14.2	∞
m_H/m_W	2.65	3.14	3.96	24.5	∞

Nous notons que le rapport m_H/m_t montre peu de variation de 1.53 à $\sqrt{3}$. La table suggère les remarques suivantes :

(i): toutes les fonctions tabulées sont monotones en x.
(ii): la valeur $x = 0$ semble correspondre à la situation du type d'"unification".
(iii): pour la valeur limite $x = 1$, i.e. $\alpha_q = 0$, l'angle de Weinberg est proche de sa valeur expérimentale, alors que les interactions fortes prévalent. Une indication de la dominance du lepton aux énergies expérimentales ? Un lien avec le confinement ?

Le premier des auteurs a eu le privilège, dans les années 70, de recevoir de E. M. Polivanov une introduction à quelques-uns des trésors de l'architecture de Moscou. Les impressions durables de D. K. à propos de la beauté et de la spiritualité de l'ancienne capitale russe restent indéniablement liées au souvenir de la gentillesse et de l'élévation morale de l'éminent physicien que nous regrettons.

Références

[1] A. Connes, The action function in non-commutative geometry, Comm. Math. Phys. **117**, 673 (1988).

[2] A. Connes, Essay on Physics and Non-commutative Geometry, *The Interface of Mathematics and Particle Physics*, Clarendon Press, Oxford (1990).

[3] A. Connes et J. Lott, Particle models and non-commutative geometry, Nucl. Phys. B **18B** (Proc. Suppl.) (1990).

[4] A. Connes, The metric aspect of non-commutative geometry. Collège de France Preprint (Octobre 1991).

[5] D. Kastler, A detailed account of Alain Connes' version of the standard model in non-commutative geometry, I (1991) and II (1992).

[6] T. Schücker, $Q = I_3 + \frac{1}{2}Y$, why? Proc. XI Intern. Coll. on Group-Theoret. Methods in Physics, Istanbul, eds. M. Serdaroglu, E. Inonu, Springer, Heidelberg (1982).

Opérateur de Dirac et gravitation

Daniel Kastler

Résumé : Nous donnons une démonstration directe du fait, annoncé par Alain Connes, que le résidu de Wodzicki du carré de l'inverse de l'opérateur de Dirac est proportionnel à l'action d'Einstein-Hilbert de la relativité générale. Nous montrons que ceci est toujours vérifié par les opérateurs de Dirac twistés (e.g. par l'électrodynamique), et plus généralement, pour les opérateurs de Dirac appartenant aux connexions de Clifford des fibrés généraux de Clifford.

Récemment la géométrie non-commutative de Connes s'est montrée - à travers sa réinterprétation fascinante du modèle standard des particules élémentaires complet - être également pertinente pour l'étude de la gravitation. En effet, d'un côté, Alain Connes a fait l'observation qui est un réel défi [1] que le résidu de Wodzicki [2] de l'inverse du carré de l'opérateur de (Atiyah-Singer-Lichnérowicz) Dirac amène l'action de Einstein-Hilbert de la relativité générale.

Et de plus, il a travaillé sur une forme quantale de l'action de Polyakov des cordes [2] qui le reproduit dans le cas habituel d'une surface de Riemann, mais également a du sens pour les 4-variétés conformes, amenant alors une action conformellement invariante dont on espère qu'elle est reliée à la gravitation [3].

Dans cet article, nous nous intéressons au résidu de Wodzicki de D^{-2}. Nous calculons d'abord cet objet pour l'opérateur de Dirac pur (fabriqué avec la connexion de spin d'une variété riemannienne, cf. (1) ci-dessous) : nous obtenons alors, comme annoncé par Connes, un multiple de la courbure scalaire (Théorème [1] ci-dessous). Notre preuve est un calcul de force brute effectué dans des cas à coordonnées arbitraires.

Maintenant, puisque l'action d'Einstein-Hilbert et l'action du modèle standard sont toutes deux obtenues par des algorithmes basés sur la trace de Dixmier, on souhaite naturellement obtenir ces deux actions avec une seule procédure. Selon cette méthode, le premier objet naturel sur lequel travailler est le résidu de Wodzicki de $\mathbb{D}^{-2}$, $\mathbb{D}$ l'opérateur composé de Dirac construit avec le produit tensoriel de la connexion de spin σ_μ, et la $U(1)$-connexion de l'électrodynamique a_μ. Mais le calcul de cet objet (Proposition [2] ci-dessous) amène le même résultat que celui obtenu dans le Théorème [1] : la connexion a_μ sort du calcul. En fait, puisque notre calcul est basé sur la formule de Lichnérowicz pour le carré ou l'opérateur de Dirac qui est valable dans le cas des opérateurs de Dirac généraux qui tiennent à partir des connexions de Clifford sur les fibrés de Clifford, notre

Daniel Kastler :

1. Centre de Physique Théorique, CNRS-Luminy, Case 907, P-13288 Marseille Cedex 9, France.
2. Département de Physique, Faculté des Sciences de Luminy, Marseille Cedex, France.

Reçu le 1er Décembre 1993 / forme révisée le 29 Mars 1994.

Origine de l'article : *Communication in mathematical physics*, vol. 166, p.633-643, 1995.

Traduction d'un texte téléchargeable ici
https://projecteuclid.org/journals/communications-in-mathematical-physics/volume-166/issue-3/The-Dirac-operator-and-gravitation/cmp/1104271706.full

Trad. Denise Vella-Chemla, mars 2021.

1. non publiée, mais mentionnée verbalement dans différents exposés.

2. Le résidu de Wodzicki est en fait l'unique (et par conséquent canonique) trace sur les opérateurs pseudo-différentiels (concentrés sur les opérateurs pseudo-différentiels d'ordre la dimension de la variété).

3. Le travail du groupe de Zürich sur la gravitation en géométrie non-commutative est basé sur une approche différente reliée à l'algorithme de Yang-Mills [6].

résultat se généralise naturellement à ce contexte (Proposition [3] ci-dessous).

Nous concluons donc que les présents algorithmes de la géométrie non-commutative gérant les lagrangiens respectifs du monde de l'infiniment petit et du cosmos semblent (superficiellement) tendre à se repousser l'un l'autre : alors que a_μ sort du résidu de Wodzicki du carré de l'inverse de l'opérateur de Dirac composé, σ_μ sort de l'algorithme de Yang-Mills non-commutatif [4].

0. Contexte et notations

Dans la suite de ce document, $\mathbf{M}$ est une variété riemannienne 4-dimensionnelle orientée de spins de métrique riemannienne g (avec la norme $\| \ \|$ et l'élément de volume dv). Nous rappelons que l'opérateur de Dirac D est localement donné comme suit en fonction d'une section orthonormale e_i (avec section duale θ^k) du fibré de $\mathbf{M}$: on a

$$\begin{cases} D = i\gamma^i \widetilde{\nabla}_i = i\gamma^\imath(e_i + \sigma_i) \\ \text{avec} \quad \sigma_\imath(x) = \frac{1}{4}\gamma_{\imath j,k}(x)\gamma^j\gamma^k = \frac{1}{8}\gamma_{ij,k}(x)[\gamma^j\gamma^k - \gamma^k\gamma^j], \end{cases} \tag{1}$$

où les $\gamma_{ij,k}$ représentent la connexion de Levi-Civita ∇ avec connexion de spins $\widetilde{\nabla}$, spécifiquement

$$\begin{cases} \gamma_{ij,k} = -\gamma_{ik,j} = \frac{1}{2}[c_{ij,k} + c_{ki,\jmath} + c_{k\jmath,\imath}], \qquad i,j,k = 1,\ldots,4. \\ \text{avec} \quad \mathrm{c}_{ij}^k = \theta^k([e_i, e_\jmath]) \end{cases} \tag{2}$$

Ici les γ^i sont des matrices auto-adjointes de Dirac telles que $\gamma^i\gamma^j + \gamma^\jmath\gamma^\imath = \delta^{\imath\jmath}$. En fonction des coordonnées locales x^μ induisant l' alternative à 4 termes $\partial_\mu = S_\mu^\imath(x)e_i$ (de dual à quatre termes dx^μ), nous avons $\gamma^i e_i = \gamma^\mu\partial_\mu$, les γ^μ étant maintenant des matrices de Dirac x-dépendantes telles que $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = g^{\mu\nu}$ (on utilise des indices ou exposants latins pour les $e_\imath$ de base et des indices ou exposants grecs pour les ∂_μ de base, le type des indices et exposants spécifiant le type des matrices de Dirac). La spécification de l'opérateur de Dirac dans la base grecque est la suivante : on a

$$\begin{cases} D = i\gamma^\mu \widetilde{\nabla}_\mu = i\gamma^\mu(\partial_\mu + \sigma_\mu) \\ \text{avec} \quad \sigma_\mu(x) = S_\mu^i(x)\sigma_\imath(x). \end{cases} \tag{1a}$$

Dans ce qui suit, la notation D^{-1} fait référence à l'inverse modulo les opérateurs lisses.

Nous établissons d'abord ([1], voir aussi [3, p. 322]) :

1. Théorème. *La valeur du résidu de Wodzicki [4,4a] sur le carré de l'inverse de l'opérateur de Dirac, notamment :*

$$I = 4\ \mathrm{Tr}_\omega\{\sigma_{-4}(x,\xi)\} \ = \ 4(2\pi)^{-4} \int\limits_{\xi\in S^3} \mathrm{tr}\{\sigma_{-4}(x,\xi)\}d^3\xi dv, \tag{3}$$

*(*tr *la trace de Clifford normalisée) où :*

$$\sigma_{-4}(x,\xi) = \ \textit{partie d'ordre} - 4 \textit{ du symbole total } \sigma(x,\xi) \textit{ de } D^{-2}, \tag{4}$$

coïncide à une constante près avec l'action de Hilbert-Einstein action $\int \mathscr{L}_g\, dv$ *de la relativité générale où*

4. En effet σ_μ sort des commutateurs $[D,a], a \in C^\infty(\mathbf{M})$.

$$\mathscr{L}_g = R_{\mu\nu} \wedge *(dx^\mu \wedge dx^\nu) \tag{5}$$

- *spécifiquement*

$$\mathscr{L}_g = \frac{1}{2} R_{ikmn}(dx^m \wedge dx^n, dx^i \wedge dx^k) = (g^{\imath m} g^{nk} - g^{in} g^{mk}) R_{ikmn} = s, \tag{5a}$$

s la courbure scalaire). On a $I = -\frac{1}{24\pi^2} \int \mathscr{L}_g dv$.

Nous rappelons la formule de Lichnérowicz pour le carré de l'opérateur de Dirac :

$$\begin{aligned} D^2 &= -g^{\mu\nu}(\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\alpha) + \tfrac{1}{4} s \\ &= -g^{\mu\nu}[\partial^x_\mu \partial^x_\nu + 2\sigma_\mu \,.\, \partial^x_\nu - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \partial^x_\alpha + \partial^x_\mu \sigma_\nu + \sigma_\mu \sigma_\nu - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \sigma_\alpha] + \tfrac{1}{4} s. \end{aligned} \tag{6}$$

Nos calculs sont basés sur l'algorithme fournissant le symbole principal d'un produit d'opérateurs pseudo-différentiels en fonction des symboles principaux des facteurs, notamment, avec le raccourci $\partial^\alpha_\xi = \partial^\alpha / \partial \xi_\alpha, \partial^x_\alpha = \partial_\alpha / \partial x^\alpha$:

$$\sigma^{PQ}(x, \xi) = \textstyle\sum_\alpha \dfrac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial^\alpha_\xi \sigma^P(x, \xi) \,.\, \partial^x_\alpha \sigma^Q(x, \xi). \tag{7}$$

Nous avons besoin de calculer le symbole total $\sigma(x, \xi)$ de D^{-2} à l'ordre -4, avec D^2 la somme suivante de termes $(D^2)_k$ d'ordre k :

$$D^2 = (D^2)_2 + (D^2)_1 + (D^2)_0,$$

$$\begin{cases} (D^2)_2 = -g^{\mu\nu} \partial^x_\mu \partial^x_\nu \\ (D^2)_1 = -g^{\mu\nu}(2\sigma_\mu \,.\, \partial^x_\nu \;-\; \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \partial^x_\alpha) \\ (D^2)_0 = -g^{\mu\nu}(\partial^x_\mu \sigma_\nu + \sigma_\mu \sigma_\nu - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \sigma_\alpha) + \tfrac{1}{4} s \end{cases} \tag{6a}$$

avec les symboles respectifs :

$$\begin{cases} \sigma_2(x, \xi) = g^{\mu\nu}(x) \xi_\mu \xi_\nu \\ \sigma_1(x, \xi) = i g^{\mu\nu}(x)[\Gamma^\alpha_{\mu\nu}(x) \xi_\alpha - 2\sigma_\mu(x) \xi_\nu] \\ \sigma_0(x, \xi) = -g^{\mu\nu}(x)(\partial^x_\mu \sigma_\nu + \sigma_\mu \sigma_\nu - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \sigma_\alpha)(x) + \tfrac{1}{4} s(x) \end{cases} \tag{8}$$

abrégés comme suit, en utilisant le raccourci $\Gamma^\mu = g^{\alpha\beta} \Gamma^\mu_{\alpha\beta}$:

$$\begin{cases} \sigma_2(x, \xi) = \|\xi\|^2 \\ \sigma_1(x, \xi) = i(\Gamma^\mu - 2\sigma^\mu)(x) \xi_\mu \\ \sigma_0(x, \xi) = -(\partial^{x\mu} \sigma_\mu + \sigma^\mu \sigma_\mu - \Gamma^\mu \sigma_\mu)(x) + \tfrac{1}{4} s(x) \end{cases} \tag{8a}$$

Nous voulons calculer une paramétrique D^{-2} de D^2 jusqu'à l'ordre -4 en utilisant la recette suivante : cela revient à calculer les parties $\sigma_k, k = 2, 3, 4$, dans le développement du symbole complet σ de D^{-2} en termes d'ordre décroissant :

$$\sigma^{D^{-2}} = \sigma = \sigma_{-2} + \sigma_{-3} + \sigma_{-4} + \text{ termes d'ordre } \leqslant -5. \tag{9}$$

L'application de (7) avec $P = D^2$ et $Q = D^{-2}$ amène aux ordre respectifs 0, -1, -2 les relations de récurrence :

$$\sigma_2 \sigma_{-2} = 1 \tag{10}$$

$$\sigma_2 \sigma_{-3} + \sigma_1 \sigma_{-2} - i\partial_\xi^\mu \sigma_2 \,.\, \partial_\mu^x \sigma_{-2} = 0 \tag{11}$$

$$\sigma_2 \sigma_{-4} + \sigma_1 \sigma_{-3} + \sigma_0 \sigma_{-2} - i\partial_\xi^\mu \sigma_2 \,.\, \partial_\mu^x \sigma_{-3} - i\partial_\xi^\mu \sigma_1 \,.\, \partial_\mu^x \sigma_{-2} - \tfrac{1}{2}\partial_\xi^{\mu\nu} \sigma_2 \,.\, \partial_{\mu\nu}^x \sigma_{-2} = 0 \tag{12}$$

ici les termes pertinents sont lus dans les tableaux de produits ci-dessous $\partial_\xi^\alpha \sigma_p(x,\xi) \,.\, \partial_\alpha^x \sigma_q(x,\xi)$:

$|\alpha| = 0$

	σ_2	σ_1	σ_0
σ_{-2}	0	-1	-2
σ_{-3}	-1	-2	-3
σ_{-4}	-2	-3	-4

$|\alpha| = 1$

	σ_2	σ_1	σ_0
σ_{-2}	-1	-2	-3
σ_{-3}	-2	-3	-4
σ_{-4}	-3	-4	-5

$|\alpha| = 2$

	σ_2	σ_1	σ_0
σ_{-2}	-2	-3	-4
σ_{-3}	-3	-4	-5
σ_{-4}	-4	-5	-6

Avec les σ_k comme en (8a), on obtient :

$$\sigma_{-2} = \|\xi\|^{-2}, \qquad \text{(10a)}$$

$$\|\xi\|^2 \sigma_{-3} + i\|\xi\|^2(\Gamma^\mu - 2\sigma^>\mu)\xi_\mu - i\partial_\xi^\mu \|\xi\|^2 \,.\, \partial_\mu^x \|\xi\|^2 = 0, \tag{11a}$$

$$\begin{aligned}&\|\xi\|^2 \sigma_{-4} + i(\Gamma^\mu - 2\sigma^\mu)\xi_\mu \sigma_{-3} - \|\xi\|^2[(\partial^{x\mu}\sigma_\mu + \sigma^\mu\sigma_\mu - \Gamma^\mu\sigma_\mu) \\ &\quad + \tfrac{1}{4}\|\xi\|^2 s(x) - i\partial_\xi^\mu \|\xi\|^2 \,.\, \partial_\mu^x \sigma_{-3} + (\Gamma^\nu - 2\sigma^\nu)\delta_\nu^\mu \,.\, \partial_\mu^x \|\xi\|^{-2} \\ &\quad - \tfrac{1}{2}\partial_\xi^{\mu\nu}\|\xi\|^2 \,.\, \partial_{\mu\nu}^x \|\xi\|^{-2}] = 0.\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}
\partial_\xi^\mu \|\xi\|^2 &= 2\xi^\mu, \partial_\xi^\mu \|\xi\|^{-2} = -2\|\xi\|^{-4}\xi^\mu, \partial_\xi^\mu \|\xi\|^{-4} = -4\|\xi\|^{-6}\xi^\mu, \partial_\xi^\mu \|\xi\|^{-6} = -6\|\xi\|^{-8}\xi^\mu, \\
\partial_\mu^x \|\xi\|^2 &= \xi^\alpha\xi^\beta\partial_\mu^x g^{\alpha\beta}, \partial_\mu^x \|\xi\|^{-2} = -\|\xi\|^{-4}\xi_\alpha\xi_\beta\partial_\mu^x g^{\alpha\beta}, \partial_\mu^x \|\xi\|^{-6} = -3\|\xi\|^{-8}\xi_\alpha\xi_\beta\partial_\mu^x g^{\alpha\beta}, \\
\partial_\xi^{\mu\nu} \|\xi\|^2 &= 2g^{\mu\nu}, \qquad (13) \\
\partial_{\mu\nu}^x \|\xi\|^{-2} &= -\|\xi\|^{-4}\xi_\alpha\xi_\beta\partial_{\mu\nu}^x g^{\alpha\beta} + 2\|\xi\|^{-6}\xi_\alpha\xi_\beta\partial_\mu^x g^{\alpha\beta}\xi_\gamma\xi_\delta\partial_\nu^x g^{\gamma\delta},
\end{aligned}$$

on obtient

$$i\sigma_{-3} = \|\xi\|^{-4}\xi_\mu(\Gamma^\mu - 2\sigma^\mu) + 2\|\xi\|^{-6}\xi^\mu\xi_\alpha\xi_\beta\partial_\mu^x g^{\alpha\beta} \tag{11b}$$

et

$$\begin{aligned}
\sigma_{-4} &= -i\|\xi\|^{-2}(\Gamma^\mu - 2\sigma^\mu)\xi_\mu\sigma_{-3} + \|\xi\|^{-4}(\partial^{x\mu}\sigma_\mu + \sigma^\mu\sigma_\mu - \Gamma^\mu\sigma_\mu) \\
&\quad -\tfrac{1}{4}\|\xi\|^{-4}s(x) + 2i\|\xi\|^{-2}\xi^\mu \,.\, \partial_\mu^x\sigma_{-3} + \|\xi\|^{-6}\xi_\alpha\xi_\beta(\Gamma^\mu - 2\sigma^\mu)\partial_\mu^x g^{\alpha\beta} \\
&\quad +\tfrac{1}{2}\|\xi\|^{-2}\partial_\xi^{\mu\nu}\|\xi\|^2 \,.\, \partial_{\mu\nu}^x\|\xi\|^{-2} \\
&= -\|\xi\|^{-6}\xi_\mu\xi_\nu(\Gamma^\mu - 2\sigma^\mu)(\Gamma^\nu - 2\sigma^\nu) \\
&\quad -2\|\xi\|^{-8}\xi^\mu\xi_\nu\xi_\alpha\xi_\beta(\Gamma^\nu - 2\sigma^\nu)\partial_\mu^x g^{\alpha\beta} + \|\xi\|^{-4}(\partial^{x\mu}\sigma_\mu + \sigma^\mu\sigma_\mu - \Gamma^\mu\sigma_\mu) \\
&\quad -\tfrac{1}{4}\|\xi\|^{-4}s(x) - 2i\|\xi\|^{-2}\xi^\mu \,.\, \partial_\mu^x\sigma_{-3} + \|\xi\|^{-6}\xi_\alpha\xi_\beta(\Gamma^\mu - 2\sigma^\mu)\partial_\mu^x g^{\alpha\beta} \\
&\quad -\|\xi\|^{-6}\xi_\alpha\xi_\beta g^{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}^x g^{\alpha\beta} + 2\|\xi\|^{-8}\xi_\alpha\xi_\beta\xi_\gamma\xi_\delta g^{\mu\nu}\partial_\mu^x g^{\alpha\beta}\partial_\nu^x g^{\gamma\delta}.
\end{aligned} \tag{12b}$$

En regroupant les termes et en insérant

$$\begin{aligned}i\partial^x_\mu\sigma_{-3} &= -2\|\xi\|^{-6}\xi_\nu\xi_\alpha\xi_\beta(\Gamma^\nu-2\sigma^\nu)\partial^x_\mu g^{\alpha\beta}+\|\xi\|^{-4}\xi_\nu\partial^x_\mu(\Gamma^\nu-2\sigma^\nu)\\ &\quad -6\|\xi\|^{-8}\xi^\nu\xi_\alpha\xi_\beta\xi_\gamma\xi_\delta\partial^x_\mu g^{\alpha\beta}\partial^x_\nu g^{\gamma\delta}+2\|\xi\|^{-6}\xi_\alpha\xi_\gamma\xi_\delta\partial^x_\mu g^{\nu\alpha}\partial^x_\nu g^{\gamma\delta}\\ &\quad +2\|\xi\|^{-6}\xi^\nu\xi_\gamma\xi_\delta\partial^x_{\mu\nu}g^{\gamma\delta},\end{aligned}\tag{14}$$

nous obtenons pour σ_{-4} la somme de termes :

$$\begin{aligned}A &= -\|\xi\|^{-6}\xi_\mu\xi_\nu\Gamma^\mu\Gamma^\nu+\|\xi\|^{-4}[g_{\mu\nu}-4\|\xi\|^{-2}\xi_\mu\xi_\nu][\sigma^\mu\sigma^\nu-\Gamma^\nu\sigma^\nu],\\ B &= \|\xi\|^{-4}\partial^{x\mu}\sigma_\mu-\tfrac{1}{4}\|\xi\|^{-4}s,\\ C &= -6\|\xi\|^{-8}\xi^\mu\xi_\nu\xi_\alpha\xi_\beta(\Gamma^\nu-2\sigma^\nu)\partial^x_\mu g^{\alpha\beta},\\ D &= 2\|\xi\|^{-6}\xi^\mu\xi_\nu\partial^x_\mu(\Gamma^\nu-2\sigma^\nu),\\ E &= -12\|\xi\|^{-10}\xi^\mu\xi^\nu\xi_\alpha\xi_\beta\xi_\gamma\xi_\delta\partial^x_\mu g^{\alpha\beta}\partial^x_\nu g^{\gamma\delta},\\ F &= 4\|\xi\|^{-8}\xi^\mu\xi_\alpha\xi_\gamma\xi_\delta\partial^x_\mu g^{\nu\alpha}\partial^x_\nu g^{\gamma\delta},\\ G &= \|\xi\|^{-6}\xi_\alpha\xi_\beta(\Gamma^\mu-2\sigma^\mu)\partial^x_\mu g^{\alpha\beta},\\ H &= 4\|\xi\|^{-8}\xi^\mu\xi^\nu\xi_\gamma\xi_\delta\partial^x_{\mu\nu}g^{\gamma\delta},\\ K &= -\|\xi\|^{-6}\xi_\alpha\xi_\beta g^{\mu\nu}\partial^x_{\mu\nu}g^{\alpha\beta},\\ L &= 2\|\xi\|^{-8}\xi_\alpha\xi_\beta\xi_\gamma\xi_\delta g^{\mu\nu}\partial^x_\mu g^{\alpha\beta}\partial^x_\nu g^{\gamma\delta}.\end{aligned}\tag{15}$$

Nous devons prendre la trace de Clifford et intégrer sur la sphère S^3 (procédures de commutation). Grâce à (1a), tous les termes linéaires en σ_μ s'évanouissent sous la trace de Clifford. Nous procédons à l'intégration sur S^3, en utilisant les faits suivants : nous avons, en utilisant le raccourci $\int = \dfrac{1}{2\pi^2}\displaystyle\int_{\xi\in S^3} d^3v$:

$$\left\{\begin{array}{l}\int\xi^\mu\xi^\nu=\dfrac{1}{4}[^{\mu\nu}]\\ \int\xi^\mu\xi^\nu\xi^\alpha\xi^\beta=\dfrac{1}{3\,.\,2^3}[^{\mu\nu\alpha\beta}]\\ \int\xi^\mu\xi^\nu\xi^\alpha\xi^\beta\xi^\gamma\xi^\delta=\dfrac{1}{3\,.\,2^6}[^{\mu\nu\alpha\beta\gamma\delta}]\end{array}\right.\tag{16}$$

où $[^{\mu\nu\cdots\gamma\delta}]$ représente la somme des produits des $g^{\alpha\beta}$ déterminés par tous les "appariements" de $\mu\nu\ldots\gamma\delta$. En faisant la moyenne sur S^3, les termes qui subsistent dans (15) amènent à (nous écrivons maintenant ∂_μ à la place de ∂^x_μ sans risque de confusion, et nous utilisons le fait qu'on a, $\cong$ indiquant l'équivalence quand on multiplie par l'expression symétrique en $\alpha\beta$, et γ, δ) :

$$[^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta\gamma\delta}]\cong g^{\mu\nu}[_{\alpha\beta\gamma\delta}]+2\delta^\mu_\alpha[^\nu{}_{\beta\gamma\delta}]+2\delta^\mu_\gamma[^\nu{}_{\alpha\beta\delta}],\tag{17}$$

nous obtenons les termes [5] :

$$
\begin{aligned}
A &\to -\frac{1}{4}[{}_{\mu\nu}]\Gamma^\mu\Gamma^\nu = -\frac{1}{4}g_{\mu\nu}\Gamma^\mu\Gamma^\nu,\\
B &\to -\frac{1}{4}s,\\
C &\to -6\frac{1}{3.2^3}[^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}]\Gamma^\nu\partial_\mu g^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4}\Gamma^\mu g_{\alpha\beta}\partial_\mu g^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\Gamma^\nu g_{\nu\beta}\partial_\mu g^{\mu\beta},\\
D &\to 2\frac{1}{4}[^{\mu}{}_{\nu}]\partial_\mu\Gamma^\nu = \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu\partial_\mu\Gamma^\nu = \frac{1}{2}\partial_\mu\Gamma^\mu,\\
E &\to -12\frac{1}{3\ .\ 2^6}[^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta\gamma\delta}]\partial_\mu g^{\alpha\beta}\partial_\nu g^{\gamma\delta}\\
&\quad = -\frac{1}{16}g^{\mu\nu}g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}\partial_\mu g^{\alpha\beta}\partial_\nu g^{\gamma\delta} - \frac{1}{8}g^{\mu\nu}g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}\partial_\nu g^{\alpha\beta}\partial_\mu g^{\gamma\delta}\\
&\quad\quad -\frac{1}{8}g_{\gamma\delta}\partial_\mu g^{\mu\nu}\partial_\nu g^{\gamma\delta} - \frac{1}{4}g_{\beta\delta}\partial_\mu g^{\mu\beta}\partial_\nu g^{\nu\delta}\\
&\quad\quad -\frac{1}{4}g_{\beta\delta}\partial_\mu g^{\nu\beta}\partial_\nu g^{\mu\delta} - \frac{1}{8}g_{\alpha\beta}\partial_\mu g^{\alpha\beta}\partial_\nu g^{\mu\nu},\\
F &\to 4\frac{1}{3\ .\ 2^3}[^{\mu}{}_{\alpha\gamma\delta}]\partial_\mu g^{\nu\alpha}\partial_\nu g^{\gamma\delta}\\
&\quad = \frac{1}{6}g_{\gamma\delta}\partial_\mu g^{\mu\nu}\partial_\nu g^{\gamma\delta} + \frac{1}{3}g_{\alpha\delta}\partial_\mu g^{\nu\alpha}\partial_\nu g^{\mu\delta},\\
G &\to \frac{1}{4}[{}_{\alpha\beta}]\Gamma^\mu\partial_\mu g^{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\Gamma^\mu g_{\alpha\beta}\partial_\mu g^{\alpha\beta},\\
H &\to 4\frac{1}{3\ .\ 2^3}[^{\mu\nu}{}_{\gamma\delta}]\partial_{\mu\nu}g^{\gamma\delta} = \frac{1}{6}[g^{\mu\nu}g_{\gamma\delta} + 2\delta^\mu_\gamma\delta^\nu_\delta]\partial_{\mu\nu}g^{\gamma\delta},\\
K &\to -\frac{1}{4}[{}_{\alpha\beta}]g^{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}g^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4}g_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}g^{\alpha\beta} = \frac{1}{4}g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}g_{\alpha\beta},\\
L &\to 2\frac{1}{3\ .\ 2^3}g^{\mu\nu}[{}_{\alpha\beta\gamma\delta}]\partial_\mu g^{\alpha\beta}\partial_\nu g^{\gamma\delta}\\
&\quad = \frac{1}{12}g^{\mu\nu}[g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta} + 2g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}]\partial_\mu g^{\alpha\beta}\partial_\nu g^{\gamma\delta}.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Nous convertissons maintenant en les expressions suivantes dans lesquelles les dérivées partielles

5. Un compte-rendu ligne par ligne de ces calculs est disponible dans le rapport de recherche marseillais CPT-93/P.2970.

agissent sur les $g^{\alpha\beta}$ avec exposants[6]) :

$$\begin{cases} U & = g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}\partial_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta} \\ X & = g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}\partial_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} \\ hhG & = g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}g^{\sigma\tau}\partial_{\alpha}g_{\beta\sigma}\partial_{\gamma}g_{\delta\tau} \\ ghH & = g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}g^{\sigma\tau}\partial_{\alpha}g_{\beta\sigma}\partial_{\tau}g_{\gamma\delta} \\ gg\Delta & = g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}g^{\sigma\tau}\partial_{\sigma}g_{\alpha\beta}\partial_{\tau}g_{\gamma\delta} \\ GHH & = g^{\mu\sigma}g^{\alpha\eta}g^{\xi\beta}\partial_{\mu}g_{\eta\xi}\partial_{\alpha}g_{\beta\sigma} \\ \Delta GG & = g^{\mu\sigma}g^{\alpha\eta}g^{\xi\beta}\partial_{\mu}g_{\eta\xi}\partial_{\sigma}g_{\alpha\beta} \end{cases} \quad , \tag{19}$$

où g, G, h, H, Δ, dénotent les contractions entre les paires d'indices suivantes : indices des lettres g (identiques ou différentes), indices des lettres g et ∂ (proche ou éloigné), indices des lettres ∂ et ∂.

En utilisant les faits :

$$\Gamma^{\mu} = g^{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}g^{\mu\sigma}\Gamma_{\alpha\beta,\sigma} = g^{\alpha\beta}g^{\mu\sigma}[\partial_{\alpha}g_{\beta\sigma}-\frac{1}{2}\partial_{\sigma}g_{\alpha\beta}], \tag{20}$$

et

$$\partial_{\mu}g^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\sigma}g^{\beta\tau}\partial_{\mu}g_{\sigma\tau} \quad , \qquad g_{\alpha\gamma}\partial_{\mu}g^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta}\partial_{\mu}g_{\alpha\gamma} \quad , \tag{21}$$

nous obtenons :

$$A \quad \to -\frac{1}{4}hhG + \frac{1}{4}ghH - \frac{1}{16}gg\Delta, \tag{22}$$

$$C \quad \to \frac{1}{2}hhG - \frac{1}{8}gg\Delta, \tag{23}$$

$$D \quad \to \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}U - \frac{1}{2}hhG + \frac{1}{4}ghH - \frac{1}{2}GHH + \frac{1}{4}\Delta GG, \tag{24}$$

$$E \quad \to -\frac{1}{4}ghH - \frac{1}{4}hhG - \frac{1}{16}gg\Delta - \frac{1}{8}\Delta GG - \frac{1}{4}GHH, \tag{25}$$

$$F \quad \to \frac{1}{6}ghH + \frac{1}{3}GHH, \tag{26}$$

$$G \quad \to -\frac{1}{4}ghH + \frac{1}{8}gg\Delta, \tag{27}$$

$$H \quad \to -\frac{1}{6}U - \frac{1}{3}X - \frac{1}{3}\Delta GG + \frac{1}{3}GHH + \frac{1}{3}hhG, \tag{28}$$

$$K \quad \to \frac{1}{4}U - \frac{1}{2}\Delta GG, \tag{29}$$

$$L \quad \to \frac{1}{12}gg\Delta + \frac{1}{6}\Delta GG. \tag{30}$$

La somme de ces termes est égale à :

$$-\frac{1}{6}\left[U - X + hhG - ghH + \frac{1}{4}gg\Delta + \frac{1}{2}GHH + \frac{3}{4}\right] = \frac{1}{6}s, \tag{31}$$

6. indices en haut

qui, ajouté à la contribution $-\frac{1}{4}s$ du terme B, amène au Théorème [1].

Nous étudions maintenant le cas des opérateurs de Dirac [5]. Soit $\mathbf{M}$ une variété riemannienne compacte, en dénotant par $\mathbb{C}l_M$ l'ensemble des sections lisses du fibré vectoriel avec la fibre sur $x \in \mathbf{M}$ l'algèbre de Clifford sur l'espace cotangent de x (une algèbre complexe $\mathbb{Z}/2$-échelonnée et $C^\infty(\mathbf{M})$-module), nous considérons maintenant un fibré vectoriel lisse additionnel $\mathscr{V}$ sur $\mathbf{M}$ (avec $C^\infty(\mathbf{M})$-module de sections lisses W), équipé d'une connexion $\nabla^{\mathscr{V}}$, avec tenseur de courbure correspondant $R^{\mathscr{V}}$. Nous considérons le fibré vectoriel produit tensoriel $S \otimes \mathscr{V}$ [avec $C^\infty(\mathbf{M})$-module de sections lisses $\mathbb{S}_{\mathbf{M}} \otimes w$] qui devient un *fibré de Clifford* à travers la définition :

et que nous équipons avec la *connexion composée* :

$$\overline{\nabla}_\xi = \widetilde{\nabla}_\xi \otimes \mathrm{id}_w + \mathrm{id}_{\mathbb{S}_M} \otimes \nabla_\xi^{\mathscr{V}}, \qquad \xi, \eta \in \chi(\mathbf{M}), \tag{33}$$

la dernière devenant une *connexion de Clifford* au sens où :

où ∇ est la connexion de $\mathbb{C}l_{\mathbf{M}}$ induite par la connexion de Levi-Civita de $\mathbf{M}$. L'*opérateur de Dirac twisté* correspondant $\mathbb{D}$, et *le laplacien de connexion twisté* Δ sont alors respectivement localement spécifiés comme suit

$$\mathbb{D} = ic(dx^\mu)\overline{\nabla}_\mu, \tag{35}$$

et

$$\underline{\Delta} = -g^{\mu\nu}(\overline{\nabla}_\mu \overline{\nabla}_\nu - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\overline{\nabla}_\alpha). \tag{36}$$

Nous avons les formules suivantes de Lichnérowicz pour le carré de l'opérateur de Dirac twisté :

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^2 &= \underline{\Delta} - \frac{1}{2}\mathbf{R}^{\mathscr{V}}(\partial_\mu, \partial_\nu)c(dx^\mu)c(dx^\nu) + \frac{1}{4}s \\ &= \underline{\Delta} - \frac{1}{2}\gamma(dx^\mu)\gamma(dx^\nu) \otimes \mathbb{R}^{\mathscr{V}}(\partial_\mu, \partial_\nu) + \frac{1}{4}s \otimes \mathrm{id}_w.\end{aligned} \tag{31}$$

2. Proposition. *Le résidu de Wodzicki de $\mathbb{D}^{-2}$ coïncide avec celui de D^{-2}, et amène ainsi à un multiple de l'action d'Einstein-Hilbert.*

Preuve. Dénotons par $a_\mu dx^\mu$ la connexion une-forme de la connexion $\nabla^{\mathscr{V}}$: la connexion une-forme de la connexion composée (33) se lit alors :

$$\overline{\sigma}_\mu = \sigma_\mu \otimes \mathrm{id}_w + id_{\mathbb{S}_M} \otimes a_\mu = {}''\sigma_\mu + a_\mu{}'', \tag{33a}$$

le calcul du résidu de Wodzicki residue de $\mathbb{D}^{-2}$ est alors obtenu de celui de D^{-2} à travers les changements suivants :

$$\begin{cases} \sigma_\mu & \to \overline{\sigma}_\mu = \sigma_\mu + a_\mu \\ s & \to \mathbb{S} = s - 2R^{\mathscr{V}}_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu, \end{cases} \tag{38}$$

avec les remplacements correspondant $A \to \mathbb{A}$ à $L \to \mathbb{L}$ que nous calculons maintenant. Le terme $\mathbb{A}$, obtenu de A à travers le changement $\sigma_\mu \to \overline{\sigma}_\mu$, s'évanouit comme le dernier dans l'intégration sur

S^3. Comme pour les autres termes, nous avons les changements suivants, qui amènent aux résultats indiqués après avoir pris la trace de Clifford et avoir intégré sur S^3 :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{B} - B &= \|\xi\|^{-4}\partial^{x\mu}a_\mu + \frac{1}{2}\|\xi\|^{-4}R^{\mathscr{V}}_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu \to \partial^\mu a_\mu, \\
\mathbb{C} - C &= 12\|\xi\|^{-8}\xi^\mu\xi_\nu\xi_\alpha\xi_\beta a^\nu\partial^x_\mu g^{\alpha\beta} \to 12\frac{1}{3\,.\,2^3}[^\mu{}_{\nu\alpha\beta}]a^\nu\partial_\mu g^{\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{2}a^\mu g_{\alpha\beta}\partial_\mu g^{\alpha\beta} + a^\nu g_{\nu\beta}\partial_\alpha g^{\alpha\beta}, \\
\mathbb{D} - D &= -4\|\xi\|^{-6}\xi^\mu\xi_\nu\partial^x_\mu a^\nu \to -\delta^\mu_\nu\partial_\mu a^\nu = -\partial_\mu a^\mu = -\partial_\mu(g^{\mu\nu}a_\nu) \\
&= -g^{\mu\nu}\partial_\mu a_\nu - a_\nu\partial_\mu g^{\mu\nu} = -\partial^\mu a_\mu - a_\nu\partial_\mu g^{\mu\nu}, \\
\mathbb{E} - E &= 0 \\
\mathbb{F} - F &= 0 \\
\mathbb{G} - G &= -2\|\xi\|^{-6}\xi_\alpha\xi_\beta a^\mu\partial^x_\mu g^{\alpha\beta} \to -\frac{1}{2}a^\mu g_{\alpha\beta}\partial_\mu g^{\alpha\beta}, \\
\mathbb{H} - H &= 0 \\
\mathbb{K} - K &= 0 \\
\mathbb{L} - L &= 0
\end{aligned}
\tag{39}
$$

qui s'additionnent en donnant zero.

En fait, le résultat ci-dessus peut être généralisé plus avant aux opérateurs de Dirac (twistés généralisés) appartenant aux connexions de Clifford des fibrés généraux de Clifford [5]. Dénotons par $\mathscr{E}$ un fibré vectoriel $\mathbb{Z}/2$-échelonné sur $\mathbf{M}$, de $C^\infty(\mathbf{M})$-module de sections lisses $\mathbf{E}$: $\mathscr{E}$ est appelé un *fibré de Clifford* à chaque fois qu'il y a un homomorphisme d'algèbres complexes $\mathbb{Z}/2$-échelonnées $c : \mathbb{C}l_M \to \mathrm{End}_{C^\infty(\mathbf{M})}\mathbf{E}$. De plus, une connexion $\overline{\nabla}$ de $\mathscr{E}$ est appelée une *connexion de Clifford* à chaque fois que tous les $\overline{\nabla}_\xi, \xi \in \chi(\mathbf{M})$, sont pairs, et on a

$$[\overline{\nabla}_\xi, c(a)] = c(\nabla_\xi, c(a)] = c(\nabla_\xi a), \qquad a \in \mathbb{C}l_{\mathbf{M}}, \xi \in \chi(\mathbf{M}) \tag{34a}$$

(généralisant (34)). Ces éléments spécifient alors de la façon suivante un opérateur de Dirac généralisé $\mathbb{D}_{\overline{\nabla}}$:

$$\mathbb{D}^2_{\overline{\nabla}} = ic(dx^\mu)\overline{\nabla}_\mu \tag{35a}$$

(généralisant (35)) donnant naissance à la formule généralisée de Lichnérowicz

$$\mathbb{D}^2_{\overline{\nabla}} = \underline{\Delta} - \frac{1}{2}F^{\mathscr{E}/S}(\partial_\mu, \partial_\nu)c(dx^\mu)c(dx^\nu) + \frac{1}{4}s, \tag{37a}$$

où $F^{\mathscr{E}/S}$ est ce qu'on appelle la *courbure twistée* du fibré $\mathscr{E}$ [5, Proposition 3.43].

Le remplacement $R^{\mathscr{V}} \to F^{E/S}$ laisse alors le calcul ci-dessus inchangé, ce qui fait qu'on a :

3. Proposition. *Le résidu de Wodzicki de $\mathbb{D}^{-2}_{\overline{\nabla}}$ amène encore un multiple de l'action d'Einstein-Hilbert.*

Appendice. L'action d'Einstein-Hilbert. La courbure scalaire

Soit $\mathbf{M}$ une variété riemannienne 4-dimensionnelle de métrique g (induisant l'élément de volume dv et le produit scalaire $(.,.)$ sur les tenseurs), la connexion de Levi-Civita ∇ est définie comme suit par rapport aux coordonnées locales :

$$\nabla\partial_\imath = \Gamma^k_{\imath\jmath}\partial_k dx^\jmath \qquad \text{avec} \begin{cases} \Gamma^k_{ij} = g^{km}\Gamma_{ij,m} \\ \Gamma_{\imath\jmath,m} = \frac{1}{2}[\partial_\imath g_{\jmath m} + \partial_\jmath g_{\imath m} - \partial_m g_{\imath\jmath}] \end{cases} \tag{A.1}$$

La courbure correspondante ∇^2 est la deux-forme avec les endomorphismes de valeurs du fibré tangent de **M** donnée localement par la matrice :

$$R^{\jmath}_{k} = d\omega^{j}_{k} + \omega^{j}_{s} \wedge \omega^{s}_{k} = \frac{1}{2} R^{j}_{kmn} dx^{m} \wedge dx^{n}, \tag{A.2}$$

explicitement donnée par :

$$R^{\imath}_{kmn} = \partial_m \Gamma^{i}_{\ nk} - \partial_n \Gamma^{i}_{\ mk} \Gamma^{i}_{\ ms} \Gamma^{s}_{\ nk} - \Gamma^{\imath}_{\ ns} \Gamma^{s}_{\ mk}, \tag{A.3}$$

et alternativement par :

$$\begin{aligned} R_{jkmn} = g_{\imath\jmath} R^{j}_{kmn} \quad &= \frac{1}{2} \partial_m (\partial_k g_{nj} - \partial_j g_{nk}) - \frac{1}{2} \partial_n (\partial_k g_{mj} - \partial_j g_{mk}) \\ &\qquad + g_{st} \Gamma^{s}_{\ nj} \Gamma_{mk} - g_{st} \Gamma^{s}_{\ mj} \Gamma^{t}_{\ nk} \\ &= \frac{1}{2} \partial_m (\partial_k g_{nj} - \partial_j g_{nk}) - g_{st} \Gamma^{s}_{\ mj} \Gamma^{t}_{\ nk} - (m \leftrightarrow n). \end{aligned} \tag{A.4}$$

La courbure scalaire correspondante est

$$s = R^{mn}_{mn} = g^{m\jmath} g^{nk} R_{jkmn} = -(g^{mi} g^{nk} - g^{ni} g^{mk}) [\partial_{mi} g_{nk} + g_{st} \Gamma^{s}_{\ mi} \Gamma^{t}_{\ nk}]. \tag{A.5}$$

En utilisant les raccourcis de (21), on a :

$$s = X - U - hhG + ghH - \frac{1}{4} gg\Delta - \frac{1}{2} GHH + \frac{3}{4} \Delta GG. \tag{A.6}$$

La *densité de l'action d'Einstein-Hilbert* est par définition :

$$L_g = R_{ik} \wedge *(dx^{i} \wedge dx^{k}) = \frac{1}{2} R_{ikmn} (dx^{m} \wedge dx^{n}) * (dx^{i} \wedge dx^{k}), \tag{A.7}$$

alternativement :

$$L_g = \mathscr{L}_g dv, \tag{A.8}$$

avec la densité lagrangienne

$$\begin{aligned} \mathscr{L} \quad &= \frac{1}{2} R_{\imath kmn} g(dx^{m} \wedge dx^{n}, dx^{\imath} \wedge dx^{k}) = \frac{1}{2} (g^{\imath m} g^{nk} - g^{in} g^{mk}) R_{ikmn} \\ &= g^{\imath m} g^{nk} R_{\imath kmn} = R^{mn}_{mn} = s. \end{aligned} \tag{A.9}$$

Note. Après avoir terminé ce travail, nous avions la visite à Marseille de Markus Walze et Wolfgang Kalau de Mayence (R.F.A.), qui nous ont rapporté un calcul analogue (en utilisant les coordonnées normales) amenant aux mêmes résultats.

Références

[1] Connes, A. : communication privée.

[2] Connes, A. : Non-commutative geometry and physics. Proceedings of the Les Houches School, 1992.

[3] Gilkey, P.B. : Invariance theory, the heat equation, and the Atiyah-Singer index theorem. Mathematics Lecture Series 11. Publish or Perish 1984.

[4] Wodzicki, M. : Non-commutative residue, K-Theory, arithmetic and geometry. Yu. Manin (ed). Springer Lecture Notes in Mathematics 1289. Berlin, Heidelberg, New York : Springer 1987.

[4a] Kassel, C. : Le résidu non-commutatif (d'après M. Wodzicki. Séminaire Bourbaki, 41° année, 1988-89, n° 708.

[5] Berline, N., Getzler, E., Vergne, M. : Heat kernels and Dirac operators. Grundlehren der'mathematischen Wissenschaften 298. Berlin, Heidelberg, New York : Springer 1991.

[6] Chamseddine, A.H., Felder, G., Fröhlich, J. : Gravity in non-commutative geometry., Commun. Math. Phys. 158, 205 (1993)

Communiqué par Alain Connes.

Erratum

Page 2
L.3 lire

$$I = 4\mathrm{Tr}_w\{s_{-4}(x,\xi)\} = (2p)^{-4}\int_{\xi\in\sum^3} \mathrm{tr}\{s_{-4}(x,\xi)\}\mathrm{d}^3\xi \ \mathrm{dv}, \tag{3}$$

L.9 lire

$$\mathscr{L}_g = R_{ikmn}(\mathbf{d}x^m \wedge \mathbf{d}x^n, \mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^k) = 2(g^{im}g^{nk} - g^{in}g^{mk})R_{ikmn} = 2\kappa, \tag{5a}$$

L.10 lire

$$I = \frac{1}{3\ .\ 2^5 p^2}\kappa = \frac{1}{3\ .\ 2^6 p^2} L_g$$

Page 3
L.-3

$$\text{à la place de } -\frac{1}{4}\|x\|^{-2}\kappa(x) \text{ lire } -\frac{1}{4}\|x\|^{-4}\kappa(x).$$

Page 11
L.-2

$$\text{à la place de } \frac{1}{4}\kappa \text{ lire } -\frac{1}{4}\kappa$$

Page 12
L.9 lire

$$= \Delta - \frac{1}{2}\underline{\gamma}(\mathrm{d}x^m)\underline{\gamma}(\mathrm{d}x^n) \otimes R^{\nu}(\partial_m, \partial_n) + \frac{1}{4}\kappa \otimes id_w.$$

L'erratum est téléchargeable ici https://cds.cern.ch/record/257106/files/P00019854.pdf.