Un héritage mathématique fertile
Jean Malgoire
© Magazine Pour la Science, n°467, septembre 2016

Janvier 1985, une vague de froid exceptionnelle s'est abattue sur toute l'Europe. Dans sa très modeste masure perdue au milieu des vignes, Alexandre Grothendieck est plongé depuis des mois dans la rédaction de Récoltes et semailles. Le 7 janvier, les rigueurs de l'hiver s'invitent dans son récit et celui-ci nous parle du vent glacé qui descend du mont Ventoux, du potager gelé, des souches de vigne qu'il coupe à la hache chaque jour pour alimenter le poêle auprès duquel il tape sur sa vieille machine à écrire. Mais rien n'entame son ardeur et ce qui devait être une introduction à un texte purement mathématique deviendra un ouvrage autonome de plus de 1500 pages...

Dans le premier fascicule sous-titré "Promenade à travers une œuvre - ou l'enfant et la mère", il parle avec passion des grands thèmes mathématiques qu'il a développés au cours de sa carrière et de la spécificité de sa démarche ; et cela dans un langage "non technique" accessible à des lecteurs non mathématiciens auxquels il s'adresse individuellement : *"[...]aussi si tu "accroches" à ce que je vois à dire sur mon œuvre (et sûrement alors quelque chose de l'image en moi "passera" bel et bien), tu pourras te flatter d'avoir mieux saisi ce qui fait l'essentiel dans mon œuvre, qu'aucun peut-être de mes savants collègues".* Peut-on rêver meilleur guide ?

Au fil de sa promenade, Grothendieck cite une liste des douze idées maîtresses de son œuvre mathématique. Parmi ces thèmes, explique-t-il, certains sont à l'état embryonnaire, d'autres sont encore dans leur enfance, mais la moitié ont atteint une telle maturité que *"parmi la gent géomètre surtout, "tout le monde" de nos jours les entonne sans même plus le savoir (comme Monsieur Jourdain faisait de la prose), à longueur de jour et à tout moment".* La notion de topos est l'un de ces thèmes, et pas n'importe lequel. Pour Grothendieck, il s'agit de l'idée majeure de son œuvre, la plus vaste par sa portée :

Le thème du topos est ce "lit", ou cette

> *"rivière profonde", où viennent s'épouser la géométrie et l'algèbre, la topologie et l'arithmétique, la logique mathématique et la théorie des catégories, le monde du continu et celui des structures "discontinues" ou "discrètes" Si le thème des schémas est comme le cœur de la géométrie nouvelle, le thème du topos en est l'enveloppe, ou la demeure. Il est ce que j'ai conçu de plus vaste, pour saisir avec finesse, par un même langage riche en résonances géométriques, une "essence" commune à des situations des plus éloignées les unes des autres, provenant de telle région ou de telle autre du vaste univers des choses mathématiques.*

C'est aussi une porte d'entrée vertigineuse dans la pensée mathématique de Grothendieck.

En 1958, le mathématicien, devenu célèbre après avoir démontré une généralisation du théorème de Riemann-Roch [1], pose les bases d'une géométrie nouvelle en introduisant la notion de schéma. A l'époque la géométrie algébrique est divisée en plusieurs domaines aux interactions limitées : des domaines où les objets sont perçus comme continus (géométrie analytique, géométrie algébrique classique sur le corps des nombres réels ou le corps des nombres complexes) et d'autres où ils sont discontinus (géométrie arithmétique sur les corps finis, par exemple).

Les schémas fournissent une autre façon, généralisée, de voir les objets de la géométrie algébrique, c'est-à-dire les variétés algébriques - par exemple des surfaces définies par une équation polynomiale

note : Jean Malgoire, ancien élève de Grothendieck, est maître de conférences à l'Université de Montpellier.

1. voir l'article de Winfried Scharlau, pages 22 à 29 du même numéro.

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (équation d'une sphère) ; cette vision permet d'englober même les structures discontinues - discrètes - de la géométrie arithmétique [2].

Pour Grothendieck, les schémas constituent ainsi "le cœur" de la nouvelle géométrie, l'outil qui unifie les géométries algébrique et arithmétique. Mais ce sont les topos, notion introduite en 1963 [3], qui forment "la demeure" de la nouvelle géométrie. Les topos sont une métamorphose de la notion d'espace. Ils permettent d'appliquer une vision topologique subtile aux objets de la géométrie algébrique (les variétés ou leur généralisation, les schémas). Les schémas et les topos créent en quelque sorte un pont entre le discret et le continu.

Dans l'histoire du concept mathématique d'espace, les topos constituent un dépaysement soudain, explique Grothendieck :

> *"Jusqu'à l'apparition du point de vue des topos, vers la fin des années cinquante, l'évolution de la notion d'espace m'apparaît comme une évolution essentiellement "continue"* [4]*.*
> *La notion d'"espace" est sans doute une des plus anciennes en mathématique. Elle est si fondamentale dans notre appréhension "géométrique" du monde, qu'elle est restée plus ou moins tacite pendant plus de deux millénaires* [5]*.*
> *Certes, des changements profonds ont eu lieu dans la façon dont le mathématicien ou le "philosophe de la nature" concevait "l'espace". Mais ces changements me semblent tous dans la nature d'une "continuité" essentielle - ils n'ont jamais placé le mathématicien, attaché (comme tout un chacun) aux images mentales familières, devant un dépaysement soudain* [6]*."*

Et pourtant, les précédentes évolutions de la notion d'espace offraient déjà des changements conceptuels considérables.

Les métamorphoses de la notion d'espace

D'abord au XVII^e siècle, grâce à René Descartes et son invention des coordonnées cartésiennes, les figures géométriques se sont métamorphosées en équations : le cercle réapparaît sous la forme "$x^2 + y^2 = 1$". La représentation de l'espace au moyen des nombres est une transformation que l'on peut qualifier de radicale (et qui continue de dérouter les étudiants...).

Puis au XIX^e siècle, le mathématicien allemand Bernhard Riemann introduit la notion de variété abstraite, un espace qui peut être décrit localement par une, deux, trois ou même n coordonnées (espace à n dimensions). Avec Riemann, les variétés se dégagent des espaces ambiants dans lesquels elles sont plongées et prennent leur autonomie : il n'y a plus *a priori* d'extérieur naturel à une variété. Cela a permis par exemple à Einstein de concevoir l'Univers comme une variété qui ne soit pas *a priori* un espace euclidien (dont les lois sont celles de la géométrie traditionnelle d'Euclide). Le progrès est réel, mais la disparition du décor demande un certain effort d'abstraction.

---

2. voir l'article de Winfried Scharlau, pages 22 à 29 du même numéro.
3. Il est aussi question de l'année 1958 dans le passage : *"C'est ce dernier travail surtout qui absorbait le plus gros de mon énergie - un patient et vaste travail de fondements que j'étais le seul à voir clairement et, surtout, à "sentir par les tripes". C'est lui qui a pris, et de loin, la plus grosse part de mon temps, entre 1958 (l'année où sont apparus, coup sur coup, le thème schématique et celui des topos) et 1970 (l'année de mon départ de la scène mathématique)".*
4. début de l'*Épilogue Les cercles invisibles.*
5. Dans *La topologie ou l'arpentage des brumes.*
6. *idem*

Au début du XX$^{\text{e}}$ siècle, les mathématiciens s'aperçoivent que dans les espaces métriques (c'est-à-dire munis d'une notion de distance entre les points), beaucoup de propriétés fondamentales (telle la connexité, qui est la propriété d'un espace d'être "d'un seul tenant", ou la "compacité") ne dépendent pas de la métrique qu'ils portent, mais seulement des parties dites ouvertes de ces espaces. Une partie est dite ouverte si, dès qu'elle contient un point, elle contient une boule centrée en ce point. Par exemple, les ouverts de la droite réelle sont les réunions (quelconques) d'intervalles ouverts, et les ouverts du plan les réunions de disques ouverts, c'est-à-dire privés de leurs bords. De plus, les ouverts ont des propriétés intéressantes qui leur confèrent une certaine stabilité : une réunion quelconque d'ouverts ou une intersection d'un nombre fini d'ouverts est encore un ouvert.

En 1914, le mathématicien allemand Felix Hausdorff s'appuie sur ces propriétés de stabilité pour définir la notion d'espace topologique : un espace topologique est un ensemble E muni d'un ensemble de parties de E appelées ouverts (ou parties ouvertes de E) vérifiant les deux propriétés suivantes :

- l'ensemble E lui-même et l'ensemble vide sont des ouverts,
- et une réunion quelconque d'ouverts ou une intersection d'un nombre fini d'ouverts est encore ouverte.

On dit que l'ensemble des ouverts de E est une topologie sur E. Des concepts antérieurs (comme ceux de variété ou d'espace métrique), la définition d'espace par Hausdorff ne conserve qu'une idée très affaiblie de proximité à travers le concept d'ouvert.

La notion d'espace topologique permet d'appliquer notre intuition "spatiale" à des situations sans métrique naturelle. Par exemple, en géométrie algébrique, grâce à Oscar Zariski, mathématicien d'origine russe de la génération précédant celle de Grothendieck, on sait associer à tout anneau A (c'est-à-dire à tout ensemble muni d'une addition et d'une multiplication, par exemple l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs ou les anneaux de polynômes) un espace topologique Spec A appelé spectre de A. L'espace Spec A n'a pas de métrique naturelle (c'est-à-dire de fonction définissant une distance entre les éléments de Spec A) qui donnerait les ouverts de Spec A. Pourtant, la topologie de Zariski qui définit Spec A en fait bien un espace topologique : pour $\mathbb{Z}$, par exemple, ce spectre est l'ensemble des nombres premiers auquel on adjoint 0, et ses ouverts sont la partie vide et les complémentaires des ensembles formés d'un nombre fini de nombres premiers. Pour un anneau quelconque, le spectre est l'ensemble des "idéaux premiers" (qui sont une généralisation des nombres premiers).

Avec le concept d'espace topologique, les mathématiciens ont vraiment l'impression d'avoir atteint un degré de généralité maximal, en quelque sorte indépassable. De fait, grâce à sa souplesse et à sa simplicité, le concept connaît un grand succès et continue d'être le cadre naturel de la topologie générale. Aussi, si les limitations de cette notion d'espace sont apparues assez naturellement à Grothendieck à la fin des années 1950, il a fallu faire un effort conceptuel considérable pour imaginer comment les dépasser.

Un manque cruel d'ouverts

Pour Grothendieck, les limitations se font particulièrement sentir dans le cadre de la topologie (l'ensemble d'ouverts) que Zariski a définie, par extension, pour les variétés algébriques, car si elle est suffisante pour beaucoup de propos, elle "manque cruellement d'ouverts" : par exemple sur une courbe algébrique sur $\mathbb{C}$, les seuls ouverts non vides pour la topologie de Zariski sont les complémentaires des parties finies de la courbe. Si l'on prend comme courbe la droite affine sur $\mathbb{C}$ (c'est-à-dire le spectre de l'anneau des polynômes à une variable et à coefficients dans $\mathbb{C}$), on trouve l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, et ses ouverts pour la topologie de Zariski sont la partie vide et les complémentaires des parties finies de $\mathbb{C}$, c'est-à-dire le plan privé d'un nombre fini de points. Tous les ouverts (à part le vide) sont donc très gros : on ne peut pas avoir de "petits" voisinages d'un point. En revanche, pour la topologie ordinaire sur le plan complexe, les ouverts sont les réunions quelconques de disques ouverts ; il y a donc beaucoup plus d'ouverts ! Par exemple, autour de chaque point, on peut prendre pour voisinages du point des disques ouverts de rayons aussi petits que l'on souhaite. Ainsi, des espaces X au-dessus d'une variété complexe - c'est-à-dire munis d'une application continue de X vers la variété - peuvent être localement très simples pour la topologie ordinaire sans l'être pour la topologie de Zariski.

Pour pallier cette difficulté, Grothendieck élargit la notion de topologie sur une variété en étendant celle des ouverts à prendre en compte. Il ne se limite plus aux parties ouvertes de la variété, mais accepte aussi certains espaces au-dessus des ouverts, appelés revêtements étales d'ouverts *(voir Encart 1)*.

Cette notion remonte en quelque sorte à Riemann et aux surfaces qu'il inventa au XIX^e siècle pour faciliter l'étude des fonctions multiformes, c'est-à-dire des fonctions mal définies parce qu'elles associent plusieurs valeurs à une même valeur de la variable. Puisque les fonctions donnaient plusieurs valeurs en un même point de l'espace de départ, Riemann a transformé l'espace de départ en feuillets superposés et recollés de telle façon que sur la nouvelle surface constituée - appelée depuis surface de Riemann -, la fonction n'associe plus qu'une seule valeur à chaque valeur de la variable.

D'après Luc Illusie, ancien élève de Grothendieck, l'idée de la localisation étale chez son maître remonte à avril 1958, à l'occasion d'un exposé de Jean-Pierre Serre au séminaire Chevalley, Jean-Pierre Serre avait remarqué qu'élargir la localisation d'un espace au-dessus d'une variété algébrique à des revêtements étales d'ouverts permettait de révéler certaines de ses propriétés. Enthousiaste, Grothendieck a repris l'idée pour élargir la topologie de Zariski. Il voyait même déjà comment cet élargissement aiderait à s'attaquer aux conjectures de Weil.

Depuis leur formulation, en 1949, par André Weil, un des membres fondateurs du groupes de mathématiciens Bourbaki (que Grothendieck a rejoint au début des années 50), ces conjectures font miroiter l'idée que des relations existent entre des informations de nature arithmétique et la topologie. Weil les a énoncées alors qu'il menait des calculs sur le nombre de solutions de certaines équations algébriques dans des ensembles finis de nombres. En substance, les conjectures de Weil relient le nombre de certaines solutions d'une équation algébrique à des propriétés topologique de la variété algébrique décrite par l'équation. Cette relation entre informations arithmétiques et topologie suggérait de construire une théorie plus subtile - une théorie cohomologique - qui permettait d'englober les propriétés arithmétiques et topologiques de la variété. Grothendieck construira une telle théorie quelques années plus tard (la cohomologie étale) et prouvera une partie dse conjectures ; la dernière sera démontrée en 1974 par son élève Pierre Deligne et lui vaudra une médaille Fields.

La genèse des topos

Cependant, en 1958, pris par le considérable travail de refondation de la géométrie algébrique qu'il a entrepris, Grothendieck ne développe pas tout de suite ses idées sur la localisation étale. Tout est dans sa tête, mais il n'y revient que quelques années plus tard, en 1963, avec le séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie n°4 (SGA4) à l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques (IHES), à Bures-sur-Yvette, consacré... à sa nouvelle géométrie. Grothendieck donne alors un cadre mathématique formel à l'idée de localisation étale. Les deux principaux outils qu'il utilise pour cela sont le langage des catégories et la théorie des faisceaux.

La notion de catégorie a été introduite en 1945 par les américains Samuel Eilenberg et Saunders Mac Lane. Elle formalise la notion de classe d'objets, c'est-à-dire d'objets de même nature, et de relations entre ces objets. Une catégorie est d'abord un graphe orienté - des objets et des flèches entre ces objets, qu'on appelle morphismes. Mais on a en plus une composition des flèches généralisant la composition des applications entre ensembles.

Parmi les catégories les plus usitées, citons la catégorie des ensembles (les flèches sont alors les applications entre ensembles), ou celles des groupes, des anneaux, des espaces topologiques, etc. De même, si E est un espace topologique muni d'un ensemble $Ouv(E)$ d'ouverts, alors $Ouv(E)$ est, de manière naturelle, une catégorie (avec pour tout couple d'ouverts U et V tels que V inclus dans U, un seul et unique morphisme de V vers U : l'application inclusion de V dans U).

La "philosophie" des catégories est de mettre l'accent sur les morphismes plutôt que sur les objets eux-mêmes : deux objets isomorphes dans une catégorie sont, du point de vue catégorique, "interchangeables". Et un objet est connu si l'on connaît ses relations à tous les autres objets. Ce résultat élémentaire, mais fondamental, porte le nom de lemme de Yoneda et peut se traduire par : "Dis-moi qui tu fréquentes et je te dirai qui tu es."

Bien évidemment, les mathématiciens s'intéressent aussi aux relations entre catégories. Celles-ci sont formalisées sous la forme de foncteurs, des analogues des applications entre ensembles qui permettent de transporter des objets et les relations entre eux d'un "cadre" (une catégorie) dans un autre (une autre catégorie).

L'autre outil clé que Grothendieck utilise est le concept de faisceau, introduit en 1946 par le mathématicien français Jean Leray. En substance, un faisceau sur un espace topologique est un foncteur qui a la propriété de relier entre elles des données locales pour en faire une donnée globale *(voir encart 3).*

Grothendieck remarque que la notion centrale qui permet de définir ce qu'est un faisceau sur un espace topologique B est simplement la notion de recouvrement d'un ouvert par une famille d'ouverts. Si l'on veut élargir la notion d'ouvert à des objets au-dessus de B (par exemple à des revêtements d'ouverts pour la localisation étale), en d'autres termes, si l'on veut formaliser la notion d'ouvert pour pouvoir considérer les revêtements étales d'ouverts comme des ouverts, il faut élargir la notion de recouvrement à d'autres objets que les ouverts ordinaires.

En remarquant aussi que les ouverts d'un espace forment une catégorie, Grothendieck fait le saut de remplacer la catégorie des ouverts d'un espace par une catégorie quelconque C, munie pour tout objet d'une notion de recouvrement : c'est la donnée pour tout objet x de C de familles d'objets de C au-dessus de x, appelées familles couvrantes (de x). Grothendieck nomme site cette notion de catégorie munie de familles couvrantes, et l'ensemble des familles couvrantes constitue une topologie dite depuis *topologie de Grothendieck*. La notion de faisceau sur un site C est alors absolument analogue à celle de faisceau sur un espace topologique : c'est un foncteur de la catégorie C dans celle des ensembles, qui vérifie la propriété de "passage du local au global" pour tout objet de C et toute famille couvrante de cet objet.

Grothendieck aurait pu s'arrêter là pour les besoins de la géométrie algébrique. Plusieurs sites ont été définis, dont le site dit étale qui a conduit à la cohomologie étale, grâce à laquelle les conjectures de Weil ont été démontrées. Le site étale et les faisceaux pour la topologie associée, la topologie étale, sont les objets qui ont cristallisé l'idée initiale de la localisation étale. Mais il voit toujours plus loin. Pour lui, l'objet le plus intéressant, intrinsèque, associé à un site est la catégorie de tous les faisceaux sur la catégorie du site. C'est cette catégorie des faisceaux qu'il nomme topos.

Plus généralement, pour Grothendieck, un topos est une catégorie équivalente à la catégorie des faisceaux sur un site. Cette nouvelle notion d'espace a deux propriétés importantes, explique-t-il dans *Récoltes et semailles* :

> *Primo, la nouvelle notion n'est pas trop vaste, en ce sens que dans les nouveaux "espaces" (appelés plutôt "topos", pour ne pas indisposer des oreilles délicates), les intuitions et les constructions "géométriques" les plus essentielles, familières pour les bons vieux espaces d'antan, peuvent se transposer de façon plus ou moins évidente. Autrement dit, on dispose pour les nouveaux objets de toute la riche gamme des images et associations mentales, des notions et de certaines au moins des techniques, qui précédemment restaient restreintes aux objets ancien style.*
> *Et secundo, la nouvelle notion est en même temps assez vaste pour englober une foule de situations qui, jusque-là, n'étaient pas considérées comme donnant lieu à des intuitions de nature "topologico-géométrique", aux intuitions, justement, qu'on avait réservées par le passé aux seuls espaces topologiques ordinaires (et pour cause...).*

A chaque espace topologique X est associé un topos - la catégorie des faisceaux sur X. Cette correspondance est un foncteur. C'est ce foncteur, cette "traduction" que Grothendieck appelle "traversée du miroir" :

> *Comme si souvent en mathématique, nous avons réussi ici (grâce à l'idée cruciale de "faisceau", ou de "mètre cohomologique") à exprimer une certaine notion (celle d"'espace" en l'occurrence) en termes d'une autre (celle de "catégorie"). A chaque fois, la découverte d'une telle traduction d'une notion (exprimant un certain type de situations) en termes d'une autre (correspondant à un autre type de situations), enrichit notre compréhension et de l'une et de l'autre notion, par la confluence inattendue des intuitions spécifiques qui se rapportent soit à l'une, soit à l'autre. Ainsi, une situation de nature "topologique" (incarnée par un espace donné) se trouve ici traduite par une situation de nature "algébrique" (incarnée par une "catégorie") ; ou, si on veut, le "continu" incarné par l'espace, se trouve "traduit" ou "exprimé" par la structure de catégorie, de nature "algébrique" (et jusque-là perçue comme étant de nature essentiellement "discontinue" ou "discrète").*
>
> *Mais ici, il y a plus. La première de ces notions, celle d'espace, nous était apparue comme une notion en quelque sorte "maximale" - une notion si générale déjà, qu'on imagine mal comment en trouver encore une extension qui reste "raisonnable". Par contre, il se trouve que de l'autre côté du miroir, ces "catégories" (ou "arsenaux") sur lesquels on tombe, en partant d'espaces topologiques, sont de nature très particulière. Elles jouissent en effet d'un ensemble de propriétés fortement typées, qui les font s'apparenter à des sortes de "pastiches" de la plus simple imaginable d'entre elles - celle qu'on obtient en partant d'un espace réduit à un seul point.*

Cette catégorie est précisément la catégorie des ensembles car un faisceau sur un espace réduit à un point est un ensemble. Donc la catégorie des faisceaux sur un point est la catégorie des ensembles ! Ce qui a, sans doute, de quoi dépayser quelque peu : l'espace le plus réduit, le point, comme topos, est représenté par quelque chose d'aussi énorme que la catégorie des ensembles (que dans ce cadre on appelle plutôt topos ponctuel ou topos final). Ainsi les topos sont des catégories qui présentent "beaucoup de propriétés" de la catégorie des ensembles.

Pour Grothendieck, de l'autre côté du miroir entre les espaces ordinaires et les topos, du côté des topos, "le monde est plus beau". Pour m'en donner une illustration, Olivier Leroy, un ancien élève de Grothendieck, m'avait expliqué il y a bien longtemps : "Passer des espaces topologiques aux topos, c'est comme passer de la géométrie affine à la géométrie projective : cela fait disparaître les cas particuliers." *(voir encart 4)*.

Plus généralement, le langage des topos permet de donner une représentation spatiale pertinente à des situations qui, classiquement, n'étaient pas associées à une telle représentation (principalement en algèbre). Par exemple, la théorie de Galois, qui portait originellement sur la résolubilité des équations algébriques, devient, dans le cadre des topos, un exemple de situation galoisienne que l'on rencontre dans beaucoup de domaines, comme la classification des revêtements d'un espace topologique.

Le langage des topos est devenu un outil fondamental pour un grand pan de la géométrie algébrique actuelle, notamment la géométrie algébrique dérivée. Continuation de la géométrie algébrique dans l'esprit de Grothendieck, cette géométrie est développée par des mathématiciens comme Jacob Lurie et Bertrand Toen en France. Ces mathématiciens ont même dépassé les "simples" topos et utilisent des notions de topos d'ordres supérieurs (les ∞-topos, par exemple).

Certains essayent aussi de mieux comprendre les "espaces de modules", c'est-à-dire les espaces décrivant toutes les formes possibles d'objets d'un type géométrique donné, comme les courbes algébriques. Dans les années 1980, l'étude de l'espace algébrique de toutes les formes possibles de courbes, qui est en fait un topos et non un espace ordinaire, a été centrale dans le travail de Grothendieck.

Les applications de la théorie des topos vont aussi bien au-delà de la géométrie algébrique. Les physiciens théoriciens y voient un cadre naturel pour une logique quantique. Les logiciens, quant à eux, les utilisent pour construire des modèles de théories formelles : on peut voir chaque topos comme une sorte d'univers des ensembles avec sa propre logique. Comme application, on a pu construire un topos dans lequel l'hypothèse du continu n'est pas vérifiée. Formulée au XIX^e^ siècle par le mathématicien Georg Cantor, cette hypothèse affirme que si un ensemble présente un nombre d'éléments d'une infinité d'ordre supérieur à celle de l'ensemble des nombres naturels, alors il a au moins autant d'éléments que l'ensemble des nombres réels. La démonstration de cette hypothèse est le premier des 23 problèmes que le mathématicien allemand David Hilbert avait proposés en 1900 pour guider la recherche en mathématiques. En 1963, le mathématicien américain Paul Cohen avait montré que l'hypothèse ne peut se déduire des axiomes de la théorie des ensembles, ce qui lui avait valu la médaille Fields. La théorie des topos a permis de retrouver ce résultat de manière plus simple.

Nul besoin de points pour exister

Contrairement aux points des espaces topologiques, ceux des topos ne font pas partie de la structure, mais ils ne disparaissent pas forcément : un point d'un topos T est un morphisme du topos ponctuel (la catégorie des ensembles) dans T. Un topos non vide n'a donc pas forcément de point. En revanche, dans un topos, il peut y avoir des morphismes entre les points, comme dans la situation décrite dans la figure de l'encart 4.

D'une certaine manière, le théorème de Banach-Tarski (*voir encart 5*), si difficile à accepter dans le cadre classique, et qui s'éclaire dans celui des topos, nous montre une certaine limite du choix qui prévaut depuis au moins Descartes, et qui consiste à modéliser (et même à penser !) l'espace comme un ensemble de points. Postulat d'ailleurs conforté par le point de vue ensembliste en vigueur depuis Cantor et Hilbert : dans les mathématiques "modernes", tous les objets sont des ensembles !

Le cadre des topos nous permet de sortir de ce carcan, car les topos n'ont pas besoin de points pour exister : il donne au au mathématicien - comme s'il avait chaussé de nouvelles lunettes - un nouvel outil d'exploration, plus fin, faisant apparaître de nouveaux objets et apportant de nouvelles réponses à d'anciennes questions.

Résumé

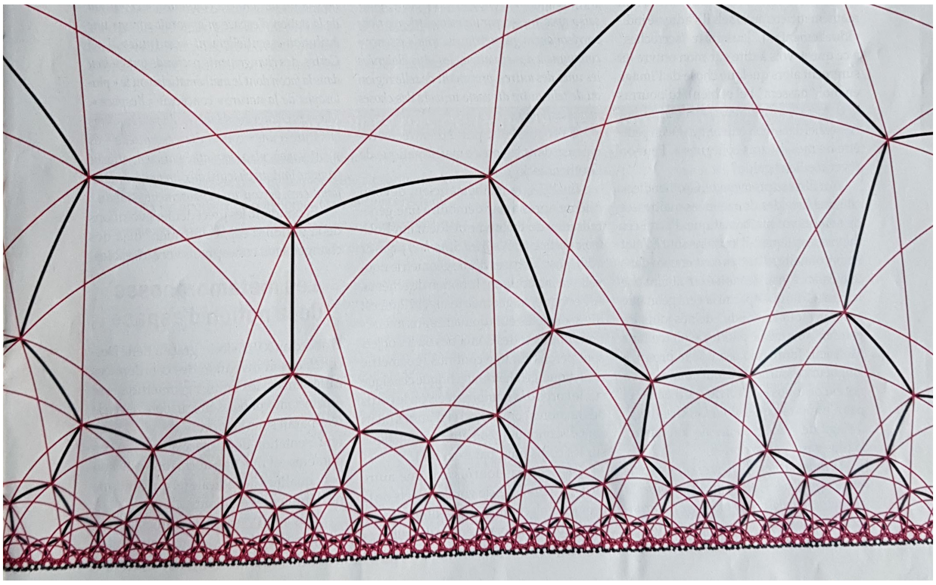
— Pour Grothendieck, la notion de topos est une idée majeure de son œuvre mathématique.

— Introduite au cours de sa refondation de la géométrie algébrique, elle offre un nouveau point de vue sur les objets de cette discipline et plus généralement, un cadre plus vaste où se rejoignent différentes branches des mathématiques.

— Les mathématiciens continuent d'explorer ce point de vue, dont ils trouvent des applications jusqu'en physique mathématique et en logique.

Illustration 1 : Un exemple de topos

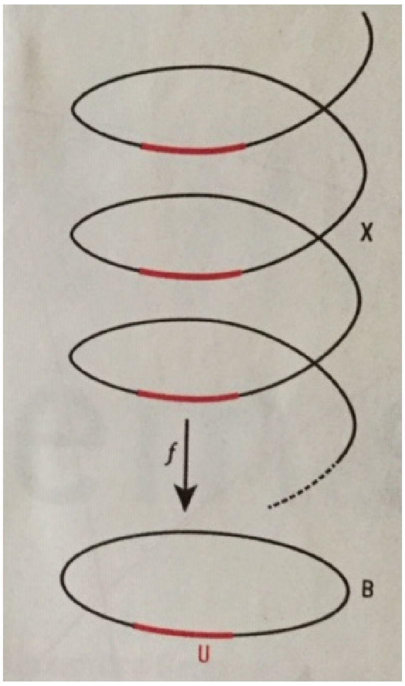
Un exemple de topos est représenté ci-dessous : le topos dit mixte constitué du demi-plan de Poincaré en géométrie hyperbolique et du groupe associé au pavage de type $(7, 3)$, où chaque pavé a 7 côtés et où chaque sommet est relié à 3 arêtes (en noir).



Encart 1 : Un revêtement étale du cercle

Un revêtement étale d'un espace topologique B est un espace (X, f) au-dessus de B (c'est-à-dire un espace X muni d'une application f continue de X dans B) qui vérifie la propriété suivante : il existe un recouvrement de B par des ouverts U (c'est-à-dire une famille d'ouverts U de B dont la réunion donne B) tels que, pour tout U, la partie de X au-dessus de U est une réunion de copies de U. On dit qu'un tel U trivialise le revêtement.

Par exemple, l'enroulement de la droite réelle sur le cercle est un revêtement étale. Dans cet exemple, B est un cercle, X la droite réelle et f "l'enroulement de corde sur la poulie définie par le cercle", représenté comme une projection verticale (voir la figure ci-contre, où un ouvert U a été représenté). La notion de revêtement est fondamentale en topologie et la classification des revêtements d'un espace donné est souvent un des premiers chapitres des traités de topologie algébrique.



Encart 2 : Les premiers pas de la nouvelle géométrie

Avant les réflexions de Grothendieck et de son école, les objets de base de la géométrie algébrique étaient les anneaux de polynôme (à coefficients réels ou complexes) dont les éléments s'interprètent de manière assez évidente comme de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Grothendieck a voulu étendre à tous les anneaux (commutatifs) le champ de la géométrie algébrique. Pour cela, il fallait pouvoir, par analogie avec les anneaux de polynômes, considérer les éléments d'un anneau A quelconque comme des fonctions. C'était faisable, mais avec un certain prix à payer, comme le montre le cas de l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

Pour considérer tout entier n de $\mathbb{Z}$ comme une fonction, il suffit d'associer à n une fonction définie sur le spectre de $\mathbb{Z}$ (l'ensemble des nombres premiers) par sa valeur en chaque nombre premier p. On pose cette valeur égale au résidu modulo p de n dans le corps premier $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, c'est-à-dire au reste de la division euclidienne de n par p. Le prix à payer est une différence essentielle avec le cas des anneaux de polynômes, car pour $\mathbb{Z}$, la fonction associée à n ne prend pas ses valeurs sur un corps unique comme $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, mais sur un corps différent $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour chaque nombre premier p. Toute la difficulté consistait donc à rassembler de manière cohérente tous ces corps. Et bien sûr à faire de même pour chaque anneau (commutatif avec élément unité). C'est le formalisme des faisceaux (voir ci-après) qui a donné la solution à Grothendieck et qui l'a conduit au langage des schémas.

La notion de faisceau avait été introduite quelques années plus tôt en 1946, par le mathématicien français Jean Leray. Prisonnier de guerre en Autriche, Leray participait à une université de captivité et, de peur d'être réquistionné pour travailler à l'effort de guerre allemand, il avait délaissé sa spécialité l'hydrodynamique, plus proche d'applications potentielles, pour y donner un cours de topologie algébrique. Dans ce cours, il avait notamment cherché à reconstruire la topologie algébrique en se débarrassant des hypothèses inutiles. Dans la continuité de ses recherches, il avait conçu une première notion de faisceau sur un espace topologique, un outil qui lui permettait de relier entre elles des données locales pour en faire une donnée globale. Jean-Pierre Serre a étendu ces méthodes à la géométrie algébrique, où Grothendieck les a utilisées et considérablement développées à son tour.

Encart 3 : La notion de faisceau

Un faisceau sur un espace topologique B n'est rien d'autre qu'un espace étalé sur B une notion qui s'apparente à celle de revêtement étale (voir encart 1), mais qui est plus faible.

Un espace étalé sur B est un espace (E, p) au-dessus de B où p est une applicaion qui a la propriété d'être un homéomorphisme local : autour de chaque point x de E, il existe un ouvert U de E le contenant tel que U soit une copie de son image $V = p(U)$ dans B.

Par exemple. les revêtements étales sont des espaces étalés, mais la réciproque est fausse : l'inclusion de l'intervalle ouvert $]0, 1[$ dans la droite réelle $\mathbb{R}$ fait de lui un espace étalé sur $\mathbb{R}$, mais ce n'est pas un revêtement de $\mathbb{R}$ (il y a un probème au-dessus de 0 et 1...).

En quelque sorte, pour un revêtement étale, on demande d'être très simple "localement en bas", c'est-à-dire sur B, et pour un espace étalé, on demande d'être très simple "localement en haut", c'est-à-dire sur E, ce qui est une condition plus faible.

A un tel espace étalé (E, p) sur B, associons un foncteur F, défini sur l'ensemble des ouverts de B (c'est une catégorie) et à valeurs dans la catégorie des ensembles. Formellement, cela signifie qu'à tout ouvert U de B, on associe l'ensemble $F_E(U)$ des fonctions continues de U dans E qui, composées avec p, donnent l'identité de U. Alors pour U et V deux ouverts quelconques de B tels que V est inclus dans U, on a une application dite de restriction de $F_E(U)$ dans $F_E(V)$ qui, a chaque fonction sur U, associe sa restriction sur V.

On vérifie facilement que E peut être reconstitué à partir de F_E. On vérifie aussi la propriété fondamentale suivante sur F_E, dite propriété de recollement : si (U_i) est un recouvrement d'un ouvert U de B (c'est-à-dire une famille d'ouverts U dont la réunion donne U) et si on s'est donné pour chaque i un élément s_i de $F_E(U_i)$ tel que les s_i soient compatibles deux à deux (pour tout i et j les restrictions de s_i et de s_j sur l'intersection de U_i et U_j coïncident), alors il existe un et un seul élément s dans $F_E(U)$ dont les restrictions à chaque U_i sont précisément les s_i.

En résumé, des données "locales" compatibles (les s_i) permettent de définir une donnée "globale" unique (s) dans $F_E(U)$.

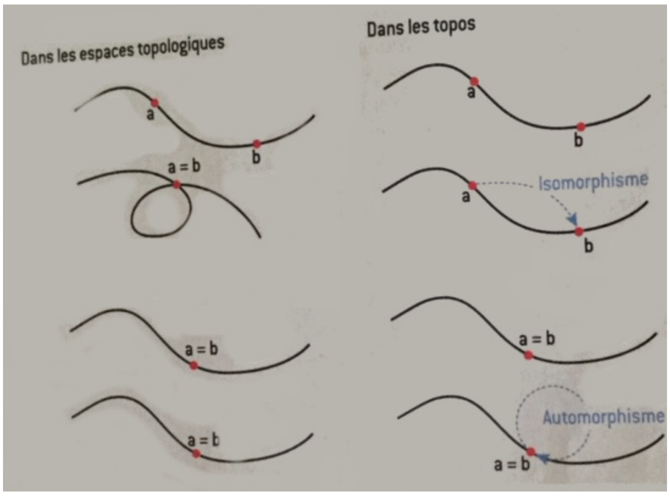
On part de cette définition de foncteur associé à un espace étalé pour définir la notion générale de faisceau sur un espace topologique B : un faisceau sur B est un foncteur sur la catégorie des ouverts de B vérifiant la propriété de recollement.

Cette propriété est ce qui permet de construire des objets globaux à partir de données locales - un outil d'une grande utilité en géométrie algébrique.

Encart 4 : Les topos font disparaître les cas particuliers.

Par exemple, pour identifier deux points a et b d'un segment dans le cadre classique des espaces topologiques, on fait une boucle avec le segment pour faire coïncider a et b, sauf dans le cas particulier où a et b sont confondus. Dans ce cas particulier, rien ne se passe. En revanche, dans le cadre des topos, pour identifier deux points sur un segment, on les recolle au moyen d'un isomorphisme, qui relie les points a et b.

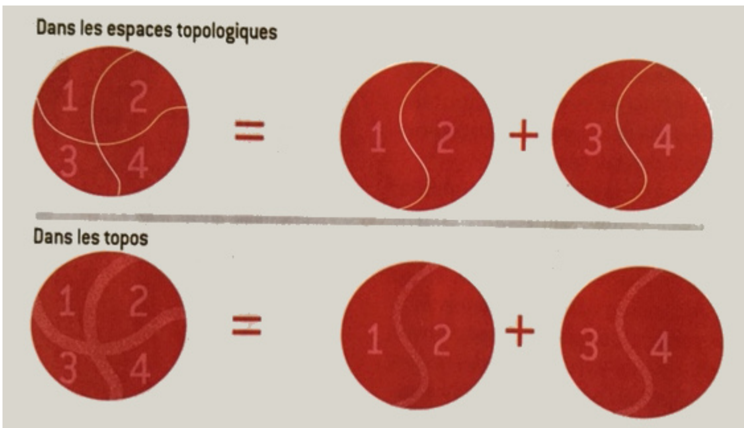
Et si a et b sont confondus, l'isomorphisme existe toujours, c'est un automorphisme du point ; et on a encore une sorte de “boucle infinitésimale”...



Encart 5 : Le paradoxe de Banach-Tarski

Le point de vue des topos éclaire d'un jour nouveau un célèbre “paradoxe”, le “paradoxe de Banach-Tarski”, et le fait même disparaitre. Le théorème de Banach-Tarski entraîne l'existence d'une partition “paradoxale” de toute boule de rayon égal à 1 en quatre “pièces de Lego” identiques qui, prises deux à deux, permettent de reconstituer deux boules de rayon 1. Ces quatre pièces sont impossibles à dessiner, car on sait seulement, par le théorème, qu'elles existent. Elle ne sont pas non plus mesurables, c'est-à-dire qu'on ne peut pas leur attribuer de volume, car sinon, en additionnant leurs volumes, on aboutirait à une contradiction du type $1 = 1 + 1$... Et pourtant, ces pièces de Lego existent, dit le théorème.

En fait, le paradoxe s'évanouit dans le cadre des topos, comme l'a montré Olivier Leroy en 1995. La partition ensembliste “paradoxale” n'est en effet plus une partition du point de vue toposique, car dans le cadre des topos, les pièces de Lego ne sont plus disjointes deux à deux : il existe des intersections de nature purement toposique (en fait elles n'ont pas de points) qui rendent mesurables tous les sous-topos de la boule et lèvent la contradiction. La vision classique ne les voit pas, il faut chausser de nouvelles lunettes pour les déceler.



Une théorie générale des espaces fibrés à structure de faisceaux

Alexander Grothendieck

Introduction. Quand on essaie d'établir dans un formalisme algébrique général les différentes notions d'espace fibré : espace fibré général (sans structure de groupes, et qui ne soit peut-être même pas localement trivial) ; ou faisceau de fibres avec structure d'un groupe topologique G comme exposé dans le livre de Steenrod (La topologie des faisceaux de fibres, Princeton University Press) ; ou les variantes "différentiables" et "analytiques" (réelles ou complexes) de ces notions ; ou les notions d'espaces algébriques fibrés (sur un corps k), on est amené de façon naturelle à la notion d'espace fibré avec une structure de faisceau G. Ce point de vue est aussi suggéré a priori par la possibilité, maintenant classique, d'interpréter les classes (par exemple "topologiques") de faisceaux de fibres sur un espace X, avec structure de groupe commutatif G, comme les éléments du premier groupe de cohomologie de X à coefficients dans le faisceau G des germes des fonctions continues de X dans G ; le mot "continu" étant remplacé par "analytique" respectivement "régulier" si G est supposé être un groupe analytique respectivement algébrique (l'espace X étant bien sûr selon le cas une variété analytique ou algébrique). L'utilisation des méthodes cohomologiques dans cette relation s'est avérée assez utile, et il est devenu naturel, au moins en termes de notations, même quand G est non abélien, de noter $H^1(X, G)$ l'ensemble des classes d'espaces fibrés sur X à structure de faisceau G, G étant comme ci-dessus un faisceau de germes de fonctions (continues, ou différentiables, ou analytiques, ou algébriques suivant le cas) de X dans G. Ici, nous développons systématiquement la notion d'espace fibré à structure de faisceaux G, où G est n'importe quel faisceau de groupes (non nécessairement abéliens), et de premier ensemble de cohomologie $H^1(X, G)$ de X à coefficients dans G.

Les quatre premiers chapitres contiennent simplement les premières définitions concernant les espaces fibrés généraux, les faisceaux, les espaces fibrés avec loi de composition (incluant les faisceaux de groupes) et les espaces fibrés avec structure de faisceaux. Les aspects fonctoriels des notions traitées ont été soulignés partout, et comme il semblerait maintenant, auraient dû être soulignés davantage encore. Comme les preuves de la plupart des faits affirmés se réduisent bien sûr à des vérifications évidentes, elles sont seulement esquissées ou même omises, le point important étant simplement l'ordre cohérent de l'exposition des faits principaux. Dans le dernier chapitre, nous définissons l'ensemble de cohomologie $H^1(X, G)$ de X avec coefficients dans le faisceau des groupes G, de telle manière que le théorème de classification attendu pour les espaces fibrés à structure de faisceau G soit valide. Nous procédons alors à une étude minu-

Cours donné à l'Université du Kansas, à Lawrence, aux Etats-Unis (NSF-G 1126, Projet de recherche sur la géométrie des espaces de fonctions, Rapport n° 4, première édition août 1955, seconde édition Mai 1958).

tieuse de la séquence de cohomologie exacte associée à une séquence exacte de faisceaux $e \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow e$. Ceci est la partie principale, et en fait, l'origine de cet article. Ici G est n'importe quel faisceau de groupes, F un sous-faisceau de groupes, $H = G/F$, et selon plusieurs hypothèses supplémentaires sur F (telles que F normal, ou F normal abélien, ou F dans le centre), nous obtenons une séquence de cohomologie exacte allant de $H^0(X, F)$ (le groupe des sections de F) à $H^1(X, G)$ respectivement $H^1(X, H)$ respectivement $H^2(X, H)$, avec plus ou moins de structures additionnelles impliquées.

Le formalisme ainsi développé est assez suggestif, et comme il semble utile, en particulier pour traiter le problème de la classification des faisceaux de fibres à structure de groupe G dont nous considérons un sous-groupe F, ou le problème de comparer disons les classifications analytique et topologique pour un groupe de structure analytique donné G. Pourtant, pour qu'un tel exposé soit de taille raisonnable, on n'a pas donné d'exemples. Quelques faits complémentaires, exemples et applications, pour les notions développées seront donnés dans le futur. Ce rapport a été écrit principalement pour servir de future référence à l'auteur ; on espère qu'il servira ce même but, ou bien qu'il sera une introduction au sujet, pour les autres personnes.

Bien sûr, comme ce rapport est une adaptation heureusement évidente de notions bien connues, aucune difficulté réelle n'a à être surmontée et on ne revendique aucune originalité en quoi que ce soit. De plus, au moment de donner ce rapport pour reproduction, j'ai entendu que des résultats analogues à ceux du chapitre 5 étaient connus de M. Frenkel, qui ne les a pas publiés jusque-là. L'auteur espère seulement que ce rapport sera plus plaisant à lire qu'il n'a été à écrire, et est convaincu qu'un exposition de cette sorte avait à être écrite, quelle qu'elle soit.

Remarque (ajoutée pour la seconde édition). Il s'est avéré que le formalisme développé dans ce rapport, et spécifiquement les résultats du Chapitre V, sont valides (et utiles) également dans d'autres situations et non seulement pour les faisceaux sur un espace donné X. Une généralisation par exemple est obtenue en supposant qu'un groupe fixé Π est donné qui agit sur X comme un groupe d'homéomorphismes, et que nous pouvons restreindre notre attention à la catégorie d'espaces fibrés sur X (et spécialement sur les faisceaux) sur lesquels Π opère d'une manière compatible avec ses opérations sur la base X (voir par exemple A. Grothendieck, *Sur le mémoire de Weil ; Généralisation des fonctions abéliennes*, Séminaire Bourbaki, Décembre 1956). Quand X est réduit à un point, on obtient (plutôt que des faisceaux) des ensembles, des groupes, des espaces homogènes, etc., admettant un groupe fixé Π d'opérateurs, ce qui amène à la théorie de la cohomologie (commutative et non-commutative) du groupe Π. On peut aussi remplacer Π par un groupe de Lie fixé (opérant sur des variétés différentiables, sur des groupes de Lie, et sur des espaces de Lie homogènes). Ou bien X, Π sont remplacés par un corps de base fixé k, et on considère les espaces algébriques, les espaces homogènes définis sur k, ce qui amène à une sorte de théorie de la cohomologie de k. Tout cela suggère qu'il devrait exister une théorie complète de la cohomologie non-commutative dans les catégories adéquates, une exposition de ceci manquant encore à ce jour (pour la théorie "commutative" de la cohomologie, voir A. Grothendieck, sur quelques points d'Algèbre Homologique, Tohoku Math. Journal, 1958).

1 Espaces fibrés généraux

A moins que cela ne soit explicitement spécifié, aucun des espaces que l'on rencontrera dans ce rapport ne doit être supposé séparé.

1.1 Notion d'espace fibré.

<u>Définition 1.1.1.</u> Un espace fibré sur un espace X est un triplet (X, E, p) de l'espace X, d'un espace E et d'une fonction continue p de E dans X.

Il n'est pas nécessaire que p soit surjective, encore moins qu'elle soit ouverte, et si p est surjective, il n'est pas nécessaire que la topologie de X soit la topologie quotient de E par la fonction p. Pour abréger, l'espace fibré (X, E, p) sera souvent noté seulement E, étant compris que E est doté de la structure complémentaire consistant en une fonction continue p de E dans l'espace X. X est appelé l'espace base de l'espace fibré, p la projection, et pour tout $x \in X$, le sous-espace $p^{-1}(x)$ de E (qui est fermé si $\{x\}$ est fermé) est la fibre de x (dans E).

Etant donnés deux espaces fibrés (X, E, p) et (X', E', p'), un homomorphisme du premier dans le second et deux fonctions continues $f : X \longrightarrow X'$ et $g : E \longrightarrow E'$, telles que $p'g = fp$, i.e, la commutativité du diagramme ci-dessous est vérifiée

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & E' \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ X & \xrightarrow{f} & X' \end{array}$$

Alors g envoie les fibres sur les fibres (mais n'est pas nécessairement surjective !) ; de plus, si p est surjective, alors f est uniquement déterminée par g. L'application continue f de X dans X' étant donnée, g sera aussi appelée un f-homomorphisme de E dans E'. Si, de plus, E'' est un espace fibré sur X'', f' une application continue $X' \longrightarrow X''$ et $g' : E' \longrightarrow E''$ un f'-homomorphisme, alors $g'g$ est un $f'f$-homomorphisme. Si f est l'application surjective identité de X dans X, nous disons alors aussi X-homomorphisme plutôt que f-homomorphisme. Quand nous parlerons d'homomorphismes d'espaces fibrés sur X, sans plus de commentaire, nous voudrons toujours dire X-homomorphismes.

La notion d'isomorphisme surjectif d'un espace fibré (X, E, p) dans un espace fibré (X', E', p') est claire : c'est un homomorphisme (f, g) du premier dans le second, tel que f et g sont des homéomorphismes surjectifs.

1.2 Image inverse d'un espace fibré, homomorphismes inverses.

Soit (X, E, p) un espace fibré sur l'espace X, et soit f une application continue de l'espace X' dans X. Alors l'image inverse de l'espace fibré E par f est un espace fibré E' sur X'. E' est défini comme le sous-espace de $X' \times E$ des points (x', y) tels que $fx' = py$, la projection p' de E' dans la base X' étant donnée par $p'(x', y) = x'$. La fonction $g(x', y) = y$ de E' dans E est alors un f-homomorphisme, induisant pour chaque $x' \in X'$ un homéomorphisme surjectif de la fibre de E' sur x' dans la fibre de E sur $f'x'$.

Supposons maintenant, de plus, que soit donnée une fonction continue $f' : X'' \longrightarrow X'$ d'un espace X'' dans X'. Alors il y a un isomorphisme canonique de l'espace fibré E'' sur X'', image inverse de l'espace fibré E par ff', et l'image inverse de l'espace fibré E' (considéré ci-dessus) par f' (transitivité des images inverses). Si $(x'', y) \in E''(x'' \in X'', y \in E, ff'x'' = py)$, il est envoyé par cet isomorphisme sur $(x'', (f'x'', y))$.

Soit Y un sous-espace de la base X d'un espace fibré E ; considérons l'injection f de Y dans X ; l'image inverse E' de E par f est appelé espace-fibre induit par E sur Y, ou restriction de E vers Y, et est dénoté par $E|Y$. Il est canoniquement homéomorphe à un sous-espace de E, notamment l'ensemble des éléments envoyés par p dans Y ; la projection de $E|Y$ dans Y est induite par p. Par ce qui a été dit précédemment, si Z est un sous-espace de Y, la restriction de $E|Y$ à Z est la restriction $E|Z$ de E à Z.
A nouveau, soit (X, E, p) et (X', E', p') deux espaces fibrés, f une fonction continue $X \longrightarrow X'$. Un homomorphisme associé à f est un X-homomorphisme g de l'espace fibré E_0 dans E, où E_0 dénote l'image inverse de l'espace fibré E' par f. Cela signifie que g est une application continue, du sous-espace E_0 de $X \times E'$ des couples (x, y') tels que $fx = p'y'$, dans E, envoyant pour chaque $x \in X$ la fibre de x dans E_0 (homéomorphe à la fibre de fx dans E' !) dans la fibre $p^{-1}(x)$ de x dans E. Par exemple, si E est lui-même l'image inverse de E' par f, alors il y a un homomorphisme canonique inverse de E' dans E associé à f : l'identité ! (Bien que trivial en quelque sorte, c'est le cas le plus important d'homomorphismes inverses.).

1.3 Sous-espace, quotient, produit.

Soit (X, E, p) un espace fibré, E' un sous-espace quelconque de E, alors la restriction p' de p dans E', définit E' comme un espace fibré avec la même base X, appelé un sous-espace fibré de E. Ainsi les sous-espaces fibrés de E sont en correspondance injective avec les sous-ensembles de E ; en particulier, pour eux, les notions d'union, intersection, etc. sont définies (bien sûr, dans la plupart des cas, nous ne nous intéressons qu'aux espaces fibrés dont la projection est surjective ; cela impose alors une condition sur les sous-espaces de E considérés, qui peut être remplie par les deux sous-espaces mais pas par leur intersection).

Soit maintenant R une relation d'équivalence dans E compatible avec la fonction p, i.e. telle que deux éléments de E congruents mod R aient la même image selon p. Alors p

définit une fonction continue p' de l'espace quotient $E' = E/R$ dans X, qui transforme E' en un espace fibré de base X, appelé un espace fibré quotient de E. Alors ces derniers sont en correspondance injective avec les relations d'équivalence dans E compatible avec p. Un espace fibré quotient d'un espace fibré quotient de E est un espace fibré quotient.

Soient (X, E, p) et (X', E', p') deux espaces fibrés quotients, alors (p, p') définit une fonction continue de $E \times E'$ dans $X \times X'$, telle que $E \times E'$ apparaît comme un espace fibré quotient sur $X \times X'$, appelé le produit des espaces fibrés E, E'.
La fibre de (x, x') dans $E \times E'$ est le produit des fibres de x dans E, respectivement x' dans E'. Supposons maintenant $X = X'$, et considérons l'image inverse de $E \times E'$ selon la fonction diagonale $X \longrightarrow X \times X$, nous obtenons un espace fibré sur X, appelé le produit fibré des espaces fibrés E, E' sur X, dénoté $E \underset{(X)}{\times} E'$. La fibre de x dans ce produit fibré est le produit des fibres de x dans E respectivement E'. Bien sûr, le produit d'une famille arbitraire d'espaces fibrés peut être considéré, et il respecte les propriétés formelles habituelles.

1.4 Espaces fibrés triviaux et localement triviaux.

Soient X et F deux espaces, E l'espace produit, la projection du produit de X définit E comme un espace fibré sur X, appelé l'espace fibré trivial sur X de fibre F.

Toutes les fibres sont canoniquement homéomorphes à F. Déterminons les homomorphismes d'un espace fibré trivial $E = X \times F$ dans un autre $E' = X \times F'$. Plus généralement, nous supposerons seulement que la projection surjective de $X \times F$ dans X est celle qui est naturelle et continue pour la topologie donnée (mais la topologie de $X \times F$ peut ne pas être la topologie produit, par exemple : X et F sont des variétés algébriques à topologie de Zariski) ; mettons la même hypothèse sur $X \times F'$. Alors un homomorphisme u de E dans E', induisant pour tout $x \in X$ une fonction continue de la fibre de E sur x dans la fibre de E' sur x, définit une fonction $x \longrightarrow f(x)$ de X dans l'ensemble de toutes les fonctions continues de F dans F', et bien sûr, l'homomorphisme est bien déterminé par cette fonction par la formule

$$u(x, y) = (x, f(x).y) \qquad (x \in X, y \in F). \tag{1.4.1}$$

Ainsi les homomorphismes de E dans E' peuvent être identifiés avec ces fonctions f de X dans l'ensemble des fonctions continues de F dans F' telles que (1.4.1) est continue. Si les topologies de E et E' sont les topologies produits, cela signifie que $(x, y) \longrightarrow f(x).y$ est continue ; comme cela est bien connu, si de plus F est localement compact et mesurable, cela signifie également que f est continue quand on prend sur l'ensemble de toutes les fonctions continues de F dans F' la topologie de convergence compacte. Si nous considérons un homomorphisme v de E' dans $E'' = X \times F''$ donné par une fonction g de X dans l'ensemble de toutes les fonctions continues de F' dans F'', l'homomorphisme vu est donné par la fonction $x \longrightarrow g(x)f(x)$. Pour que la fonction (1.4.1) soit injective (respectivement surjective, bijective), il est nécessaire et suffisant que pour tout $x \in X$, $f(x)$ ait la même propriété. Dans le cas bijectif, la fonction inverse est alors définie par la fonction $x \longrightarrow f(x)^{-1}$. Il s'ensuit que u est un isomorphisme surjectif si et seulement si pour tout $x \in X$, f est un homéomorphisme surjectif de F dans F', et la fonction $(x, y') \longrightarrow (x, f(x)^{-1}.y')$ est continue. Ainsi, nous obtenons en particulier (en revenant au cas des espaces fibrés triviaux) que :

Proposition 1.4.1. Soient $E = X \times F$ et $E' = X \times F'$ deux espaces fibrés triviaux sur X, alors les isomorphismes surjectifs de E dans E' peuvent être identifiés aux fonctions f de X dans l'ensemble des homéomorphismes surjectifs de F dans F' tels que $f(x).y$ et $f(x)^{-1}.y'$ sont des fonctions continues de $X \times F$ dans F' respectivement $X \times F'$ dans F. Si $E = E'$, cette identification est compatible avec les structures de groupe sur l'ensemble des automorphismes de E respectivement l'ensemble des fonctions de X dans le groupe des automorphismes de F.

Deux espaces fibrés E, E' sur X sont dits localement isomorphes si chaque point x de X a un voisinage U (qui peut être supposé ouvert) tel que les restrictions de E et E' à U sont isomorphes. C'est clairement une relation d'équivalence. Un espace fibré E sur X est dit localement trivial de fibre F (F étant un espace donné) s'il est localement isomorphe à l'espace trivial $X \times F$.

1.5 Définition des espaces fibrés par transformations de coordonnées.

Soit X un espace, (U_i) un recouvrement de X, pour chaque indice i, appelons E_i l'espace fibré au-dessus de U_i, et pour tout couple d'indices i, j tel que $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \varnothing$, soit f_{ij} un U_{ij}-isomorphisme surjectif de $E_j|U_{ij}$ dans $E_i|U_{ij}$. Sur la somme topologique $\mathscr{E}$ des espaces E_i, considérons la relation

(1.5.1.) $\qquad y_i \in E_i|U_{ij}$ et $y_j \in E_j|U_{ij}$ sont équivalents signifie $y_i = f_{ij}y_j$.

C'est une relation d'équivalence, comme on le vérifie aisément, si et seulement si nous avons, pour chaque triplet (i, j, k) d'indices tel que $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k \neq \varnothing$, la relation

(1.5.2.) $\qquad f_{ik} = f_{ij}f_{jk}$

(où, dans le but d'abréger les notations, nous avons simplement écrit f_{ik} plutôt que : l'isomorphisme surjectif de $E_k|U_{ijk}$ dans $E_i|U_{ijk}$ induit par f_{ik} et également pour f_{ij} et f_{jk}). En supposant que cette condition est satisfaite, soit E l'espace quotient de $\mathscr{E}$ par la relation d'équivalence précédente. Les projections p_i de E_i dans U_i définissent une fonction continue de la somme topologique $\mathscr{E}$ dans X, et cette fonction est compatible avec la relation d'équivalence dans $\mathscr{E}$, de telle façon qu'il y a une fonction continue p de E dans X (qui est surjective si les p_i sont toutes surjectives).

Définition 1.5.1. L'espace fibré sur X qu'on vient de construire est appelé l'espace fibré défini par les “transformations de coordonnées” (f_{ij}) entre les espaces fibrés E_i.

La fonction identité de E_i dans $\mathscr{E}$ définit une fonction $\mathscr{S}_i$, de E_i dans E, qui, en vertu de (1.5.1.) est un U_i-homomorphisme injectif (et a fortiori surjectif) de E_i dans $E|U_i$. La topologie de E (par une propriété de transitivité bien connue pour les topologies définies comme la meilleure qui...) est la meilleure topologie sur E pour laquelle les fonctions $\mathscr{S}_i$ sont continues. De plus, il est facile de montrer que lorsque les intérieurs des U_i couvrent déjà X, les fonctions $\mathscr{S}_i$ sont des homéomorphismes intérieurs. Désormais, pour des raisons de simplicité, nous ne travaillerons qu'avec des recouvrements ouverts de X, de telle manière que les propriétés précédentes soient automatiquement satisfaites. Alors $\mathscr{S}_i$ peut être considéré comme un U_i-isomorphisme surjectif de E_i dans $E|U_i$. Clairement

(1.5.3.) $$f_{ij} = \mathscr{S}_i^{-1}\mathscr{S}_j$$

(où, à nouveau, dans le but d'abréger, nous avons écrit $\mathscr{S}_i$ au lieu de la restriction de $\mathscr{S}_i$ à $E_i|U_{ij}$, $\mathscr{S}_j$ plutôt que la restriction de $\mathscr{S}_j$ à $E_j|U_{ij}$). Inversement, soit E un espace fibré sur X, et supposons que pour chaque i, il existe un U_i-isomorphisme surjectif $\mathscr{S}_i$ de E_i dans $E|U_i$, alors (1.5.3.) définit, pour chaque couple (i, j) tel que $U_i \cap U_j = U_{ij} \neq \varnothing$, un U_{ij}-isomorphisme surjectif de $E_j|U_{ij}$ dans $E_i|U_{ij}$, et le système (f_{ij}) satisfait trivialement (1.5.2.). Donc nous pouvons considérer l'espace fibré E' défini par les transformations de coordonnées f_{ij}. Alors il est évident que la fonction de $\mathscr{E}$ dans E définie par les fonctions $\mathscr{S}_i$ est compatible avec la relation d'équivalence dans $\mathscr{E}$, donc définit une fonction continue f de E' dans E qui est bien sûr un X-homomorphisme. Soit $\mathscr{S}'_i$ l'isomorphisme surjectif naturel de E_i dans $E'|U_i$ défini ci-dessus ; on vérifie à la fois que la fonction de $E'|U_i$ dans $E|U_i$ induite par f est $\mathscr{S}_i\mathscr{S}_i'^{-1}$, et par conséquent un isomorphisme surjectif. Il s'ensuit que f elle-même est un isomorphisme surjectif de E' dans E, en vertu du lemme simple suivant (preuve laissée au lecteur) :

<u>Lemme 1.</u> Soient E, E' deux espaces fibrés sur X, et f un X-homomorphisme de E dans E', tel que pour tout $x \in X$, il existe un voisinage U de x tel que f induit un isomorphisme surjectif (respectivement injectif) de $E|U$ dans $E'|U$. Alors f est un X-isomorphisme surjectif (respectivement injectif) de E dans E'.

Ce qui précède montre la vérité de la :

<u>Proposition 1.5.1.</u> Un recouvrement ouvert (U_i) et des espaces fibrés E_i sur U_i étant donnés, les espaces fibrés sur X qui peuvent être obtenus au moyen de transformations de coordonnées adéquates (f_{ij}) sont exactement ceux, à isomorphisme près, pour lesquels $E|U_i$ est isomorphe à E_i pour tout i.

Considérons maintenant deux systèmes de transformations de coordonnées $(f_{ij}), (f'_{ij})$ correspondant au même recouvrement (U_i), et à deux systèmes (E_i), (E'_i) d'espaces fibrés sur les U_i. Soit E l'espace fibré défini par (f_{ij}) et E' l'espace fibré défini par (f'_{ij}) ; nous allons déterminer tous les homomorphismes de E dans E'. Si f est un tel homomorphisme, alors pour tout i, $f_i = \mathscr{S}_i'^{-1} f \mathscr{S}_i$ (où f représente la restriction de f à $E|U_i$) est un homomorphisme de E_i dans E_i', et le système (f_i) satisfait clairement, pour tout couple (i, j) tel que $U_{ij} \neq \varnothing$:

(1.5.4) $\qquad f_i f_{ij} = f'_{ij} f_j$

(où nous écrivons simplement f_i plutôt que la restriction de f_i à $E_i|U_{ij}$, et également pour f_j). L'homomorphisme f est de plus complètement déterminé par le système (f_i) puisque f_i détermine la restriction de f à $E|U_i$; et de plus, le système (f_i) sujet à (1.5.4) peut être sinon choisi arbitrairement, car cette relation exprime exactement que la fonction de la somme topologique $\mathscr{E}'$ des E_i' transforme des points équivalents en points équivalents, et donc définit un X-homomorphisme f de E dans E' ; et il est clair que le système (f_i) n'est rien d'autre que celui qui est défini comme ci-dessus en fonction de l'homomorphisme f. Bien sûr, en voyant le lemme 1, pour que f soit un isomorphisme surjectif (respectivement injectif), il est nécessaire que chaque f_i soit un isomorphisme surjectif (respectivement injectif) de E_i dans E_i'. Ainsi nous obtenons :

Proposition 1.5.2. Etant donnés deux espaces fibrés sur X, E et E', définis par les transformations de coordonnées (f_{ij}) respectivement (f'_{ij}) relatives au même recouvrement (U_i), les X-homomorphismes f de E dans E' sont en correspondance injective avec les systèmes (f_i) d'U_i-homomorphismes $E_i \longrightarrow E_i'$ satisfaisant (1.5.4.). f est un isomorphisme surjectif si et seulement si les f_i en sont, i.e. E' est isomorphe à E si et seulement si on peut trouver des isomorphismes surjectifs $f_i : E_i \longrightarrow E_i'$ tels que, pour tout couple (i, j) d'indices satisfaisant $U_{ij} \neq \varnothing$, on a

(1.5.5.) $\qquad f'_{ij} = f_i f_{ij} f_j^{-1}$

(où comme d'habitude f_i et f_j représentent des fonctions de restriction).

On compare les espaces fibrés E, E' définis par des transformations de coordonnées correspondant aux différents recouvrements, (U_i) et (U_i'), en particulier à la détermination des homomorphismes de E dans E' et donc des X-isomorphismes de E et E', et donc on détermine si E et E' sont isomorphes. Soit (V_j) un ouvert couvrant de X qui est une spécialisation des deux précédents recouvrements ; nous allons montrer que E et E' sont isomorphes aux espaces fibrés définis par transformations de coordonnées par rapport à ce même recouvrement (V_j), de telle manière que le problème se réduise à un problème déjà traité.

Ainsi, soient $(U_i)_{i \in I}$ et $(V_j)_{j \in J}$ deux recouvrements ouverts de X, le second plus petit que le premier, c'est-à-dire que tout V_j est contenu dans un U_i, i.e. il existe au moins une fonction $\tau : J \longrightarrow I$ telle que $V_j \in U_{\tau(j)}$ pour tout $j \in J$. Pour chaque $i \in I$, soit E_i un espace fibré sur U_i, et soit $(f_{ii'})$ un système de transformations de coordonnées par rapport au système (E_i). Pour tout $j \in J$, soit $F_j = E_{\tau(j)}|V_j$, et soit $g_{jj'}$ la restriction de $f_{\tau(j),\tau(j')}$ à $F_j|V_{jj'}$; alors $g_{jj'}$ est un isomorphisme surjectif de $F_j|V_{jj'}$ dans $F_j|V_{jj'}$, et le système $(g_{jj'})$ est un système de transformations de coordonnées, comme il suit d'abord de la définition et de (1.5.2.) appliqué au système $(f_{ii'})$. Soit F l'espace fibré défini par le système de transformations de coordonnées $(g_{jj'})$; nous définirons un X-isomorphisme surjectif canonique de F dans E. Pour $j \in J$, soit g_j la fonction injective de F_j dans $E_{\tau(j)}$; c'est donc une fonction de F_j dans la somme topologique $\mathscr{E}$ des E_i ; le système (g_j) définit une fonction continue g' de la somme topologique $\mathcal{F}$ des f_j dans $\mathscr{E}$, et comme on peut facilement le voir, g' envoie des points équivalents sur des points équivalents. Par conséquent, g' induit une fonction continue g de F dans E, qui est clairement un X-homomorphisme. De plus, pour tout j, g induit un isomorphisme surjectif de $F|V_j$ dans $E|V_j$, car si l'on compose l'isomorphisme surjectif naturel de $E|U_i$ dans E_i, on obtient la fonction injective de $E|V_j$ dans E_i (on pose $i = \tau(j)$). Maintenant en appliquant le lemme 1, nous voyons que g est un isomorphisme surjectif de F dans E.

1.6 Le cas des espaces fibrés triviaux.

La méthode de la section précédente pour construire des espaces fibrés sur X sera utilisée principalement dans le cas où un espace fibré T est donné sur X, et où, étant donné un recouvrement d'ouverts (U_i) de X, on considère les espaces fibrés $E_i = T|U_i$ sur U_i et les transformations de coordonnées (f_{ij}) par rapport à eux. Alors f_{ij} est un U_{ij}-automorphisme de $T|U_{ij}$. L'espace fibré défini par le système (f_{ij}) des transformations de coordonnées sera localement isomorphe (cf. 1.4.) à T, et en vertu de la proposition 1.5.1., nous obtenons de cette manière exactement (à isomorphisme près) tous les espaces fibrés sur X qui sont localement isomorphes à T (en prenant des ensembles ouverts U_i suffisamment petits, et ensuite un système adéquat (f_{ij})).

Dans le cas où T est un espace fibré trivial, $T = X \times F$, nous avons $E_i = U_i \times F$, et $E_i|U_{ij} = U_{ij} \times F$. Ainsi, f_{ij} est un automorphisme de l'espace fibré trivial $U_{ij} \times F$, et donc, en vue de la proposition 1.4.1. donnée par une fonction $x \longrightarrow f_{ij}(x)$ de U_{ij} dans le groupe des homéomorphismes surjectifs de F dans lui-même. Les équations (1.5.2.) exprimant que (f_{ij}) est un système de transformations de coordonnées se traduisent en

$$f_{ik}(x) = f_{ij}(x) f_{jk}(x) \qquad \text{pour } x \in U_{ijk} \tag{1.6.1.}$$

De plus, il ne faut pas oublier que $x \longrightarrow f_{ij}(x)$ est soumise à la condition de continuité de la proposition 1.4.1. Un tel système définit alors de façon naturelle un espace fibré E sur X, et par ce qui a été dit, il découle que ce faisceau de fibres est localement isomorphe à $X \times F$, i.e. localement trivial de fibre F, et que (pour un choix adéquat du recouvement et des transformations de coordonnées), nous obtenons ainsi, à isomorphisme près, tous les espaces fibrés localement triviaux sur X de fibre F.

Soit de la même façon $T' = X \times F'$, et considérons pour le même recouvrement (U_i) un système (f_{ij}) et un système (f'_{ij}) de transformations de coordonnées, le premier relatif à la fibre F et le second à la fibre F'. Soient E et E' les espaces fibrés correspondant sur X. Les homomorphismes de E dans E', par la proposition 1.5.2., correspondent aux homomorphismes f_i de $E_i = U_i \times F$ dans $E'_i = U_i \times F'$, satisfaisant les conditions (1.5.4). Maintenant, (proposition 1.4.1.), un tel homomorphisme f_i est déterminé par une fonction $x \longrightarrow f_i(x)$ de U_i dans l'ensemble des fonctions continues de F dans F' par $f_i(x, y) = (x, f_i(x).y)$, soumis à la seule contrainte que $f_i(x).y$ est continue par rapport au couple $(x, y) \in U_i \times F$. Alors l'équation (1.5.4.) devient

$$(1.6.2.) \qquad f_i(x)f_{ij}(x) = f'_{ij}(x)f_j(x) \qquad (x \in U_{ij})$$

Ainsi les homomorphismes sont déterminés de E dans E'. En particulier, les isomorphismes surjectifs de E dans E' sont obtenus par les systèmes (f_i) tels que $f_i(x)$ est un homéomorphisme surjectif de F dans F' pour tout $x \in U_i$, et tels que $x \longrightarrow f_i^{-1}(x)$ satisfait la même contrainte de continuité que $x \longrightarrow f_i(x)$. La condition de compatibilité (1.6.2.) peut alors s'écrire

$$(1.6.3.) \qquad f'_{ij}(x) = f_i(x)f_{ij}(x)f_j(x)^{-1} \qquad (x \in U_{ij})$$

1.7 Sections d'espaces fibrés.

<u>Définition 1.7.1.</u> Soit (X, E, p) un espace fibré ; une section de cette espace fibré (ou, par un pléonasme, une section de E sur X) est une fonction x de X dans E telle que ps est la fonction identité de X. L'ensemble des fonctions continues de E est noté $H^0(X, E)$.

Cela revient au même de dire que s est une fonction dont la valeur en chaque $x \in X$ est une fibre de x dans E (qui dépend de x !). L'existence d'une section implique bien sûr que p est surjective, et inversement nous n'avons pas besoin de la continuité. Pourtant, nous nous intéressons principalement aux sections continues. Une section de E sur un sous-ensemble Y de X est par définition une section de $E|Y$. Si Y est un ouvert, nous écrivons $H^0(Y, E)$ pour l'ensemble $H^0(Y, E|Y)$ de toutes les sections continues de E sur Y.

$H^0(X, E)$ comme foncteur. Soit E, E' deux espaces fibrés sur X, f un X-homomorphisme de E dans E'. Pour chaque section s de E, la fonction composée fs est une section de E', continue si s est continue. Nous obtenons ainsi une fonction, notée f, de $H^0(X, E)$ dans $H^0(X, E')$. Les propriétés usuelles des foncteurs sont satisfaites :

a. Si deux espaces fibrés sont identiques et si f est l'identité alors il en est de même de f

b. Si f est un X-homomorphisme de E dans E' et si f' est un X-homomorphisme de E' dans E'' $(E, E', E''$ des espaces fibrés sur $X)$ alors $(f'f) = f'\ f$.

Soit (X, E, p) un espace fibré, f une fonction continue d'un espace X' dans X, et E' l'image inverse de E selon f. Soit s une section de E', considérons la fonction s' de X' dans E' donnée par $s'x' = (x', sfx')$ (le second membre appartient à E', puisque

$fx' = psfx'$ parce que $px =$ identité), c'est une section de E', continue si s est continue. Ainsi, nous obtenons une fonction canonique de $H^0(X, E)$ dans $H^0(X', E')$ (E' étant l'image inverse de E par f). Au cas où $X' \subset X$ et f est la fonction inclusion, alors $E' = E|X'$, et la fonction précédente n'est rien d'autre que la fonction de restriction (de $H^0(X, E)$ dans $H^0(X', E)$ si X' est un ouvert). Nous laissons au lecteur l'énoncé et la preuve d'une propriété évidente de transitivité des fonctions canoniques qui viennent d'être considérées.

Les deux sortes d'homomorphismes pour les ensembles de sections continues sont compatibles au sens suivant : soit $\mathscr{S}$ une fonction continue fixée d'un espace X' dans X, alors à chaque espace fibré E sur X correspond son image inverse E' selon $\mathscr{S}$, qui est un espace fibré sur X' ; de plus, étant donné un X-homomorphisme $f : E \longrightarrow F$, on définit de façon naturelle un X'-homomorphisme f' de E' dans F'. (Nous pourrions aller plus loin et exprimer que, pour $\mathscr{S}$ fixé, E' est un "foncteur" de E du fait des définitions précédentes.)

Alors le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} H^0(X, E) & \xrightarrow{f_*} & H^0(X, F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(X', E') & \xrightarrow{f'_*} & H^0(X', F') \end{array}$$

dans lequel les flèches verticales représentent les homomorphismes canoniques définis plus haut, est un diagramme commutatif. La vérification est bien sûr triviale. Cas particulier : en remplaçant X par un sous-ensemble ouvert U de X, et en prenant pour X' un sous-ensemble ouvert V de U et avec $\mathscr{S}$ la fonction d'inclusion $V \longrightarrow U$, nous obtenons que quels que soient E, F deux espaces fibrés sur X et f un X-homomorphisme avec $f : E \longrightarrow F$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^0(U, E) & \longrightarrow & H^0(U, F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(V, E) & \longrightarrow & H^0(V, F) \end{array}$$

où les flèches verticales sont les fonctions de restriction, et les flèches horizontales sont les fonctions définies par f (où pour parler plus strictement, par les restrictions de f à $E|U$ respectivement $E|V$). En d'autres termes : les "homomorphismse" entre espaces de sections sur les ensembles ouverts définis par des X-homomorphismes d'espaces fibrés commutent avec les opérateurs de restriction.

<u>Détermination des sections.</u> Revenons aux conditions de la définition 1.5.1. ; nous gardons les notations de cette section. Soit s une section de l'espace fibré E, et pour tout i, appelons $s_i = \mathscr{S}_i^{-1} s$; alors s_i est une section de E_i sur U_i, et de $s = \mathscr{S}_i s_i = \mathscr{S}_j s_j$ sur U_{ij}, nous obtenons $s_i = \mathscr{S}_i^{-1} \mathscr{S}_j s_j = f_{ij} s_j$:

(1.7.3.) $\qquad s_i = f_{ij} s_j$

où à nouveau nous écrivons s_i, s_j plutôt que : restriction de s_i, s_j à U_{ij}.

Bien sûr, s est entièrement déterminé par le système (s_i), car s est donné sur les U_i par $s = \mathscr{S}_i s_i$. D'un autre côté, sinon, le système (s_i) sujet à (1.7.3.) peut être arbitraire, car ces conditions expriment précisément que pour $x \in X$, l'élément $\mathscr{S}_i s_i(x)$ de E obtenu en prenant un U_i contenant x ne dépend pas de i, et peut parfois être noté $s(x)$: alors les antécédents $\mathscr{S}_i^{-1} s$ déterminés par la définition ci-dessus ne sont bien sûr rien d'autre que les s_i avec lesquels on a commencé. Notons également que pour que la section s soit continue, il est nécessaire et suffisant que chaque s_i soit continu. Nous obtenons ainsi la :

<u>Proposition 1.7.1.</u> Soit E l'espace fibré défini par les transformations de coordonnées (f_{ij}) relatives à un recouvrement ouvert (U_i) de X et les espaces fibrés E_i sur U_i. Alors il y a une injection canonique entre les sections de E et les systèmes (s_i) des sections de E_i sur les U_i, i satisfaisant les conditions (1.7.3.). Les sections continues correspondent aux systèmes des sections continues.

Etant donnés, à nouveau, comme dans le paragraphe 1.5, deux systèmes (E_i) et (E'_i) d'espaces fibrés sur les U_i et les deux systèmes correspondant de transformations de coordonnées (f_{ij}) et (f'_{ij}), appelons E et E' les espaces fibrés correspondant, et f un X-homomorphisme de E dans E', défini en vertu de la proposition 1.5.2., par un système (f_i) de U_i-homomorphismes de E_i dans E'_i satisfaisant (1.5.4.). Soit s une section de E, donnée par le système (s_i) des sections de E_i sur U_i. Alors le système $(f_i s_i)$ des sections de E'_i sur U_i définit une section fs (triviale).

Le lecteur peut vérifier, comme exercice, comment les fonctions canoniques des espaces de sections considérés ci-dessus dans cette section, peuvent être rendus explicites pour les espaces fibrés donnés au moyen de transformations de coordonnées

2 Faisceaux d'ensembles

Tout au long de l'exposé, le mot “section” signifiera “section continue”.

2.1 Faisceaux d'ensembles.

<u>Définition 2.1.1.</u> Soit X un espace. Un faisceau d'ensembles sur X (ou simplement un faisceau) est un espace fibré (E, X, p) de base X, satisfaisant la condition : chaque point a de E a un voisinage ouvert U tel que p induit un homéomorphisme surjectif de U dans un sous-ensemble ouvert $p(U)$ de X.

Cela peut être exprimé en disant que p est une fonction intérieure et un homéomorphisme local. On devrait garder à l'esprit que, même si X est séparé, E n'est pas supposé séparé (et dans les contextes les plus importants ne sera pas séparé).

Avec les notations de la définition 2.1.1, soit $x = p(a)$. Si f est une section de E telle que $fx = a$, alors $V = f^{-1}(U) \cap p(U)$ est un ensemble ouvert contenant x, et sur ce voisinage V de x, f doit coïncider avec l'inverse de l'homéomorphisme surjectif $p|U$ de U sur $p(U)$. En particulier

Proposition 2.1.1. Deux sections d'un faisceau E défini dans un voisinage de x et prenant la même valeur en x coïncident dans un voisinage de X.

Corollaire : Etant données deux sections de E dans un ensemble ouvert V, l'ensemble des points où elles sont égales est un ouvert. (Mais en général, il n'est pas fermé, comme ce serait le cas si E était séparé !).

2.2 $H^0(A, E)$ pour un $A \subset X$ arbitraire.

D'abord, soit E un espace fibré arbitraire sur X. Soit A un sous-ensemble arbitraire de X ; les voisinages ouverts de A, ordonnés par $\supset$, forment un ensemble ordonné filtrant. A chaque élément U de cet ensemble est associé un ensemble $H^0(U, E)$: l'ensemble des sections de E sur U, et si $U \supset V$ (U et V des voisinages ouverts de A), nous avons une fonction naturelle $\mathscr{S}_{VU} : H^0(U, E) \longrightarrow H^0(V, E)$ (fonction de restriction), avec la propriété évidente de transitivité $\mathscr{S}_{WV}\mathscr{S}_{VU} = \mathscr{S}_{WU}$ quand $U \supset V \supset W$. Par conséquent, nous pouvons considérer la limite directe de la famille d'ensembles $H^0(U, E)$ pour les fonctions $\mathscr{S}_{VU}$.

Définition 2.2.1. Posons $H^0(A, E) = \varinjlim H^0(U, E)$, ($U$ ayant comme domaine les voisinages ouverts comme expliqué précédemment). Si $A = \{x\}$ ($x \in X$), nous écrivons simplement $H^0(x, E)$. Les éléments de $H^0(A, E)$ sont appelés germes des sections de E dans le voisinage de A.

Si A est ouvert, nous ne trouvons bien sûr rien d'autre que l'ensemble des sections continues de E sur A, déjà dénoté $H^0(A, E)$. Si $A \supset B$, il y a une fonction naturelle, à nouveau notée $\mathscr{S}_{BA}$ de $H^0(A, E)$ dans $H^0(B, E)$, (définition laissée au lecteur). Quand A et B sont tous deux ouverts, c'est la fonction de restriction habituelle (par conséquent, elle sera en général encore appelée fonction de restriction) ; quand A est un ouvert, alors c'est l'homomorphisme naturel de $H^0(A, E)$ dans la limite directe de tous les $H^0(A', E)$ correspondant aux voisinages ouverts A' de B. Bien sûr, $A \supset B \supset C$ implique $\mathscr{S}_{CB}\mathscr{S}_{BA} = \mathscr{S}_{CA}$.

Soit $\Gamma(A, E)$ l'ensemble des sections continues de E sur l'ensemble arbitraire $A \supset X$, alors les fonctions de restriction $H^0(U, E) = \Gamma(U, E) \longrightarrow \Gamma(A, E)$ (U, voisinage ouvert de A) définissent une fonction naturelle de $\varinjlim H^0(U, E) = H^0(A, E)$ dans $\Gamma(A, E)$. En particulier, il y a une fonction naturelle $H^0(x, E) \longrightarrow E_x$, où E_x est la fibre de x dans E (valeur en x du germe d'une section dans le voisinage de x). Celle-ci bien sûr, bien que fréquemment surjective, sera rarement injective. Pourtant :

<u>Proposition 2.2.1.</u> Si E est un faisceau sur X, alors pour $x \in X$, la fonction canonique $H^0(x, E) \longrightarrow E_x$, est bijective (i.e, injective et surjective). Si A est un sous-ensemble quelconque de X, alors la fonction canonique $H^0(A, E) \longrightarrow \Gamma(A, E)$ est injective ; elle est de plus surjective si A admet un système fondamental de voisinages paracompacts.

Les parties injectives sont contenues dans la Proposition 2.1.1 et son corollaire. Les premiers résultats concernant la surjection sont dans la définition 2.1.1. Maintenant soit f une section continue de E sur A ; pour tout $x \in A$, soit g_x une section continue de E sur un voisinage ouvert V_x de x dans X, tel que $g_x(x) = f(x)$ (ceux-ci existent par la première partie de la proposition 2.2.1.). De plus, par la première partie de la proposition 2.1.1. appliquée à $E|A$, nous pouvons supposer V_x assez petit pour que sur $V_x \cap A$, g_x et f coïncident. Nous pouvons supposer que $U = \cup V_x$ est un voisinage paracompact de A. Soit $(V_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert localement fini de U plus fin que (V_x), c'est-à-dire que chaque V_i est contenu dans un V_x. Alors pour chaque V_i, il existe $g_i \in H^0(V_i, E)$ tel que g_i et f coïncident sur $V_i \cap A$. U étant paracompact, nous pouvons trouver un recouvrement ouvert (V_i') de U tel que la fermeture relative de V_i' dans U soit contenue dans V_i. Pour chaque $x \in A$, il existe un voisinage ouvert W_x de x dans U rencontrant seulement un nombre fini d'entre les V_i ; en prenant W_x suffisamment petit, nous pouvons supposer que $x \notin \overline{V_i'}$ implique $V_i' \cap W_x = \varnothing$, et $x \in \overline{V_i'}$ implique $W_x \subset V_i$. De plus, en vertu de la proposition 2.1.1., nous pouvons supposer que les g_i correspondant sont identiques sur W_x puisqu'ils prennent la même valeur $f(x)$ en x. Par conséquent, à chaque fois qu'un V_i' rencontre W_x, alors g_i est défini sur W_x et ne dépend pas du choix de i, de telle façon que nous pouvons le dénoter par h_x. Il s'ensuit de cela que dans $W_x \cap W_y$, h_x et h_y sont identiques, et donc, les h_x sont les restrictions d'une unique section h de E sur $W = \cup W_x$. C'est une section continue de E sur un voisinage ouvert de A, et nous voyons directement que sa restriction à A est f. Ceci termine la démonstration.

<u>Remarque.</u> La dernière partie de la proposition 2.2.1. devient fausse si nous négligeons la contrainte de paracompacité. Soit par exemple X un ensemble infini, avec la topologie dans laquelle les ensembles ouverts sont les complémentaires de tous les ensembles finis (de tels espaces peuvent avoir un sens en topologie algébrique, en considérant par exemple une courbe algébrique avec une topologie de Zariski). Soit F un espace discret ; considérons l'espace fibré trivial $X \times F$. C'est un faisceau ; ses sections sur un ensemble A sont les fonctions localement constantes de A dans F (cf. paragraphe 2.6. ci-dessous, exemple a). Soit A un sous-ensemble fini de X ; on voit directement que tout voisinage ouvert de A est homéomorphe à X et est donc connexe ; par conséquent, une section de E sur un tel voisinage est constante ; mais les sections sur A peuvent avoir un nombre arbitraire de valeurs différentes pour les points de A et de ce fait, elles ne seront en général pas des restrictions des sections définies dans un voisinage de A.

2.3 Définition d'un faisceau par des systèmes d'ensembles.

Comme nous l'avons remarqué à la section précédente, tout espace fibré E (et en particulier tout faisceau) détermine des ensembles $H^0(U,E)$ (par exemple, pour tout ouvert $U \subset X$) et des fonctions $H^0(U,E) \longrightarrow H^0(V,E)$ pour $U \supset V$, satisfaisant une propriété évidente de transitivité. La proposition 2.2.1. suggère qu'inversement, un système pourrait définir un faisceau. En effet, soit $\mathcal{V}$ un recouvrement ouvert de X, et supposons définie une fonction $U \longrightarrow E_U$ sur l'ensemble des ensembles ouverts qui sont petits d'ordre $\mathcal{V}$ (i. e. contenus dans un ensemble élément de $\mathcal{V}$), chaque E_U étant un ensemble. Supposons donnée de plus, si U et V sont $\mathcal{V}$-petits et $U \supset V$, une fonction $\mathscr{S}_{VU} : E_U \longrightarrow E_V$, ces fonctions satisfaisant la condition de transitivité

$$(2.3.1.) \qquad \mathscr{S}_{WV}\mathscr{S}_{VU} = \mathscr{S}_{WU} \qquad (\text{si } U \supset V \supset W),$$

Pour tout $x \in X$, soit $E_x = \varinjlim E_U$, U parcourant l'ensemble ordonné filtrant des voisinages ouverts de x (ordonnés par $\supset$). Soit E l'union des E_x, et p la fonction de E dans X envoyant E_x dans x. Définissons dans E une topologie comme suit : pour tout $f \in E_U$ et $x \in U$, nous considérons l'image canonique $f_x \in E$ de f dans la limite directe E_x des ensembles E'_U correspondant à tous les voisinages ouverts U' de x. Soit $O(f)$ l'ensemble de tous les éléments $f_x \in E$ quand x parcourt U. Quand U et $f \in E_U$ varient, nous obtenons une famille de sous-ensembles $O(f)$ de E, qui génèrent une topologie sur E. Il est facile de vérifier que (E,X,p) forme un faisceau, c'est-à-dire que p est continu, intérieur et que c'est un homéomorphisme local.

<u>Définition 2.3.1.</u> Le faisceau E ainsi défini est appelé le faisceau défini par le système d'ensembles E_U et de fonctions $\mathscr{S}_{VU}$.

Considérons maintenant un ensemble ouvert $U \subset X$, $\mathcal{V}$-petit ; pour tout $f \in E_U$, la fonction $x \longrightarrow f_x$ est clairement une section du faisceau E, et de plus continue, que nous dénoterons $\widetilde{f}$. Nous obtenons ainsi une fonction naturelle $f \longrightarrow \widetilde{f}$ de E_U dans $H^0(U,E)$.

<u>Proposition 2.3.1.</u> Pour que $f \longrightarrow \widetilde{f}$ soit injective, il est nécessaire et suffisant que pour tout recouvrement ouvert (U_i) de U, et deux éléments f,g de E_U, $\mathscr{S}_{U_iU}f = \mathscr{S}_{U_iU}g$ pour tout i implique que $f = g$. Pour que $f \longrightarrow \widetilde{f}$ soit surjective, il est nécessaire et suffisant que pour tout recouvrement ouvert (U_i) de U, et pour tout système $(f_i) \in \cap E_{U_i}$ satisfaisant

$$(2.3.2.) \qquad \mathscr{S}_{U_i\cap U_j,U_i}f_i = \mathscr{S}_{U_i\cap U_j,U_j}f_j \qquad \text{quand } U_i \cap U_j \neq \varnothing$$

il existe $af \in E_U$ telle que $f_i = \mathscr{S}_{U_iU}f$ pour tout i.

<u>Corollaire.</u> Pour que $f \longrightarrow \widetilde{f}$ soit bijective, il est nécessaire et suffisant que pour tout recouvrement ouvert (U_i) de U, la fonction naturelle $E_U \longrightarrow \cap E_{U_i}$ (dont les compo-

santes sont les fonctions $\mathscr{S}_{U_iU}$) soit une fonction injective et surjective de E_U dans le sous-ensemble du produit de tous les (f_i) satisfaisant la condition (2.3.2.).

Preuve laissée au lecteur, ainsi que la preuve de la proposition suivante :

Proposition 2.3.2. Soit E un faisceau sur X, considérons le système d'ensembles $H^0(U, E)$ et les fonctions de restriction $\mathscr{S}_{VU} : H^0(U, E) \longrightarrow H^0(V, E)$ pour $U \supset V$ (U, V des ensembles ouverts). Alors le faisceau E' défini par ces données (définition 2.3.1.) est canoniquement isomorphe à E, cet isomorphisme, transformant pour chaque $x \in X$, $E'_x = \varinjlim H^0(U, E) = H^0(x, E)$ en E_x, étant l'isomorphisme considéré dans la proposition 2.2.1.

Les deux propositions précédentes montrent combien est essentielle l'équivalence entre la notion de faisceau sur l'espace X, et la notion mettant en œuvre un système d'ensembles (E_U) (U un ouvert $\subset X$) et des fonctions $\mathscr{S}_{VU}$ pour $U \supset V$, satisfaisant les conditions (2.3.1.) et la condition du corollaire de la proposition 2.3.1. Ces deux images ont leur importance, la seconde étant plus intuitive, mais la première étant souvent techniquement plus simple.

Exercice. Etant donné un système d'ensembles E_U (U un ouvert $\mathscr{V}$-petit) et des homomorphismes $\mathscr{S}_{VU}$ ($U \supset V$) satisfaisant (2.3.1.), prouver que si nous nous restreignons aux U qui sont $\mathscr{V}'$-petits (où $\mathscr{V}'$ est un recouvrement ouvert de X plus fin que $\mathscr{V}$), le faisceau défini par ce nouveau système est canoniquement isomorphe au faisceau défini par le premier système.

2.4 Propriétés de permanence.

Soit E un faisceau sur l'espace X, et soit f une fonction continue d'un espace X' dans X, alors l'image inverse de l'espace fibré E par f (cf. 1.2.) est encore un faisceau. En particulier, si $X' \subset X$, E induit un faisceau sur X'.

Si E est un faisceau sur X, F un faisceau sur Y, alors $E \times F$ est un faisceau sur $X \times Y$; par conséquent, si E et F sont deux faisceaux sur X, alors leur produit fibré $E \underset{X}{\times} F$ (cf. 1.3) est encore un faisceau ; cela s'étend au produit d'un nombre fini de faisceaux.

Sous les conditions de 1.5. supposons que les espaces fibrés E_i sur les ensembles ouverts U_i soient des faisceaux, alors l'espace fibré E obtenu au moyen des transformations de coordonnées f_{ij} est encore un faisceau. Cela résulte directement de la remarque plus générale : si E est un espace fibré tel que chaque $x \in X$ a un voisinage U tel que $E|U$ est un faisceau, alors E est un faisceau (trivial).

2.5 Sous-faisceau, faisceau quotient. Homomorphismes de faisceaux.

Proposition 2.5.1. Soit E un faisceau sur l'espace X. Pour qu'un sous-ensemble F de E, considéré comme un espace fibré sur X, soit un faisceau, il est nécessaire et suffisant qu'il soit ouvert. Pour que le quotient de E par une relation d'équivalence R compatible avec la fibration, soit un faisceau, il est nécessaire et suffisant que l'ensemble des couples équivalents (z, z') soit un ouvert dans le produit fibré $E \underset{X}{\times} E$.

Ces conditions peuvent aussi s'établir de façon équivalente : si une section f de E dans un voisinage de $x \in X$ est telle que $fx \in F$, alors $fy \in F$ pour y dans un voisinage de x ; si deux sections f, g de E dans un voisinage de $x \in X$ sont telles que fx et gx sont équivalentes mod R, alors fy et gy sont équivalentes mod R pour y dans un voisinage de x.

Proposition 2.5.2. Soit E un faisceau sur X, E' un faisceau sur X', f une fonction continue de X dans X' et g une fonction de E dans E' telle que $p'g = fp$ (p, p' étant les projections de E, E'). Pour que g soit un f-homomorphisme (i.e. soit continu), il est nécessaire et suffisant que pour toute section s de E sur un ensemble ouvert U, gs soit une section de E' sur $f(U)$.

Corollaire 1. Soit f un X-homomorphisme bijectif d'un faisceau E dans un faisceau F, alors f est un isomorphisme surjectif de E dans F.

Corollaire 2. Soient E, F deux faisceaux sur X, f un X-homomorphisme de E dans F. Alors f est une fonction intérieure, et $f(E)$ est un sous-faisceau de F. Le quotient de E par la relation d'équivalence définie par la fonction f est encore un faisceau, et f définit un isomorphisme surjectif de ce quotient dans le faisceau $f(E)$.

Considérons maintenant un système $(E_U, \mathscr{S}_{VU})$ comme dans le paragraphe 2.3., définissant un faisceau E. Supposons donné pour chaque U un sous-ensemble E'_U de E_U, tel que $U \supset V$ implique $\mathscr{S}_{VU}(E'_U) \subset E'_V$. Soit $\mathscr{S}'_{VU}$ la fonction de E'_U dans E'_V définie par $\mathscr{S}_{VU'}$, alors le système $(E'_U, \mathscr{S}'_{VU})$ définit un faisceau E'. Pour tout $x \in X$, les fibres de x dans E respectivement E' sont données par

$$E_x = \varinjlim E_U \qquad E'_x = \varinjlim E'_U$$

la limite directe étant prise dans l'ensemble filtrant ordonné des voisinages ouverts de x. Par conséquent, nous avons une injection naturelle $E'_x \subset E_x$, et donc $E' \subset E$. Il est aisément vérifié que l'injection de E' dans E est un homomorphisme, (un cas particulier d'une caractérisation générale des homomorphismes sera donnée ultérieurement), de telle façon que par le corollaire 1 ci-dessus, E' est isomorphe à un sous-faisceau de E. Supposons que les conditions du corollaire de la proposition 2.3.1. soient satisfaites, qui assurent que $E_U = H^0(U, E)$. Alors clairement, les fonctions canoniques $E'_U \longrightarrow H^0(U, E') \subset H^0(U, E)$ sont injectives.

La proposition 2.3.1. a pour conséquence que pour que ce soient des injections, il est nécessaire et suffisant que chaque $f \in E_U$ tel que $x \in U$ a un voisinage ouvert V dans U tel que $\mathscr{S}_{VU} f \in E'_V$ soit contenu dans E'_U ; ou pour le dire plus rapidement a la propriété que, pour qu'un élément f d'un E_U appartienne au sous-ensemble E'_U, soit une propriété de caractère local. Si inversement, nous commençons avec un sous-faisceau arbitraire E' de E, et que nous dénotons par E'_U le sous-ensemble $H^0(U, E')$ de $E_U = H^0(U, E)$, alors ces E'_U satisfont clairement les conditions $\mathscr{S}_{V'U} E'_U \subset E'_V$, et le sous-faisceau de E défini par eux n'est autre que E'.

Maintenant, soient E, F deux faisceaux sur X définis par les systèmes $(E_U, \mathscr{S}_{VU})$ et (F_U, Ψ_{VU}). Supposons donnée pour tout U une fonction $f_U : E_U \longrightarrow F_U$, telle que $U \supset V$ implique $\Psi_{VU} f_U = f_U \mathscr{S}_{VU}$. Alors ce système de fonctions définit, pour chaque $x \in X$, une fonction f_x de $E_x = \varinjlim E_U$ dans $F_x = \varinjlim F_U$, donc une fonction f de E dans F. On vérifie facilement (par exemple en utilisant la proposition 2.5.2.) que f est un homomorphisme de E dans F. De plus, $f(E)$ n'est rien d'autre que le sous-faisceau de F défini par les sous-ensembles $f_U(E_U)$ des F_U. Pour tout ouvert U, le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} E_U \arrow[r, "fu"] \arrow[d] & F_U \arrow[d] \\ H^0(U,E) \arrow[r, "f_*"] & H^0(U,F) \end{tikzcd}$$

En particulier, si les fonctions verticales sont bijectives, nous voyons que les fonctions f_U peuvent être identifiées avec les fonctions $f_* : H^0(X, E) \longrightarrow H^0(X, F)$ définies par l'homomorphisme f. Inversement, si nous commençons avec un homomorphisme arbitraire f de E dans F, alors l'homomorphisme défini par le système de fonctions f_U de $E_U = H^0(U, E)$ dans $F_U = H^0(U, F)$ est précisément f.

2.6 Quelques exemples.

a. Faisceaux constants et localement constants.

Soit F un espace discret, alors l'espace fibré trivial $X \times F$ est clairement un faisceau sur X ; un faisceau isomorphe à un tel faisceau est appelé constant. Les sections de ce faisceau sur un ensemble $A \subset X$ sont les fonctions continues de A dans l'ensemble discret F, i.e. les fonctions de A dans F qui sont constantes localement. Si par exemple A est connexe, elles se réduisent aux fonctions constantes de A dans F. Les images inverses et les produits des faisceaux simples sont simples.

Un faisceau E sur X est appelé localement simple, si chaque $x \in X$ a un voisinage U tel que $E|U$ est simple. Ainsi un faisceau localement simple sur X n'est rien d'autre qu'un espace couvrant de X au sens classique (mais non contraint bien sûr à être connexe). Les images inverses et les produits de faisceaux localement simples en nombre fini sont localement simples.

b. Faisceau de germes de fonctions.

Soit X un espace, E un ensemble. Considérons pour tout ouvert $U \subset X$ l'ensemble $\mathscr{F}(U,E)$ de toutes les fonctions de U dans E ; si $U \supset V$, nous avons une fonction naturelle de $\mathscr{F}(U,E)$ dans $\mathscr{F}(V,E)$, la fonction de restriction. La condition de transitivité du paragraphe 2.3 est clairement satisfaite, ainsi que la condition du corollaire de la proposition 2.3.1. Par conséquent, les ensembles $\mathscr{F}(U,E)$ peuvent être identifiés aux ensembles des sections $H^0(U,F)$ d'un faisceau bien déterminé $\mathscr{F}$, dont les éléments sont appelés les germes des fonctions de X dans E.

Si $A \subset X$, alors les éléments de $H^0(A,\mathscr{F})$ sont appelés les germes des fonctions d'un voisinage de A dans E. Si maintenant E est un espace topologique, nous pouvons considérer pour tout U le sous-ensemble $C(U,E)$ de $\mathscr{F}(U,E)$ des fonctions continues de U dans E. Comme la continuité est une condition de caractère local, il s'ensuit du paragraphe 2.5 que les ensembles $C(U,E)$ sont les ensembles des sections d'un sous-faisceau bien déterminé de $\mathscr{F}$, qui est appelé le faisceau des germes des fonctions continues de X dans E. (Si nous prenons sur E la topologie la plus grossière, nous trouvons à nouveau le premier faisceau.).

Supposons maintenant qu'E est un espace fibré sur X, alors considérons pour tout U le sous-ensemble $H^0(U,E)$ de $C(U,E)$ des sections continues de E. La propriété d'être une section est à nouveau de caractère local, et donc nous voyons que les ensembles $H^0(U,E)$ sont les ensembles de sections d'un sous-faisceau bien déterminé du faisceau des germes des fonctions continues de X dans E : le faisceau des germes des sections de l'espace fibré E. Si ce faisceau est dénoté par $\widetilde{E}$, alors $H^0(A,\widetilde{E})$ n'est autre que l'ensemble des germes des sections de E dans le voisinage de A, comme exprimé dans la définition 2.2.1.

Bien sûr, en spécialisant les espaces X et E, nous pouvons définir un grand nombre d'autres sous-faisceaux du faisceau des germes des fonctions de X dans E (les germes des fonctions différentiables, les germes des fonctions analytiques, les germes des fonctions qui sont L^P, etc.).

c. Faisceau de germes d'homomorphismes d'un espace fibré dans un autre.

Soient E et F deux espaces fibrés sur X, et pour tout ouvert $U \subset X$, soit H_U l'ensemble des homomorphismes de $E|U$ dans $F|U$. Si V est un ensemble ouvert contenu dans U, il y a une fonction naturelle évidente de la restriction $H_U \longrightarrow H_V$. La condition de transitivité aussi bien que la condition du corollaire de la proposition 2.3.1., sont satisfaites, de telle manière que les ensembles H_U apparaissent comme étant les ensembles $H^0(U,H)$ des sections d'un faisceau bien déterminé sur X, dont les éléments sont appelés les germes des homomorphismes de E dans F. Une section de ce faisceau sur X est un homomorphisme de E dans F.

d. Faisceau de germes de sous-ensembles.

Soit X un espace, pour tout ensemble ouvert $U \subset X$, appelons $P(U)$ l'ensemble des sous-ensembles de U. Si $U \supset V$, considérons la fonction $A \longrightarrow A \cap V$ de $P(U)$ dans $P(V)$. Les conditions de transitivité sont clairement vérifiées, et les conditions du corollaire de la proposition 2.3.1. sont satisfaites, de telle façon que les ensembles $P(U)$ apparaissent comme étant les ensembles $H^0(U, P(X))$ des sections d'un faisceau bien déterminé sur X, dont les éléments sont appelés les germes des ensembles dans X. Toute condition de caractère local sur les sous-ensembles de X définit un sous-faisceau de $P(X)$, par exemple le faisceau des germes des ensembles fermés (correspondant aux ensembles relativement fermés dans U), ou si X est une variété analytique, le faisceau des germes des ensembles analytiques, etc.

D'autres exemples importants de faisceaux seront considérés au chapitre suivant.

A general theory of fibre spaces with structure sheaf

Alexander Grothendieck

Introduction. When one tries to state in a general algebraic formalism the various notions of fibre space : general fibre space (without structure group, and maybe not even locally trivial) ; or fibre bundle with topological structure group G as expounded in the book of Steenrod (The Topology of Fibre Bundles, Princeton University Press) ; or the "differentiable" and "analytic" (real or complex) variants of these notions ; or the notions of algebraic fibre spaces (over an abstract field k), one is led in a natural way to the notion of fibre space with a structure sheaf G. This point of view is also suggested a priori by the possibility, now classical, to interpret the (for instance "topological") classes of fibre bundles on a space X, with abelian structure group G, as the elements of the first cohomology group of X with coefficients in the sheaf G of germs of continuous maps of X into G ; the word "continuous" being replaced by "analytic" respectively "regular" if G is supposed an analytic respectively an algebraic group (the space X being of course accordingly an analytic or algebraic variety). The use of cohomological methods in this connection have proved quite useful, and it has become natural, at least as a matter of notation, even when G is not abelian, to denote by $H^1(X,G)$ the set of classes of fibre spaces on X with structure sheaf G, G being as above a sheaf of germs of maps (continuous, or differentiable, or analytic, or algebraic as the case may be) of X into G. Here we develop systematically the notion of fibre space with structure sheaf G, where G is any sheaf of (not necessarily abelian) groups, and of the first cohomology set $H^1(X,G)$ of X with coefficients in G.

The first four chapters contain merely the first definitions concerning general fibre spaces, sheaves, fibre spaces with composition law (including the sheaves of groups) and fibre spaces with structure sheaf. The functor aspect of the notions dealt with has been stressed throughout, and as it now appears should have been stressed even more. As the proofs of most of the facts stated reduce of course to straightforward verifications, they are only sketched or even omitted, the important point being merely a consistent order in the statement of the main facts. In the last chapter, we define the cohomology set $H^1(X,G)$ of X with coefficients in the sheaf of groups G, so that the expected classification theorem for fibre spaces with structure sheaf G is valid. We then proceed to a careful study of the exact cohomology sequence associated with an exact sequence of sheaves $e \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow e$. This is the main part, and in fact the origin, of this paper. Here G is any sheaf of groups, F a subsheaf of groups, $H = G/F$, and according to various supplementary hypotheses on F (such as F normal, or F normal abelian, or

Cours donné à l'Université du Kansas, à Lawrence, aux Etats-Unis (NSF-G 1126, Projet de recherche sur la géométrie des espaces de fonctions, Rapport n° 4, première édition août 1955, seconde édition Mai 1958).

F in the center) we get an exact cohomology sequence going from $H^0(X, F)$ (the group of sections of F) to $H^1(X, G)$ respectively $H^1(X, H)$ respectively $H^2(X, H)$, with more or less additional algebraic structures involved.

The formalism thus developed is quite suggestive, and as it seems useful, in particular in dealing with the problem of classification of fibre bundles with a structure group G in which we consider a sub-group F, or the problem of comparing say the topological and analytic classification for a given analytic structure group G. However, in order to keep this exposition in reasonable bounds, no examples have been given. Some complementary facts, examples, and applications for the notions developed will be given in the future. This report has been written mainly in order to serve the author for future reference; it is hoped that it may serve the same purpose, or as an introduction to the subject, to somebody else.

Of course, as this report consists in a fortunately straightforward adaptation of quite well known notions, no real difficulties had to be overcome and there is no claim for originality whatsoever. Besides, at the moment to give this report for mimeography, I hear that results analogous to those of chapter 5 were known for some years to Mr. Frenkel, who did not publish them till now. The author only hopes that this report is more pleasant to read than it was to write, and is convinced that anyhow an exposition of this sort had to be written.

<u>Remark (added for the second edition)</u>. It has appeared that the formalism developed in this report, and specifically the results of Chapter V, are valid (and useful) also in other situations than just for sheaves on a given space X. A generalization for instance is obtained by supposing that a fixed group Π is given acting on X as a group of homeomorphisms, and that we restrict our attention to the category of fibre spaces over X (and especially sheaves) on which Π operates in a manner compatible with its operations on the base X (See for instance A. Grothendieck, Sur le mémoire de Weil; Généralisation des fonctions abéliennes, Séminaire Bourbaki Décembre 1956). When X is reduced to a point, one gets (instead of sheaves) sets, groups, homogeneous spaces etc, admitting a fixed group Π of operators, which leads to the (commutative and non-commutative) cohomology theory of the group Π. One can also replace Π by a fixed Lie group (operating on differentiable varieties, on Lie groups, and homogeneous Lie spaces). Or X, Π are replaced by a fixed ground field k, and one considers algebraic spaces, algebraic groups, homogeneous spaces defined over k, which leads to a kind of cohomology theory of k. All this suggests that there should exist a comprehensive theory of non-commutative cohomology in suitable categories, an exposition of which is still lacking. (For the "commutative" theory of cohomology, see A. Grothendieck, sur quelques points d'Algèbre Homologique, Tohoku Math. Journal, 1958).

1 General fibre spaces

Unless otherwise stated, none of the spaces to occur in this report have to be supposed separated.

1.1 Notion of fibre space.

Definition 1.1.1. A fibre space over a space X is a triple (X, E, p) of the space X, a space E and a continuous map p of E into X.

We do not require p to be onto, still less to be open, and if p is onto, we do not require the topology of X to be the quotient topology of E by the map p. For abbreviation, the fibre space (X, E, p) will often be denoted by E only, it being understood that E is provided with the supplementary structure consisting of a continuous map p of E into the space X. X is called the base space of the fibre space, p the projection, and for any $x \in X$, the subspace $p^{-1}(x)$ of E (which is closed if $\{x\}$ is closed) is the fibre of x (in E).

Given two fibre spaces (X, E, p) and (X', E', p'), a homomorphism of the first into the second is a pair of continuous maps $f : X \longrightarrow X'$ and $g : E \longrightarrow E'$, such that $p'g = fp$, i.e, commutativity holds in the diagram

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & E' \\ \big\downarrow{\scriptstyle p} & & \big\downarrow{\scriptstyle p'} \\ X & \xrightarrow{f} & X' \end{array}$$

Then g maps fibres into fibres (but not necessarily onto!); furthermore, if p is surjective, then f is uniquely determined by g. The continuous map f of X into X' being given, g will be called also a f-homomorphism of E into E'. If, moreover, E'' is a fibre space over X'', f' a continuous map $X' \longrightarrow X''$ and $g' : E' \longrightarrow E''$ a f'-homomorphism, then $g'g$ is a $f'f$-homomorphism. If f is the identity map of X onto X, we say also X-homomorphism instead of f-homomorphism. If we speak of homomorphisms of fibre spaces over X, without further comment, we will always mean X-homomorphisms.

The notion of isomorphism of a fibre space (X, E, p) onto a fibre space (X', E', p') is clear : it is a homomorphism (f, g) of the first into the second, such that f and g are onto-homeomorphisms.

1.2 Inverse image of a fibre space, inverse homomorphisms.

Let (X, E, p) be a fibre space over the space X, and let f be a continuous map of a space X' into X. Then the inverse image of the fibre space E by f is a fibre space E' over X'. E' is defined as the subspace of $X' \times E$ of points (x', y) such that $fx' = py$, the projection p' of E' into the base X' being given by $p'(x', y) = x'$. The map $g(x', y) = y$ of E' into E is then an f-homomorphism, inducing for each $x' \in X'$ a homeomorphism of the fibre of E' over x' onto the fibre of E over $f'x'$.

Suppose now, moreover, given a continuous map $f' : X'' \longrightarrow X'$ of a space X'' into X'. Then there is a canonical isomorphism of the fibre space E'' over X'', inverse image of the fibre space E by ff', and the inverse image of the fibre space E' (considered above) by f' (transitivity of inverse images). If $(x'', y) \in E''(x'' \in X'', y \in E, ff'x'' = py)$, it is mapped by this isomorphism into $(x'', (f'x'', y))$.

Let Y be a subspace of the base X of a fibre space E; consider the injection f of Y into X; the inverse image E' of E by f is called fibre-space induced by E on Y, or the restriction of E to Y, and is denoted by $E|Y$. This is canonically homeomorphic to a subspace of E, namely the set of elements mapped by p into Y; the projection of $E|Y$ into Y is induced by p. By what has been said above, if Z is a subspace of Y, the restriction of $E|Y$ to Z is the restriction $E|Z$ of E to Z.
Again let (X, E, p) and (X', E', p') be two fibre spaces, f a continuous map $X \longrightarrow X'$. An inverse homomorphism associated with f is an X-homomorphism g of the fibre space E_0 into E, where E_0 denotes the inverse image of the fibre space E' by f. That means that g is a continuous map, of the subspace E_0 of $X \times E'$ of pairs (x, y') such that $fx = p'y'$, into E, mapping for any $x \in X$ the fibre of x into E_0 (homeomorphic to the fibre of fx in E'!) into the fibre $p^{-1}(x)$ of x in E. For instance, if E is itself the inverse image of E' by f, then there is a canonical inverse homomorphism of E' into E associated with f : the identity! (Though somewhat trivial, this is the most important case of inverse homomorphisms.)

1.3 Subspace, quotient, product.

Let (X, E, p) be a fibre space, E' any subspace of E, then the restriction p' of p to E', defines E' as a fibre space with the same basis X, called a sub-fibre-space of E. So the sub-fibre-spaces of E are in one to one correspondence with the subsets of E; in particular, for them the notions of union, intersection etc. are defined. (Of course, in most cases we are only interested in fibre spaces the projection of which is onto; this imposes then a condition on the subspaces of E considered, which may be fulfilled for two subspaces and not for the intersection.)

Let now R be an equivalence relation in E compatible with the map p, i.e. such that two elements of E congruent mod R have the same image under p. Then p defines a continuous map p' of the quotient space $E' = E/R$ into X, which turns E' into a fibre space with base X, called a quotient fibre space of E. So the latter are in one-to-one correspondence with the equivalence relations in E compatible with p. A quotient fibre space of a quotient fibre space of E is a quotient fibre space.

Let (X, E, p) and (X', E', p') be two fibre spaces, then (p, p') defines a continuous map of $E \times E'$ into $X \times X'$, so that $E \times E'$ appears as a fibre space over $X \times X'$, called the

product of the fibre spaces E, E'.
The fibre of (x, x') in $E \times E'$ is the product of the fibres of x in E, respectively x' in E'. Suppose now $X = X'$, and consider the inverse image of $E \times E'$ under the diagonal map $X \longrightarrow X \times X$, we get a fibre space over X, called the fibre product of the fibre spaces E, E' over X, denoted by $E \underset{(X)}{\times} E'$. The fibre of x in this fibre-product is the product of the fibres of x in E respectively E'. Of course, product of an arbitrary family of fibre spaces can be considered, and the usual formal properties hold.

1.4 Trivial and locally trivial fibre spaces.

Let X and F be two spaces, E the product space, the projection of the product on X defines E as a fibre space over X, called the trivial fibre space over X with fibre F.

All fibres are canonically homeomorphic with F. Let us determine the homomorphisms of a trivial fibre space $E = X \times F$ into another $E' = X \times F'$. More generally, we will only assume that the projection of $X \times F$ onto X is the natural one and continuous for the given topology of $X \times F$, which induces on the fibres the given topology (but the topology of $X \times F$ may not be the product topology, for instance : X and F are algebraic varieties with the Zariski topology) ; same hypothesis on $X \times F'$. Then a homomorphism u of E into E', inducing for each $x \in X$ a continuous map of the fibre of E over x into the fibre of E' over x, defines a function $x \longrightarrow f(x)$ of X into the set of all continuous maps of F into F', and of course the homomorphism is well determined by this map by the formula

$$(1.4.1) \qquad u(x, y) = (x, f(x).y) \qquad (x \in X, y \in F).$$

So the homomorphisms of E into E' can be identified with those maps f of X into the set of continuous maps of F into F' such that the map (1.4.1) is continuous. If the topologies of E and E' are the product topologies, this means that $(x, y) \longrightarrow f(x).y$ is continuous ; as is well known, if moreover F is locally compact or metrizable, this means also that f is continuous when we take on the set of all continuous maps from F into F' the topology of compact convergence. If we consider a homomorphism v from E' into $E'' = X \times F''$ given by a map g of X into the set of all continuous maps of F' into F'' the homomorphism vu is given by the map $x \longrightarrow g(x)f(x)$. In order that the map (1.4.1) be injective (respectively surjective, bijective) it is necessary and sufficient that for each $x \in X$, $f(x)$ has the same property. In the bijective case, the inverse map is then defined by the function $x \longrightarrow f(x)^{-1}$. It follows that u is an isomorphism onto if and only if for each $x \in X$, f is a homeomorphism of F onto F', and the map $(x, y') \longrightarrow (x, f(x)^{-1}.y')$ continuous. So we get in particular (coming back to the case of trivial fibre spaces) :

Proposition 1.4.1. Let $E = X \times F$ and $E' = X \times F'$ be two trivial fibre spaces over X, then the isomorphisms of E onto E' can be identified with the maps f of X into the set of homeomorphisms of F onto F' such that $f(x).y$ and $f(x)^{-1}.y'$ be continuous functions from $X \times F$ into F' respectively $X \times F'$ into F. If $E = E'$, this identification is compatible with the group structures on the set of automorphisms of E respectively the set of maps of X into the group of automorphisms of F.

Two fibre spaces E, E' over X are said to be locally isomorphic if each point x of X has a neighborhood U (which can be assumed open) such that the restrictions of E and E' to U are isomorphic. This is clearly an equivalence relation. A fibre space E over X is said locally trivial with fibre F (F being a given space) if it is locally isomorphic to the trivial space $X \times F$.

1.5 Definition of fibre spaces by coordinate transformations.

Let X be a space, (U_i) a covering of X, for each index i, let E_i be a fibre space over U_i, and for any couple of indices i, j such that $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \varnothing$, let f_{ij} be a U_{ij}-isomorphism of $E_j|U_{ij}$ onto $E_i|U_{ij}$. On the topological sum $\mathscr{E}$ of the spaces E_i, let us consider the relation

(1.5.1.) $\quad y_i \in E_i|U_{ij}$ and $y_j \in E_j|U_{ij}$ are equivalent means $y_i = f_{ij} y_j$.

This is an equivalence relation, as easily checked, if and only if we have, for each triple (i, j, k) of indices such that $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k \neq \varnothing$, the relation

(1.5.2.) $\quad f_{ik} = f_{ij} f_{jk}$

(where, in order to abbreviate notations, we wrote simply f_{ik} instead of : the isomorphism of $E_k|U_{ijk}$ onto $E_i|U_{ijk}$ induced by f_{ik} and likewise for f_{ij} and f_{jk}). Supposing this condition satisfied, let E be the quotient space of $\mathscr{E}$ by the preceding equivalence relation. The projections p_i of E_i into U_i define a continuous map of the topological sum $\mathscr{E}$ into X, and this map is compatible with the equivalence relation in $\mathscr{E}$, so that there is a continuous map p of E into X (which is onto if the p_i's are all onto).

Definition 1.5.1. The fibre space over X just constructed is called the fibre space defined by the "coordinate transformations" (f_{ij}) between the fibre spaces E_i.

The identity map of E_i into $\mathscr{E}$ defines a map $\mathscr{S}_i$, of E_i into E, which by virtue of (1.5.1.) is a one to one U_i-homomorphism of E_i onto $E|U_i$. The topology of E (by a well known transitivity property for topologies defined as the finest which ...) is the finest topology on E for which the maps $\mathscr{S}_i$ are continuous. Moreover, it is easy to show that in case the interiors of the U_i's already cover X, the maps $\mathscr{S}_i$ are homeomorphisms into. Henceforth, for simplicity we will only work with open coverings of X, so that the preceding properties are automatically satisfied. Then $\mathscr{S}_i$ can be considered as a U_i-isomorphism of E_i onto $E|U_i$. Clearly

(1.5.3.) $\quad f_{ij} = \mathscr{S}_i^{-1} \mathscr{S}_j$

(where again, in order to abbreviate, we wrote $\mathscr{S}_i$ instead of the restriction of $\mathscr{S}_i$ to $E_i|U_{ij}$, $\mathscr{S}_j$ instead of the restriction of $\mathscr{S}_j$ to $E_j|U_{ij}$). Conversely, let E be a fibre space over X, and suppose that for each i, there exists a U_i-isomorphism $\mathscr{S}_i$ of E_i onto $E|U_i$, then (1.5.3.) defines, for each pair (i,j) such that $U_i \cap U_j = U_{ij} \neq \varnothing$, a U_{ij}-isomorphism of $E_j|U_{ij}$ onto $E_i|U_{ij}$, and the system (f_{ij}) satisfies obviously (1.5.2.). Therefore we can consider the fibre space E' defined by the coordinate transformations f_{ij}. Then it is obvious that the map of $\mathscr{E}$ into E defined by the maps $\mathscr{S}_i$ is compatible with the equivalence relation in $\mathscr{E}$, therefore defines a continuous map f of E' into E which is of course an X-homomorphism. Let $\mathscr{S}'_i$ be the natural isomorphism of E_i onto $E'|U_i$ defined above; it is checked at once that the map of $E'|U_i$ into $E|U_i$ induced by f is $\mathscr{S}_i\mathscr{S}_i'^{-1}$, hence an isomorphism onto. It follows that f itself is an isomorphism of E' onto E, by virtue of the following easy lemma (proof left to the reader) :

<u>Lemma 1.</u> Let E, E' be two fibre spaces over X, and f an X-homomorphism of E into E', such that for any $x \in X$, exists a neighborhood U of x such that f induces an isomorphism of $E|U$ onto (respectively, into) $E'|U$. Then f is an X-isomorphism of E onto (respectively, into) E'.

What precedes shows the truth of :

<u>Proposition 1.5.1.</u> The open covering (U_i) and the fibre spaces E_i over U_i being given, the fibre spaces over X which can be obtained by means of suitable coordinate transformations (f_{ij}) are exactly those, up to isomorphism, for which $E|U_i$ is isomorphic to E_i for any i.

Consider now two systems of coordinate transformations $(f_{ij}), (f'_{ij})$ corresponding to the same covering (U_i), and to two systems (E_i), (E'_i) of fibre spaces over the U_i's. Let E be the fibre space defined by (f_{ij}) and E' the fibre space defined by (f'_{ij}); we will determine all homomorphisms of E into E'. If f is such a homomorphism, then for each i, $f_i = \mathscr{S}_i'^{-1} f \mathscr{S}_i$ (where f stands for the restriction of f to $E|U_i$) is a homomorphism of E_i into E'_i, and the system (f_i) satisfies clearly, for each pair (i,j) such that $U_{ij} \neq \varnothing$:

(1.5.4) $$f_i f_{ij} = f'_{ij} f_j$$

(where we write simply f_i instead of the restriction of f_i to $E_i|U_{ij}$, and likewise for f_j). The homomorphism f is moreover fully determined by the system (f_i) since f_i determines the restriction of f to $E|U_i$; and moreover the system (f_i) subject to (1.5.4) can be chosen otherwise arbitrarily, for this relation expresses exactly that the map of the topological sum $\mathscr{E}$ of the E_i's into the topological sum $\mathscr{E}'$ of the E'_i's transforms equivalent points into equivalent points, and therefore defines an X-homomorphism f of E into E'; and it is clear that the system (f_i) is nothing else but the one which is defined as above in terms of the homomorphism f. Of course, in view of lemma 1, in order that f be an isomorphism onto, (respectively, into) it is necessary and sufficient that each f_i be an isomorphism of E_i onto (respectively, into) E'_i. Thus we get :

Proposition 1.5.2. Given two fibre spaces over X, E and E', defined by coordinate transformations (f_{ij}) respectively (f'_{ij}) relative to the same open covering (U_i), the X-homomorphisms f of E into E' are in one to one correspondence with systems (f_i) of U_i-homomorphisms $E_i \longrightarrow E'_i$ satisfying (1.5.4.). f is an onto-isomorphism if and only if the f'_i's are, i.e. E' is isomorphic to E if and only if we can find onto-isomorphisms $f_i : E_i \longrightarrow E'_i$ such that, for any pair (i,j) of indices satisfying $U_{ij} \neq \varnothing$, we have

(1.5.5.) $$f'_{ij} = f_i f_{ij} f_j^{-1}$$

(where as usual f_i and f_j stand for restricted maps).

We proceed to the comparison of fibre spaces E, E' defined by coordinate transformations corresponding to different coverings, (U_i) and (U'_i), in particular to the determination of the homomorphisms of E into E' and hence of the X-isomorphisms of E and E', and therefore to the determination of whether E and E' are isomorphic. Let (V_j) be an open covering of X which is a refinement of both preceding coverings; we will show that E and E' are isomorphic to fibre spaces defined by coordinate transformations relative to this same covering (V_j), so that the problem is reduced to one already dealt with.

So let $(U_i)_{i\in I}$ and $(V_j)_{j\in J}$ be two open coverings of X, the second finer than the first, that is any V_j is contained in some U_i, i.e. there exists at least one map $\tau : J \longrightarrow I$ such that $V_j \in U_{\tau(j)}$ for any $j \in J$. For each $i \in I$, let E_i be a fibre space over U_i, and let $(f_{ii'})$ be a system of coordinate transforms relative to the system (E_i). For each $j \in J$, let $F_j = E_{\tau(j)}|V_j$, and let $g_{jj'}$ be the restriction of $f_{\tau(j),\tau(j')}$ to $F_j|V_{jj'}$; so $g_{jj'}$ is an isomorphism of $F_j|V_{jj'}$ onto $F_j|V_{jj'}$, and the system $(g_{jj'})$ is a system of coordinate transformations, as follows at once from the definition and (1.5.2.) applied to the system $(f_{ii'})$. Let F be the fibre space defined by the system of coordinate transformations $(g_{jj'})$; we shall define a canonical X-isomorphism of F onto E. For $j \in J$, let g_j be the injection map of F_j into $E_{\tau(j)}$; it is hence a map of F_j into the topological sum $\mathscr{E}$ of the E_i's; the system (g_j) defines a continuous map g' of the topological sum $\mathcal{F}$ of the f_j's into $\mathscr{E}$, and as easily seen g' maps equivalent points into equivalent points. Hence g' induces a continuous map g of F into E, which clearly is an X-homomorphism. Moreover, for any j, g induces an isomorphism of $F|V_j$ onto $E|V_j$, for if we compose it with the natural isomorphism of $E|U_i$ onto E_i, we get the injection map of $E|V_j$ into E_i (we put $i = \tau(j)$). Now applying lemma 1, we see that g is an isomorphism of F onto E.

1.6 The case of locally trivial fibre spaces.

The method of the preceding section for constructing fibre spaces over X will be used mainly in the case where we are given a fibre space T over X, and where, given an open covering (U_i) of X, we consider the fibre spaces $E_i = T|U_i$ over U_i and coordinate transformations (f_{ij}) with respect to these. Then f_{ij} is an U_{ij}-automorphism of $T|U_{ij}$. The fibre space defined by the system (f_{ij}) of coordinate transformations will be locally isomorphic (cf. 1.4.) to T, and in virtue of proposition 1.5.1., we obtain in this way exactly (up to isomorphism) all fibre spaces over X which are locally isomorphic to T (by taking the open sets U_i small enough, and then a suitable system (f_{ij}).

In case T is a trivial fibre space, $T = X \times F$, we have $E_i = U_i \times F$, and $E_i | U_{ij} = U_{ij} \times F$. Thus f_{ij} is an automorphism of the trivial fibre space $U_{ij} \times F$, and therefore, in view of proposition 1.4.1. given by a map $x \longrightarrow f_{ij}(x)$ of U_{ij} into the group of homeomorphisms of F onto itself. The equations (1.5.2.) expressing that (f_{ij}) is a system of coordinate transformations then translate into

$$\text{(1.6.1.)} \qquad f_{ik}(x) = f_{ij}(x) f_{jk}(x) \qquad \text{for } x \in U_{ijk}$$

Moreover, it must not be forgotten that $x \longrightarrow f_{ij}(x)$ is submitted to the continuity condition of proposition 1.4.1. Such a system then defines in a natural way a fibre space E over X, and by what has been said it follows that this fibre bundle is locally isomorphic to $X \times F$, i.e. locally trivial with fibre F, and that (for suitable choice of the covering and the coordinate transformations), we get thus, up to isomorphism, all locally trivial fibre spaces over X with fibre F.

Let in the same way $T' = X \times F'$, and consider for the same covering (U_i) a system (f_{ij}) and a system (f'_{ij}) of coordinate transformations, the first relative to the fibre F and the second to the fibre F'. Let E and E' be the corresponding fibre spaces over X. The homomorphisms of E into E', by proposition 1.5.2., correspond to homomorphisms f_i of $E_i = U_i \times F$ into $E'_i = U_i \times F'$, satisfying conditions (1.5.4). Now, (proposition 1.4.1.) such a homomorphism f_i is determined by a map $x \longrightarrow f_i(x)$ of U_i into the set of continuous maps of F into F' by $f_i(x, y) = (x, f_i(x).y)$, subject to the only requirement that $f_i(x).y$ is continuous with respect to the pair $(x, y) \in U_i \times F$. Then the equation (1.5.4.) translates into

$$\text{(1.6.2.)} \qquad f_i(x) f_{ij}(x) = f'_{ij}(x) f_j(x) \qquad (x \in U_{ij})$$

Thus are determined the homomorphisms of E into E'. In particular, the isomorphisms of E onto E' are obtained by systems (f_i) such that $f_i(x)$ be a homeomorphism of F onto F' for any $x \in U_i$, and that $x \longrightarrow f_i^{-1}(x)$ satisfies the same continuity requirement as $x \longrightarrow f_i(x)$. The compatibility condition (1.6.2.) can then be written

$$\text{(1.6.3.)} \qquad f'_{ij}(x) = f_i(x) f_{ij}(x) f_j(x)^{-1} \qquad (x \in U_{ij})$$

1.7 Sections of fibre spaces.

Definition 1.7.1. Let (X, E, p) be a fibre space; a section of this fibre space (or, by pleonasm, a section of E over X) is a map x of X into E such that ps is the identity map of X. The set of continuous sections of E is noted $H^0(X, E)$.

It amounts to the same to say that s is a function the value of which at each $x \in X$ is in the fibre of x in E (which depends on x !). The existence of a section implies of course that p is onto, and conversely if we do not require continuity. However, we are primarily interested in continuous sections. A section of E over a subset Y of X is by definition a section of $E|Y$. If Y is open, we write $H^0(Y, E)$ for the set $H^0(Y, E|Y)$ of all continuous sections of E over Y.

$H^0(X, E)$ as a functor. Let E, E' be two fibre spaces over X, f an X-homomorphism of E into E'. For any section s of E, the composed map fs is a section of E', continuous if s is continuous. We get thus a map, noted f, of $H^0(X, E)$ into $H^0(X, E')$. The usual functor properties are satisfied :

a. If the two fibre spaces are identical and f is the identity, then so is f

b. if f is an X-homomorphism of E into E' and f' an X-homomorphism of E' into E'' (E, E', E'' fibre spaces over X) then $(f'f) = f'\,f$.

Let (X, E, p) be a fibre space, f a continuous map of a space X' into X, and E' the inverse image of E under f. Let s be a section of E' consider the map s' of X' into E' given by $s'x' = (x', sfx')$ (the second member belongs to E', since $fx' = psfx'$ because px = identity), this is a section of E', continuous if s is continuous. Thus we get a canonical map of $H^0(X, E)$ into $H^0(X', E')$ (E' being the inverse image of E by f). In case $X' \subset X$ and f is the inclusion map, therefore $E' = E|X'$, then the preceding map is nothing but the restriction map (of $H^0(X, E)$ into $H^0(X', E)$ if X' open). We leave to the reader statement and proof of an evident property of transitivity for the canonical maps just considered.

The two sorts of homomorphisms for sets of continuous sections are compatible in the following sense. Let $\mathscr{S}$ be a fixed continuous map of a space X' into X, then to any fibre space E over X corresponds its inverse image E' under $\mathscr{S}$, which is a fibre space over X' ; moreover, given an X-homomorphism $f : E \longrightarrow F$, it defines in a natural way an X'-homomorphism f' of E' into F'. (We could go further and state that, for fixed $\mathscr{S}$, E' is a “functor” of E by means of the preceding definitions.)

Then the following diagram

$$\begin{array}{ccc} H^0(X, E) & \xrightarrow{f_*} & H^0(X, F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(X', E') & \xrightarrow{f'_*} & H^0(X', F') \end{array}$$

is commutative, where the vertical arrows stand for the canonical homomorphisms defined above. The checking of course is trivial. Particular case : replacing X by an open subset U of X, and taking for X' an open subset V of U and $\mathscr{S}$ the inclusion map

$V \longrightarrow U$, we get that for any two fibre spaces E, F over X and X-homomorphism $f : E \longrightarrow F$, the following diagram is commutative :

$$\begin{array}{ccc} H^0(U,E) & \longrightarrow & H^0(U,F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(V,E) & \longrightarrow & H^0(V,F) \end{array}$$

where the vertical arrows are the restriction maps, and the horizontal arrows are the maps defined by f (or, strictly speaking, by the restrictions of f to $E|U$ respectively $E|V$). In words : the "homomorphisms" between spaces of sections over open sets defined by X-homomorphisms of fibre spaces commute with the restriction operators.

Determination of sections. Let us come back to the conditions of the definition 1.5.1. ; we keep the notations of that section. Let s be a section of the fibre space E, and for any i, let $s_i = \mathscr{S}_i^{-1} s$; then s_i is a section of E_i over U_i, and from $s = \mathscr{S}_i s_i = \mathscr{S}_j s_j$ over U_{ij} we get $s_i = \mathscr{S}_i^{-1} \mathscr{S}_j s_j = f_{ij} s_j$:

(1.7.3.) $\qquad s_i = f_{ij} s_j$

where again we write s_i, s_j instead of : restriction of s_i, s_j to U_{ij}.

Of course, s is entirely determined by the system (s_i), for s is given over U_i by $s = \mathscr{S}_i s_i$. On the other hand, the system (s_i) subject to (1.7.3.) can be otherwise arbitrary, for these conditions express precisely that for $x \in X$, the element $\mathscr{S}_i s_i(x)$ of E obtained by taking a U_i containing x does not depend on i, and may therefore be denoted by $s(x)$: Then the $\mathscr{S}_i^{-1} s$ determined by the above definition are of course nothing else than the s_i's we started with. Let us note also that in order that the section s be continuous, it is necessary and sufficient that each s_i be continuous. We thus obtain :

Proposition 1.7.1. Let E be the fibre space defined by coordinate transformations (f_{ij}) relative to an open covering (U_i) of X and fibre spaces E_i over U_i. Then there is a canonical one to one correspondence between sections of E and systems (s_i) of sections of E_i over U_i, i satisfying conditions (1.7.3.). Continuous sections correspond to systems of continuous sections.

Let again, as in section 1.5, be given two systems (E_i) and (E'_i) of fibre spaces over the U_i's and two corresponding systems of coordinate transformations (f_{ij}) and (f'_{ij}) let E and E' be the corresponding fibre spaces, and f an X-homomorphism of E into E', defined by virtue of proposition 1.5.2., by a system (f_i) of U_i-homomorphisms of E, into E_i satisfying (1.5.4.). Let s be a section of E, given by a system (s_i) of sections of E_i over U_i. Then the system $(f_i s_i)$ of sections of E'_i over U_i defines the section fs (trivial).

The reader may check, as an exercise, how the canonical maps of spaces of sections considered above in this section, can be made explicit for fibre spaces given by means of coordinate transformations.

2 Sheaves of sets

Throughout this exposition, we will now use the word "section" for "continuous section".

2.1 Sheaves of sets.

Definition 2.1.1. Let X be a space. A sheaf of sets on X (or simply a sheaf) is a fibre space (E, X, p) with base X, satisfying the condition : each point a of E has an open neighborhood U such that p induces a homeomorphism of U onto an open subset $p(U)$ of X.

This can be expressed by saying that p is an interior map and a local homeomorphism. It should be kept in mind that, even if X is separated, E is not supposed separated (and will in most important instances not be separated).

With the notations of definition 2.1.1, let $x = p(a)$. If f is a section of E such that $fx = a$, then $V = f^{-1}(U) \cap p(U)$ is an open set containing x, and on this neighborhood V of x, f must coincide with the inverse of the homeomorphism $p|U$ of U onto $p(U)$. In particular

Proposition 2.1.1. Two sections of a sheaf E defined in a neighborhood of x and taking the same value at x coincide in some neighborhood of X.

Corollary : Given two sections of E in an open set V, the set of points where they are equal is open. (But in general not closed, as would be the case if E were separated!).

2.2 $H^0(A, E)$ for arbitrary $A \subset X$.

First let E be an arbitrary fibre space over X. Let A be an arbitrary subset of X ; the open neighborhoods of A, ordered by $\supset$, form an ordered filtering set. To each element U of this set is associated a set $H^0(U, E)$: the set of sections of E over U, and if $U \supset V$ (U and V open neighborhoods of A), we have a natural map $\mathscr{S}_{VU} : H^0(U, E) \longrightarrow H^0(V, E)$ (restriction map), with the evident transitivity property $\mathscr{S}_{WV}\mathscr{S}_{VU} = \mathscr{S}_{WU}$ when $U \supset V \supset W$. Therefore we can consider the direct limit of the family of sets $H^0(U, E)$ for the maps $\mathscr{S}_{VU}$.

Definition 2.2.1. We put $H^0(A, E) = \varinjlim H^0(U, E)$, ($U$ ranging over the open neighborhoods as explained above). If $A = \{x\}$ ($x \in X$), we simply write $H^0(x, E)$. The elements of $H^0(A, E)$ are called germs of sections of E in the neighborhood of A.

If A is open, we find of course nothing else but the set of continuous sections of E over A, already denoted by $H^0(A,E)$. If $A \supset B$, there is a natural map, again noted $\mathscr{S}_{BA}$ of $H^0(A,E)$ into $H^0(B,E)$, (definition left to the reader). When A and B are both open, this is the usual restriction map (therefore it will in general still be called restriction map); when A is open, then this is the natural homomorphism of $H^0(A,E)$ into the direct limit of all $H^0(A',E)$ corresponding to open neighborhoods A' of B. Of course $A \supset B \supset C$ implies $\mathscr{S}_{CB}\mathscr{S}_{BA} = \mathscr{S}_{CA}$.

Let $\Gamma(A,E)$ be the set of continuous sections of E over the arbitrary set $A \supset X$, then the restriction maps $H^0(U,E) = \Gamma(U,E) \longrightarrow \Gamma(A,E)$ (U, open neighborhood of A) define a natural map of $\varinjlim H^0(U,E) = H^0(A,E)$ into $\Gamma(A,E)$. In particular, there is a natural map $H^0(x,E) \longrightarrow E_x$, where E_x is the fibre of x in E (value at x of a germ of section in a neighborhood of x). This of course, though frequently an onto-map, will seldom be one-to-one. However :

<u>Proposition 2.2.1.</u> If E is a sheaf on X, then for $x \in X$, the canonical map $H^0(x,E) \longrightarrow E_x$, is bijective (i.e, one-to-one and onto). If A is any subset of X, then the canonical map $H^0(A,E) \longrightarrow \Gamma(A,E)$ is one-to-one; it is moreover onto if A admits a fundamental system of paracompact neighborhoods.

The one-to-one parts are contained in Proposition 2.1.1 and its corollary. The first onto-assertion results at once from definition 2.1.1. Now let f be a continuous section of E over A; for any $x \in A$, let g_x be a continuous section of E on an open neighborhood V_x of x in X, such that $g_x(x) = f(x)$ (these exist by first part of proposition 2.2.1.). Moreover, by the first part of proposition 2.1.1. applied to $E|A$, we can suppose V_x small enough so that on $V_x \cap A$, g_x and f coincide. We can suppose that $U = \cup V_x$ is a paracompact neighborhood of A. Let $(V_i)_{i\in I}$ be an open locally finite covering of U finer than (V_x), that is each V_i is contained in some V_x. Then for each V_i exists $g_i \in H^0(V_i,E)$ such that g_i and f coincide on $V_i \cap A$. U being paracompact, we can find an open covering (V_i') of U such that the relative closure of V_i' in U be contained in V_i. For each $x \in A$, there exists an open neighborhood W_x of x in U meeting only a finite number among the V_i's; taking W_x small enough, we can assume that $x \notin \overline{V_i'}$ implies $V_i' \cap W_x = \varnothing$, and $x \in \overline{V_i'}$ implies $W_x \subset V_i$. Moreover, by virtue of proposition 2.1.1., we can suppose that the corresponding g_i's are identical on W_x since they take the same value $f(x)$ at x. Therefore whenever a V_i' encounters W_x, then g_i is defined on W_x and does not depend on the choice of i, so that we can denote it by h_x. It follows that in $W_x \cap W_y$, h_x and h_y are the same, therefore, the h_x are the restrictions of a unique section h of E over $W = \cup W_x$. This is a continuous section of E on an open neighborhood of A, and we see at once that its restriction to A is f. This ends the proof.

<u>Remark.</u> The last part of proposition 2.2.1. becomes false if we drop the paracompactness restriction. Let for instance X be an infinite set, with the topology in which the open sets are the complements of all finite sets (such spaces are significant in algebraic topology,

for instance : irreducible algebraic curve with the Zariski topology). Let F be a discrete space ; consider the trivial fibre space $X \times F$. This is a sheaf ; its sections on a set A are the locally constant maps of A into F (cf. section 2. 6. below, example a). Let A be a finite subset of X ; it is seen at once that any open neighborhood of A is homeomorphic to X and hence connected ; therefore a section of E on such a neighborhood is constant ; but sections on A can have arbitrary distinct values at the points of A and therefore will not in general be restrictions of sections defined in a neighborhood of A.

2.3 Definition of a sheaf by systems of sets.

As we noticed in the preceding section, any fibre space E (and in particular any sheaf) determines sets $H^0(U, E)$ (for instance for any open $U \subset X$) and maps $H^0(U, E) \longrightarrow H^0(V, E)$ for $U \supset V$, satisfying an evident transitivity property. Proposition 2.2.1. suggests that conversely such a system should define a sheaf. Indeed, let $\mathcal{V}$ be an open covering of X, and suppose defined a function $U \longrightarrow E_U$ on the set of open sets which are small of order $\mathcal{V}$ (i. e. contained in some set element of $\mathcal{V}$), each E_U being a set. Suppose given moreover, if U and V are $\mathcal{V}$-small and $U \supset V$, a map $\mathscr{S}_{VU} : E_U \longrightarrow E_V$, these maps satisfying the transitivity condition

(2.3.1.) $$\mathscr{S}_{WV}\mathscr{S}_{VU} = \mathscr{S}_{WU} \qquad \text{(if } U \supset V \supset W\text{)},$$

For any $x \in X$, let $E_x = \varinjlim E_U$, U ranging over the ordered filtering set of open neighborhoods of x (ordered by $\supset$). Let E be the union of the E_x's, and p the map of E into X mapping E_x in x. Define in E a topology as follows : for any $f \in E_U$ and $x \in U$, we consider the canonical image $f_x \in E$ of f in the direct limit E_x of the sets E'_U corresponding to all open neighborhoods U' of x. Let $O(f)$ be the set of all elements $f_x \in E$ when x ranges over U. When U and $f \in E_U$ vary, we get a family of subsets $O(f)$ of E, which generate a topology on E. It is easily checked that (E, X, p) form a sheaf, that is that p is continuous, interior and a local homeomorphism.

Definition 2.3.1. The sheaf E thus defined is called the sheaf defined by the system of sets E_U and maps $\mathscr{S}_{VU}$.

Consider now an open set $U \subset X$, $\mathcal{V}$-small ; for any $f \in E_U$, the map $x \longrightarrow f_x$ is clearly a section of the sheaf E, and moreover continuous, which we denote by $\widetilde{f}$. We get thus a natural map $f \longrightarrow \widetilde{f}$ of E_U into $H^0(U, E)$.

Proposition 2.3.1. In order that $f \longrightarrow \widetilde{f}$ be a one-to-one map, it is necessary and sufficient that for any open covering (U_i) of U, and two elements f, g of E_U, $\mathscr{S}_{U_iU} f = \mathscr{S}_{U_iU} g$ for each i implies $f = g$. In order that $f \longrightarrow \widetilde{f}$ be onto, it is necessary and sufficient that for any open covering (U_i) of U, and any system $(f_i) \in \cap E_{U_i}$ satisfying

(2.3.2.) $$\mathscr{S}_{U_i \cap U_j, U_i} f_i = \mathscr{S}_{U_i \cap U_j, U_j} f_j \qquad \text{when } U_i \cap U_j \neq \varnothing$$

there exists $af \in E_U$ such that $f_i = \mathscr{S}_{U_iU} f$ for each i.

Corollary. In order that $f \longrightarrow \widetilde{f}$ be bijective, it is necessary and sufficient that for any open covering (U_i) of U, the natural map $E_U \longrightarrow \cap E_{U_i}$ (the components of which are the maps $\mathscr{S}_{U_i U}$) be a one-to-one map of E_U onto the subset of the product of all (f_i) satisfying condition (2.3.2.).

Proof left to the reader, as well as the proof of the following :

Proposition 2.3.2. Let E be a sheaf on X, consider the system of sets $H^0(U, E)$ and of restriction maps $\mathscr{S}_{VU} : H^0(U, E) \longrightarrow H^0(V, E)$ for $U \supset V$ (U, V open sets). Then the sheaf E' defined by these data (definition 2.3.1.) is canonically isomorphic to E, this isomorphism, transforming for each $x \in X$, $E'_x = \varinjlim H^0(U, E) = H^0(x, E)$ into E_x, being the isomorphism considered in proposition 2.2.1.

The two preceding propositions show essential equivalence of the notion of sheaf on the space X, and the notion of a system of sets (E_U) (U open $\subset X$) and of maps $\mathscr{S}_{VU}$ for $U \supset V$, satisfying conditions (2.3.1.) and the condition of corollary of proposition 2.3.1. Both pictures are of importance, the second more intuitive, but the first often technically more simple.

Exercise. Given a system of sets E_U (U open and $\mathscr{V}$-small) and of homomorphisms $\mathscr{S}_{VU}$ ($U \supset V$) satisfying (2.3.1.), prove that if we restrict to those U which are $\mathscr{V}'$-small (where $\mathscr{V}'$ is an open covering of X finer than $\mathscr{V}$), the sheaf defined by this new system is canonically isomorphic to the sheaf defined by the first.

2.4 Permanence properties.

Let E be a sheaf on the space X, and let f be a continuous map of a space X' into X, then the inverse image of the fibre space E by f (cf 1.2.) is again a sheaf. In particular, if $X' \subset X$, E induces a sheaf on X'.

If E is a sheaf on X, F a sheaf on Y, then $E \times F$ is a sheaf on $X \times Y$; therefore, if E and F are two sheaves on X, then their fibre-product $E \underset{X}{\times} F$ (cf. 1.3) is again a sheaf; this extends to the product of a finite number of sheaves.

Under the conditions of 1.5. suppose that the fibre spaces E_i on the open sets U_i are sheaves, then the fibre space E obtained by means of coordinate transforms f_{ij} is again a sheaf. This results at once from the more general remark : if E is a fibre space such that each $x \in X$ has a neighborhood U such that $E|U$ be a sheaf, then E is a sheaf (trivial).

2.5 Subsheaf, quotient sheaf. Homomorphisms of sheaves.

Proposition 2.5.1. Let E be a sheaf on the space X. In order that a subset F of E, considered as a fibre space over X, be a sheaf, it is necessary and sufficient that it be open. In order that the quotient of E by an equivalence relation R compatible with the fibering, be a sheaf, it is necessary and sufficient that the set of equivalent pairs (z, z') be open in the fibered product $E \underset{X}{\times} E$.

These conditions can be stated also equivalently : if a section f of E in a neighborhood of $x \in X$ is such that $fx \in F$, then $fy \in F$ for y in a neighborhood of x ; if two sections f, g of E in a neighborhood of $x \in X$ are such that fx and gx are equivalent mod R, then fy and gy are equivalent mod R for y in a neighborhood of x.

Proposition 2.5.2. Let E be a sheaf on X, E' a sheaf on X', f a continuous map of X into X' and g a map from E into E' such that $p'g = fp$ $(p, p'$ being the projections of $E, e')$. In order for g to be an f-homomorphism (i.e. to be continuous) it is necessary and sufficient that for any section s of E over an open set U, gs be a section of E' over $f(U)$.

Corollary 1. Let f be a bijective X-homomorphism of a sheaf E in a sheaf F, then f is an isomorphism of E onto F.

Corollary 2. Let E, F be two sheaves on X, f an X-homomorphism of E into F. Then f is an interior map, and $f(E)$ is a subsheaf of F. The quotient of E by the equivalence relation defined by the map f is again a sheaf, and f defines an isomorphism of this quotient onto the sheaf $f(E)$.

Consider now a system $(E_U, \mathscr{S}_{VU})$ as in section 2.3., defining a sheaf E. Suppose given for each U a subset E'_U of E_U, such that $U \supset V$ implies $\mathscr{S}_{VU}(E'_U) \subset E'_V$. Let $\mathscr{S}'_{VU}$ be the map of E'_U into E'_V defined by $\mathscr{S}_{VU'}$, then the system $(E'_U, \mathscr{S}'_{VU}$ defines a sheaf E'. For any $x \in X$, the fibres of x in E respectively E' are given by

$$E_x = \varinjlim E_U \qquad E'_x = \varinjlim E'_U$$

the direct limit being taken in the ordered filtering set of open neighborhoods of x. Therefore, we have a natural injection $E'_x \subset E_x$, and hence $E' \subset E$. It is easily checked that the injection of E' into E is a homomorphism, (a particular case of a general characterization of homomorphisms to be given below), so that by corollary 1 above, E' is isomorphic to a subsheaf of E. Suppose that the conditions of proposition 2.3.1. corollary, are satisfied, which insure that $E_U = H^0(U, E)$. Then clearly the canonical maps $E'_U \longrightarrow H^0(U, E') \subset H^0(U, E)$ are one-to-one.

Proposition 2.3.1. yields that in order that they be onto, it is necessary and sufficient that any $f \in E_U$ such that each $x \in U$ has an open neighborhood V in U such that $\mathscr{S}_{VU} f \in E'_V$ be contained in E'_U ; or shortly speaking that the property, for an element

f of an E_U to belong to the subset E'_U, be a property of local character. If conversely we start with an arbitrary subsheaf E' of E, and denote by E'_U the subset $H^0(U, E')$ of $E_U = H^0(U, E)$, then these E'_U clearly satisfy to the conditions $\mathscr{S}_{V'U} E'_U \subset E'_V$, and the subsheaf of E defined by them is nothing else but E'.

Now let E, F be two sheaves on X defined by systems $(E_U, \mathscr{S}_{VU})$ and (F_U, Ψ_{VU}). Suppose given for any U a map $f_U : E_U \longrightarrow F_U$, such that $U \supset V$ implies $\Psi_{VU} f_U = f_U \mathscr{S}_{VU}$. Then this system of maps defines, for each $x \in X$, a map f_x of $E_x = \varinjlim E_U$ into $F_x = \varinjlim F_U$, hence a map f of E into F. It is checked easily (using for instance proposition 2.5.2.) that f is a homomorphism of E into F. Moreover, $f(E)$ is nothing else but the subsheaf of F defined by the subsets $f_U(E_U)$ of the F_U. For any open U, the following diagram is commutative.

$$\begin{array}{ccc} E_U & \xrightarrow{fu} & F_U \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(U, E) & \xrightarrow{f_*} & H^0(U, F) \end{array}$$

In particular, if the vertical maps are bijective, we see that the maps f_U can be identified with the maps $f_* : H^0(X, E) \longrightarrow H^0(X, F)$ defined by the homomorphism f. Conversely, if we start with an arbitrary homomorphism f of E into F, then the homomorphism defined by the system of maps f_U of $E_U = H^0(U, E)$ into $F_U = H^0(U, F)$ is precisely f.

2.6 Some examples.

a. Constant and locally constant sheaves

Let F be a discrete space, then the trivial fibre space $X \times F$ is clearly a sheaf on X ; a sheaf isomorphic to such a sheaf is called constant. The sections of this sheaf on a set $A \subset$X are the continuous maps of A in the discrete set F, i.e, the maps of A in F which are locally constant. If for instance A is connected, these reduce to the constant maps of A into F. Inverse images and products of simple sheaves are simple.

A sheaf E on X is called locally simple, if each $x \in X$ has a neighborhood U such that $E|U$ be simple. Thus a locally simple sheaf on X is nothing else but a covering space of X in the classical sense (but not restricted of course to be connected). Inverse images and products of locally simple sheaves in finite number are locally simple.

b. Sheaf of germs of maps. Let X be a space, E a set. Consider for any open $U \subset X$ the set $\mathscr{F}(U, E)$ of all maps of U into E ; if $U \supset V$, we have a natural map of $\mathscr{F}(U, E)$ into $\mathscr{F}(V, E)$, the restriction map. The transitivity condition of section 2.3 is clearly satisfied, and also the condition of proposition 2.3.1., corollary. Therefore the sets $\mathscr{F}(U, E)$ can be identified with the sets of sections $H^0(U, F)$ of a well determined sheaf $\mathscr{F}$, the elements of which are called germs of maps of X into E.

If $A \subset X$, then the elements of $H^0(A, \mathscr{F})$ are called germs of maps of a neighborhood of A into E. If now E is a topological space, we can consider for any U the subset $C(U, E)$ of $\mathscr{F}(U, E)$ of the continuous maps of U into E. As continuity is a condition of local character, it follows by section 2.5 that the sets $C(U, E)$ are the sets of sections of a well determined subsheaf of $\mathscr{F}$, which is called the sheaf of germs of continuous maps of X into E. (If we take on E the coarsest topology, we find again the first sheaf.)

Suppose now that E is a fibre space over X, then consider for any U the subset $H^0(U, E)$ of $C(U, E)$ of continuous sections of E. The property of being a section is again of local character, so we see that the sets $H^0(U, E)$ are sets of sections of a well determined subsheaf of the sheaf of germs of continuous maps of X into E : the sheaf of germs of sections of the fibre space E. If this sheaf is denoted by $\widetilde{E}$, then $H^0(A, \widetilde{E})$ is nothing else but the set of germs of sections of E in the neighborhood of A, as defined in definition 2.2.1.

Of course, specializing the spaces X and E, we can define a great number of other subsheaves of the sheaf of germs of maps of X into E (germs of differentiable maps, germs of analytic maps, germs of maps which are L^P etc.).

<u>c. Sheaf of germs of homomorphisms</u> of a fibre space into another.

Let E and F be two fibre spaces over X, and for any open $U \subset X$ let H_U be the set of homomorphisms of $E|U$ into $F|U$. If V is an open set contained in U, there is an evident natural map of restriction $H_U \longrightarrow H_V$. The condition of transitivity as well as the condition of proposition 2.3.1. corollary, are satisfied, so that the sets H_U appear as the sets $H^0(U, H)$ of sections of a well determined sheaf on X, the elements of which are called germs of homomorphisms of E into F. A section of this sheaf over X is a homomorphism of E into F.

<u>d. Sheaf of germs of subsets.</u>

Let X be a space, for any open set $U \subset X$ let $P(U)$ be the set of subsets of U. If $U \supset V$, consider the map $A \longrightarrow A \cap V$ of $P(U)$ into $P(V)$. Clearly the conditions of transitivity, and of proposition 2.3.1. corollary, are satisfied, so that the sets $P(U)$ appear as the sets $H^0(U, P(X))$ of sections of a well determined sheaf on X, the elements of which are called germs of sets in X. Any condition of a local character on subsets of X defines a subsheaf of $P(X)$, for instance the sheaf of germs of closed sets (corresponding to the relatively closed sets in U), or if X is an analytic manifold, the sheaf of germs of analytic sets, etc.

Other important examples of sheaves will be considered in the next chapter.

Remous au Collège de France
Alexander Grothendieck, 1971

UN MATHEMATICIEN POURRA-T-IL CONSACRER UNE PARTIE DE SON COURS AUX QUESTIONS DE LA SURVIE ?

Bien entendu, il le peut, mais dans l'immédiat il le fera sous sa propre responsabilité, sans sanction officielle, et sans que le fait soit signalé sur les affiches du Collège de France. En l'occurrence, il s'agit de mon propre cours, qui aura lieu au Collège de France sous le titre "Théorie de Dieudonné des Groupes de Barsotti-Tate" (sic), les mercredi de dix heures à midi et demi, salle B ; ouverture du cours le mercredi 3 Novembre. Les premières séances seront consacrées à la discussion, avec la participation de tous les auditeurs intéressés, de thèmes non techniques liés par le titre général suivant : SCIENCE ET TECHNOLOGIE DANS LA CRISE EVOLUTIONNISTE ACTUELLE : ALLONS-NOUS CONTINUER LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE ?

Le nombre des séances consacrées à ce sujet, avant de passer à la partie technique du cours (concernant la théorie de Dieudonné), dépendra entièrement des réactions de l'auditoire. Précisons ici que le Collège de France est ouvert à tous les auditeurs, sans distinction de nationalité, sexe, religion, âge, diplômes, coupe de cheveux ou toutes autres particularités. Il n'y a aucune formalité d'inscription, ni aucune formalité pour assister à aucune des séances : l'appariteur vous indiquera gracieusement la salle. Toute personne intéressée par le thème est bienvenue pour participer aux discussions, qu'il soit ou non mathématicien. Adresse du Collège de France : Place Marcellin Berthelot - PARIS 5ème.

Pour tous renseignements, on peut me téléphoner au 920 13 34.

Traditionnellement, chaque professeur au Collège de France choisit librement, chaque année, le sujet de son cours l'an prochain. Son choix doit en principe être approuvé par l'Assemblée des Professeurs se réunissant vers la fin de l'année académique. C'est là une affaire de routine, et les cours sont généralement approuvés en bloc par un vote à l'unanimité. Je n'ai pas eu connaissance d'un précédent où le choix d'un professeur ait été mis en question, voire repoussé par l'Assemblée de ses collègues. Cette routine s'est trouvée perturbée à la dernière réunion de l'Assemblée, le 27 Juin dernier, à l'occasion de mon propre projet de cours. Précisons que je ne suis pas professeur titulaire au Collège de France, mais que j'ai été nommé pour deux ans à la chaire de professeur associé nouvellement créée (la première au Collège de France), destinée à des professeurs en visite au Collège de France.

D'après les règlements internes au Collège, à titre de visiteur, j'assiste avec voix délibérative aux réunions de l'Assemblée, mais sans avoir droit de vote.

A l'occasion de cette Assemblée, j'avais envoyé à M. Etienne Wolff, Administrateur au Collège de France, mon rapport d'activité pour l'année écoulée, comprenant, à côté d'activités de type académique traditionnel, une très brève description de "mon effort soutenu de compréhension et d'engagement face aux grands problèmes de notre génération, que je suis arrivé à reconnaître sous la triple forme d'une crise de civilisation, d'une crise écologique, et d'une nouvelle révolution évolutionniste", pour reprendre les termes de ce rapport. Il contenait également la liste de la vingtaine d'universités nord-américaines touchées au cours de ma tournée des campus ce printemps, et les principaux titres de discussions publiques sur des thèmes liés à la Grande Crise (cf. "La Découverte de l'Amérique [1]") . Enfin, dans une lettre séparée du 22 Mai 1971, j'exposais mon projet de cours pour l'année prochaine dans les termes suivants :

"Concernant la partie I de ce programme, quelques mots d'explications me semblent de mise. Malgré un intense effort de compréhension que j'ai fait durant l'année écoulée pour arriver à une vision d'ensemble des problèmes que j'ai l'intention d'y aborder, je suis bien conscient du fait que je ne suis qu'au début d'un très long chemin, et que je ne puis prétendre en la matière à aucune compétence particulière. Mais je suis également conscient de l'importance et de l'urgence de ces problèmes, et du fait qu'ils ne sauraient relever d'aucune *spécialité* quelle qu'elle soit, scientifique ou humaniste. Aussi, s'il est vrai qu'il est important que

Texte consultable ici http://science.societe.free.fr/documents/pdf/Survivre/Pessis_M2_Survivre.pdf chacun de nous y réfléchisse suivant son expérience propre, et que sans doute de nombreux collègues déjà sont allés dans cette voie bien plus loin que moi, nul, il me semble, ne peut prétendre sur ces questions vitales à une autorité qui lui permette de les exposer ex cathedra dans un esprit dogmatique. Vouloir en prendre argument pour bannir entièrement de telles réflexions systématiques de nos amphithéâtres, me semblerait une erreur funeste. Il est vrai qu'à cette erreur nous prédispose fortement la tendance croissante au morcellement de la connaissance en disciplines distinctes, qui est en train d'aboutir à une véritable *négation de la connaissance*, si on conçoit celle-ci comme un moyen pour appréhender la réalité (toujours complexe) et interagir avec elle dans un "sens favorable". Plutôt que de démissionner ainsi devant la réalité, qui refera irruption dans nos vies que nous le voulions ou non, il me semble préférable que chacun de nous l'aborde de front avec les moyens du bord, en faisant confiance au temps qui nous reste et aux compagnons de route pour améliorer nos moyens.

Bien entendu, je suis à votre entière disposition, et à la disposition de mes autres collègues au Collège de France, pour préciser ou développer les points esquissés dans cette lettre.

Veuillez agréer. . . "

A la réunion de l'Assemblée du 27 Juin, cette lettre a été lue par l'Administrateur. Comme je m'y attendais, elle a donné lieu à un débat fort intéressant, extrêmement vif et révélateur. Il s'ouvre par une prise de position très nette de M. Wolff lui-même contre la première partie du programme prévu, qui "ne rentre pas dans le cadre de la chaire de professeur associé dont M. Grothendieck est chargé". S'ensuit un débat animé, auquel prennent part MM. J. P. Serre, Jean-Claude Pecker, Anatole Abragam, Jacques Monod, Raymond Aron, Francis Perrin, François Jacob, Jean Leray, en plus de M. Etienne Wolff et de moi-même. Réactions extrêmement diverses. Celle qui domine, cependant, s'exprime dans la conviction qu'en sortant des limites de sa spécialité, voire des limites de la science au sens technique du terme, pour parvenir à une appréciation critique de la science et de son rôle, le savant allait fatalement sombrer dans "l'ignorance" et le "bavardage creux [2]", d'après les paroles utilisées par F. Perrin. Une telle opinion, exprimée par des hommes parmi les plus éminents de leur discipline particulière, et la profonde méfiance "a priori" qu'elle suppose au sujet des facultés mentales de l'homme, y compris celles de leurs pairs, censés, (d'après un large consensus) être parvenus au sommet du développement intellectuel que notre société peut offrir - n'est-ce pas là un écrasant constat d'échec de toute une conception de l'éducation, de la connaissance, voire de notre culture tout court ?

Voici quelques réactions particulières de certains collègues [3]. J. P. Serre, mathématicien, qui avait fait la proposition de ma nomination au poste de professeur associé et à mon renouvellement pour une deuxième année, à la fois visiblement excédé et très gêné vis à vis de ses collègues, se considérait comme partiellement responsable des complications causées par ma présence au Collège de France ; comme excuse, il indique qu'aux moments où il avait fait ces deux propositions, rien ne permettait de prévoir mon évolution future (que manifestement il déplore). F. Perrin [4] est intervenu à plusieurs reprises, avec un air alarmé : comme la mathématique n'est pas une science à proprement parler, étant par essence séparée de l'observation de la nature [5], le fait qu'un mathématicien prenne sur lui de traiter critiquement de la science lui semble "particulièrement fâcheux". A. Abragam, après avoir souligné en termes quelque peu dithyrambiques [6] le haut prestige scientifique dont, selon lui, je jouissais en tant que mathématicien, opina qu'il y aurait malhonnêteté d'user de mon autorité de mathématicien pour "vouloir imposer à votre auditoire vos opinions personnelles sur la guerre au Vietnam ou sur l'énergie nucléaire". Il me semble remarquable à quel point ces objections passent entièrement à côté des éclaircissements donnés dans ma lettre, où j'expliquais précisément que j'entendais initier une discussion avec mes auditeurs sur des problèmes cruciaux, et que je récusais a priori dans ces problèmes tout appel à une quelconque autorité de l'expert.

D'après A. Abragam, les auditeurs seraient attirés par un programme mathématique défini, pour s'entendre exposer des choses sans rapport avec ce programme. En fait, les titres distincts des deux parties de mon cours prévu étaient absolument sans équivoque sur les thèmes qui seraient traités dans l'une et dans l'autre, contrairement à ce qui aura lieu après le vote de mes collègues, repoussant la partie I prévue à mon cours.

Je me trouvais placé dans l'Assemblée à côté de J. Leray et A. Lichnerowicz, mathématiciens tous deux. J. Leray était visiblement ému, insistant que "ces sujets sont trop importants pour qu'on ait le droit de se tromper en en parlant - et livrés à vos seules lumières, vous êtes sûr de vous tromper !". C'est en ces termes qu'il m'exhortait à renoncer à traiter ces questions dans mon cours de mathématiques, pour m'associer plutôt à un séminaire interdisciplinaire qui serait placé sous le patronage de plusieurs professeurs au Collège de France.

Lichnerowicz abondait dans le même sens, visiblement perplexe ; j'avais l'impression qu'il sentait bien que "du nouveau" était en train de se préparer, et ferait irruption fatalement tôt ou tard, y compris au Collège de France, et quel inconvénient il y aurait que ce soit un vote formel de l'Assemblée qui exclue des amphithéâtres du Collège de France, la libre discussion de certains des problèmes les plus brûlants de notre temps, directement liés à la science qu'on y enseigne. Il a préféré ne pas intervenir dans la discussion, et n'a pas pris oralement de position très nette pour ou contre mon projet. Quant à l'Administrateur E. Wolff, il se disait "peiné" par toute cette discussion - et il le paraissait en effet - qui le mettait dans la position désagréable d'avoir l'air de vouloir refuser ou restreindre la liberté d'expression d'un hôte du Collège de France. En passant, il ironisa légèrement, avec un même air triste, sur le terme "Crise Evolutionniste" qui figurait dans le titre, disant qu'il n'avait pas eu connaissance qu'il y avait une crise dans l'Evolution, et qu'il devait y avoir sans doute malentendu de sa part. Sur mon assurance qu'il n'en était rien, il ne semblait pas intéressé que je lui précise en quoi j'étais convaincu que nous assistions en effet à une telle crise ; il est vrai que E. Wolff est biologiste et moi mathématicien, et d'après les règles du jeu dans lesquelles nous avons été élevés l'un et l'autre, il n'était guère concevable que ce soit le mathématicien qui explique ses réflexions sur l'évolution à un biologiste.

Dès le début de la discussion, après avoir reçu mon assurance que j'étais tout disposé à consacrer à la deuxième partie, "technique", de mon cours, le minimum de dix-huit heures prévu pour les cours du Collège de France, J. C. Pecker est intervenu très cordialement en faveur de mon projet de cours, considérant comme extrêmement positif que des "questions très importantes" soient débattues dans le Collège de France. C'est lui qui avança l'idée d'un séminaire interdisciplinaire, qui sembla apparaître à la plupart des participants à la discussion comme la meilleure solution à la "difficulté" que j'avais soulevée. Aussi je fus obligé d'expliquer que mon but n'était pas de créer une nouvelle spécialité au Collège de France, fût-elle interdisciplinaire, mais bien d'intégrer à l'avenir (que ce soit au Collège ou ailleurs) mon enseignement mathématique avec des perspectives critiques sur le rôle social de la science que j'enseigne, et de la science en général et que j'espérais ce faisant inciter d'autres universitaires à faire de même. Cela n'empêchait pas que je me joindrais bien volontiers à un séminaire interdisciplinaire comme suggéré par M. Pecker. Indépendamment de ce séminaire et du résultat du vote qui serait pris par l'Assemblée sur la première partie du cours, c'est-à-dire si celle-ci figurerait ou non sur les affiches officielles, j'étais décidé à inclure quelques séances où seraient traitées les questions indiquées dans le titre incriminé, avant de passer à la partie plus technique de mon cours.

En dehors des interventions de J. C. Pecker, il y eût quelques autres interventions en faveur de mon projet, notamment J. Monod et (sauf erreur de ma part, vu que je ne connais pas encore personnellement la plupart de mes collègues) F. Jacob et R. Aron.

Il y a eu finalement vote séparé, d'abord sur la deuxième, puis sur la première partie de mon projet de cours. Résultats :
- Théorie de Dieudonné des Groupes de Barsotti-Tate : 25 oui, 12 non, 6 abstentions, 2 nuls.
- Science et Technologie dans la Crise Evolutionniste actuelle : allons-nous continuer la recherche scientifique : 32 non, 9 oui, 1 abstention, 1 nul.

Il est remarquable que dans un haut-lieu de la science comme le Collège de France il se soit trouvé 9 voix pour appuyer un sujet de cours brûlant certes, mais qui rompt avec des traditions académiques fortement enracinées ; cela me semble un signe frappant de l'évolution qui est en train de se faire dans les esprits, y compris dans les sphères qu'on pourrait croire le plus inconditionnellement acquises au "scientisme". Je pense qu'avant la discussion et le vote, la plupart des trente-deux collègues qui ont voté "non" ont dû être convaincus que tout savant dans son sens commun récuserait sans appel une telle rupture avec la tradition, et que ma proposition serait rejetée à l'unanimité, par une Assemblée unanimement choquée. Nul doute que la discussion et la découverte que neuf de leurs collègues ne partagent pas leurs vues, pourra être chez un bon nombre d'entre eux une parmi les multiples influences qui finiront par les amener à revoir leurs préconceptions scientistes, comme j'y ai été amené moi-même progressivement au cours des deux années passées. A cet égard, le fait que dans le premier vote, consacré à la deuxième partie (technique) de mon cours, il se soit trouvé 12 “non” pour le récuser et 6 abstentions (alors que sauf Serre et moi-même, aucun des collègues présents ne pouvait guère avoir la moindre notion de ce que le titre proposé signifiait) me semble le signe d’un véritable désarroi chez nombre de ces collègues. De telles discussions qui font éclater au grand jour certaines contradictions ou incohérences des préconceptions sous lesquelles nous travaillons habituellement, me semblent un puissant moyen pour faire évoluer les idées et aider à leur renouveau. Il en est particulièrement ainsi lorsque les participants se trouvent dans une situation (institutionnelle, disons) où ils sont obligés de prendre position, en vue d’une décision concrète. Il me semble que peu sont ceux parmi nous qui n’ont pas l’occasion, sous une forme ou une autre, de créer de telles situations, quelle que soit la profession à laquelle ils appartiennent. Ils s’apercevront sans doute souvent avec surprise, comme je m’en suis aperçu moi-même, qu’ils sont bien moins isolés qu’ils ne le pensaient. Faites-donc l’essai vous-même !

[1] NDLR. Titre d’un article de A. Grothendieck qui était prévu pour le présent numéro de Survivre, et n’a pu finalement y trouver place.

[2] Comparer cette conviction avec le point 4 du “Credo du Scientisme” (Rôle de l’Expert), p. 6.

[3] Il est possible que certains collègues considèrent que des débats comme ceux de l’Assemblée du Collège de France, n’étant pas ouverts au public, devraient être considérés comme confidentiels. Nous pensons au contraire que “tous les actes de la vie professionnelle du scientifique doivent être pleinement explicites et publics”.

[4] Signalons que F. Perrin, professeur de physique atomique et moléculaire au Collège de France, a été Haut-Commissaire à l’Energie Atomique. C’est à lui qu’est due la déclaration historique que la radioactivité dégagée par les explosions nucléaires en Polynésie était moindre que celle qui sera due aux cadrans lumineux des montres bracelets que les indigènes seraient en mesure de s’acheter, par l’augmentation du niveau de vie qui résulterait de ces expériences.

[5] Cet état de choses est relativement récent, dû à une évolution regrettable de la mathématique depuis le début du siècle. Il commence à y avoir, chez certains esprits moins dogmatiques que la plupart de leurs autres confrères mathématiciens, une saine réaction contre cet isolationnisme des mathématiques. Si l’activité scientifique (dans le sens traditionnel) est appelée à survivre à notre présente crise de civilisation, il semble très probable que la mathématique serait appelée à un renouvellement beaucoup plus radical que celui auquel on a assisté depuis le début du siècle avec l’introduction du point de vue formaliste et axiomatique. Cela semble en tous cas une nécessité, si la mathématique doit continuer à fournir des modèles utilisables de la réalité, adaptés à saisir au moins certains aspects complexes du monde biologique. L’impasse prolongée où se trouve la physique théorique depuis le développement de la mécanique quantique pourrait bien être liée à la même nécessité de renouvellement.

[6] Dithyrambe : louange exagérée (figure de style).

Allons-nous continuer la recherche scientifique ? *Alexander Grothendieck, 1972*

Retranscription de la conférence-débat donnée à l'amphithéâtre du CERN, le 27 janvier 1972 (Transcrit de l'enregistrement magnétique par Jacqueline Picard).

Organisateurs : Mesdames et messieurs, bonsoir.

Dans nos cycles de conférences, depuis dix ans que nous les organisons, nous avons périodiquement demandé à des scientifiques de venir nous faire des réflexions sur la science, sur la responsabilité du savant et je crois que c'est particulièrement nécessaire de le faire parce que nous avons un peu tendance au CERN à nous prendre pour des gens extraordinaires qui font des choses théoriques pas dangereuses du tout, au sein d'une collaboration européenne exceptionnelle. Alors, toujours pris par ces belles idées, on a un peu trop tendance peut-être à s'en satisfaire et à ne pas se poser de questions plus profondes. C'est justement pour aller un peu plus loin qu'il est utile d'avoir des conférenciers comme Monsieur Grothendieck que nous avons ce soir et auquel je cède immédiatement la parole.

Alexander Grothendieck : Je suis très content d'avoir l'occasion de parler au CERN. Pour beaucoup de personnes, dont j'étais, le CERN est une des quelques citadelles, si l'on peut dire, d'une certaine science, en fait d'une science de pointe : la recherche nucléaire. On m'a détrompé. Il paraît qu'au CERN - le Centre Européen de Recherches Nucléaires -, on ne fait pas de recherches nucléaires. Quoiqu'il en soit, je crois que dans l'esprit de beaucoup de gens, le CERN en fait.

La recherche nucléaire est indissolublement associée, pour beaucoup de gens également, à la recherche militaire, aux bombes A et H et, aussi, à une chose dont les inconvénients commencent seulement à apparaître : la prolifération des centrales nucléaires. En fait, l'inquiétude qu'a provoqué depuis la fin de la dernière guerre mondiale la recherche nucléaire s'est un peu effacée à mesure que l'explosion de la bombe A sur Hiroshima et Nagasaki s'éloignait dans le passé. Bien entendu, il y a eu l'accumulation d'armes destructives du type A et H qui maintenait pas mal de personnes dans l'inquiétude. Un phénomène plus récent, c'est la prolifération des centrales nucléaires qui prétend répondre aux besoins croissants en énergie de la société industrielle. Or, on s'est aperçu que cette prolifération avait un certain nombre d'inconvénients, pour employer un euphémisme, "extrêmement sérieux" et que cela posait des problèmes très graves. Qu'une recherche de pointe soit associée à une véritable menace à la survie de l'humanité, une menace même à la vie tout court sur la planète, ce n'est pas une situation exceptionnelle, c'est une situation qui est de règle. Depuis un ou deux ans que je commence à me poser des questions à ce sujet, je me suis aperçu que, finalement, dans chacune des grandes questions qui actuellement menacent la survie de l'espèce humaine, ces questions ne se poseraient pas sous la forme actuelle, la menace à la survie ne se poserait pas, si l'état de notre science était celle de l'an 1900, par exemple. Je ne veux pas dire par là que la seule cause de tous ces maux, de tous ces dangers, ce soit la science. Il y a bien entendu, une conjonction de plusieurs choses ; mais la science, l'état actuel de la recherche scientifique, joue certainement un rôle important.

Tout d'abord, je pourrais peut-être dire quelques mots personnels. Je suis un mathématicien. J'ai consacré la plus grande partie de mon existence à faire de la recherche mathématique. En ce qui concerne la recherche mathématique, celle que j'ai faite et celle qu'ont fait les collègues avec lesquels j'ai été en contact, elle me semblait très éloignée de toute espèce d'application pratique. Pour cette raison, je me suis senti pendant longtemps particulièrement peu enclin à me poser des questions sur les tenants et les aboutissants, en particulier sur l'impact social, de cette recherche scientifique. Ce n'est qu'à une date assez récente, depuis deux ans que j'ai commencé comme cela, progressivement, à me poser des questions à ce sujet. Je suis arrivé ainsi à une position où, depuis un an et demi en fait, j'ai abandonné toute espèce de recherche scientifique, à l'avenir, je n'en ferai que le strict nécessaire pour pouvoir subvenir à mes besoins puisque, jusqu'à preuve du contraire, je n'ai pas d'autre métier que mathématicien. Je sais bien que je ne suis pas le seul à m'être posé ce genre de question. Depuis une année ou deux, et même depuis les derniers mois, de plus en plus de personnes se posent des questions clés à ce sujet. Je suis tout à fait persuadé qu'au CERN également beaucoup de scientifiques et de techniciens commencent à se les poser. En fait, j'en ai rencontré. En outre, moi-même et d'autres connaissons des personnes, au CERN par exemple, qui se font des idées "extrêmement sérieuses" au sujet des applications dites pacifiques de l'énergie nucléaire, mais qui n'osent pas les exprimer publiquement de crainte de perdre leur place. Bien entendu, il ne s'agit pas d'une atmosphère qui serait spéciale au CERN. Je crois que c'est une atmosphère qui prévaut dans la plupart des organismes universitaires ou de recherche, en France, en Europe, et même, dans une certaine mesure, aux Etats-Unis où les personnes qui prennent le risque d'exprimer ouvertement leurs réserves, même sur un terrain strictement scientifique, sur certains développements scientifiques, sont quand même une infime minorité.

Ainsi, depuis un an ou deux, je me pose des questions. Je ne les pose pas seulement à moi-même. Je les pose aussi à des collègues et, tout particulièrement depuis plusieurs mois, six mois peut-être, je profite de toutes les occasions pour rencontrer des scientifiques, que ce soit dans les discussions publiques comme celle-ci ou en privé, pour soulever ces questions. En particulier : “Pourquoi faisons-nous de la recherche scientifique ?”. Une question qui est pratiquement la même peut-être, à longue échéance du moins, que la question : “Allons-nous continuer la recherche scientifique ?”. La chose extraordinaire est de voir à quel point mes collègues sont incapables de répondre à cette question. En fait, pour la plupart d'entre eux, cette question est simplement si étrange, si extraordinaire, qu'ils se refusent même de l'envisager. En tout cas, ils hésitent énormément à donner une réponse quelle qu'elle soit. Lorsqu'on parvient à arracher une réponse dans les discussions publiques ou privées, ce qu'on entend généralement c'est, par ordre de fréquence des réponses : “La recherche scientifique ? J'en fais parce que ça me fait bien plaisir, parce que j'y trouve certaines satisfactions intellectuelles.” Parfois, les gens disent : “Je fais de la recherche scientifique parce qu'il faut bien vivre, parce que je suis payé pour cela.”

En ce qui concerne la première motivation, je peux dire que c'était ma motivation principale pendant ma vie de chercheur. Effectivement, la recherche scientifique me faisait bien plaisir et je ne me posais guère de questions au delà. En fait, si cela me faisait plaisir, c'était en grande partie parce que le consensus social me disait que c'était une activité noble, positive, une activité qui valait la peine d'être entreprise ; sans du tout d'ailleurs, détailler en quoi elle était positive, noble, etc. évidement, l'expérience directe me disait que, avec mes collègues, nous construisions quelque chose, un certain édifice. Il y avait un sentiment de progression qui donnait une certaine sensation d'*achievement*... de plénitude disons et, en même temps, une certaine fascination dans les problèmes qui se posaient.

Mais tout ceci, finalement, ne répond pas à la question : “à quoi sert socialement la recherche scientifique ?” Parce que, si elle n'avait comme but que de procurer du plaisir, disons, à une poignée de mathématiciens ou d'autres scientifiques, sans doute la société hésiterait à y investir des fonds considérables (en mathématiques ils ne sont pas très considérables ; mais dans les autres sciences, ils peuvent l'être). La société hésiterait aussi sans doute, à payer tribut à ce type d'activité ; tandis qu'elle est assez muette sur des activités qui demandent peut-être autant d'efforts, mais d'un autre type, comme de jouer aux billes ou des choses de ce goût-là. On peut développer à l'extrême certaines facilités, certaines facultés techniques, qu'elles soient intellectuelles, manuelles ou autres, mais pourquoi y a-t-il cette valorisation de la recherche scientifique ? C'est une question qui mérite d'être posée.

En parlant avec beaucoup de mes collègues, je me suis aperçu au cours de l'année dernière qu'en fait cette satisfaction que les scientifiques sont censés retirer de l'exercice de leur profession chérie, c'est un plaisir... qui n'est pas un plaisir pour tout le monde ! Je me suis aperçu avec stupéfaction que pour la plupart des scientifiques, la recherche scientifique était ressentie comme une contrainte, comme une servitude. Faire de la recherche scientifique, c'est une question de vie ou de mort en tant que membre considéré de la communauté scientifique. La recherche scientifique est un impératif pour obtenir un emploi, lorsqu'on s'est engagé dans cette voie sans savoir d'ailleurs très bien à quoi elle correspondait. Une fois qu'on a son boulot, c'est un impératif pour arriver à monter en grade. Une fois qu'on est monté en grade, à supposer même qu'on soit arrivé au grade supérieur, c'est un impératif pour être considéré comme étant dans la course. On s'attend à ce que vous produisiez. La production scientifique, comme n'importe quel autre type de production dans la civilisation ambiante, est considérée comme un impératif en soi. Dans tout ceci, la chose remarquable est que, finalement, le contenu de la recherche passe entièrement au second plan. Il s'agit de produire un certain nombre de “papiers”. Dans les cas extrêmes, on va jusqu'à mesurer la productivité des scientifiques au nombre de pages publiées. Dans ces conditions, pour un grand nombre de scientifiques, certainement pour l'écrasante majorité, à l'exception véritablement de quelques-uns qui ont la chance d'avoir, disons, un don exceptionnel ou d'être dans une position sociale et une disposition d'esprit qui leur permette de s'affranchir de ces sentiments de contrainte, pour la plupart la recherche scientifique est une véritable contrainte qui tue le plaisir que l'on peut avoir à l'effectuer. C'est une chose que j'ai découvert avec stupéfaction parce qu'on en parle pas. Entre mes élèves et moi, je pensais qu'il y avait des relations spontanées et égalitaires. En fait, c'est une illusion dans laquelle j'étais enfermé ; sans même que je m'en aperçoive, il y avait une véritable relation hiérarchique. Les mathématiciens qui étaient mes élèves ou qui se considéraient comme moins bien situés que moi et qui ressentaient, disons, une aliénation dans leur travail, n'auraient absolument pas eu l'idée de m'en parler avant que, de mon propre mouvement, je quitte le ghetto scientifique dans lequel j'étais enfermé et que j'essaie de parler avec des gens qui n'étaient pas de mon milieu ; ce milieu de savants ésotériques qui faisaient de la haute mathématique.

Pour illustrer ce point, j'aimerais donner ici un exemple très concret. Je suis allé, il y a deux semaines, faire un tour en Bretagne. J'ai eu l'occasion, entre autres, de passer à Nantes où j'ai vu des amis, où j'ai parlé dans une Maison de Jeunes et de la Culture (MJC) sur le genre de problèmes que nous abordons aujourd'hui. J'y étais le lundi. Comme les collègues de l'Université de Nantes étaient avertis de ma venue, ils avaient demandé in extremis que je vienne, le lendemain après-midi, pour faire une causerie sur des sujets mathématiques avec eux. Or il s'est trouvé que, le jour même de ma venue, un des mathématiciens de Nantes, M. Molinaro, s'est suicidé. Donc, à cause de cet incident malheureux, la causerie mathématique qui était prévue a été annulée. Au lieu de ceci, j'ai alors contacté un certain nombre de collègues pour demander s'il était possible que l'on se réunisse pour parler un peu de la vie mathématique à l'intérieur du département de mathématiques à l'Université et pour parler également un peu de ce suicide. Il y a eu une séance extrêmement révélatrice du malaise général, cet après-midi-là à Nantes, où manifestement tout le monde présent (avec une exception je dirais) sentait bien clairement que ce suicide était lié de très très près au genre de choses que, précisément, on discutait la veille au soir à la MJC.

En fait, je donnerai peut-être un ou deux détails. Il s'est trouvé que Molinaro avait deux thésards auxquels il faisait faire des thèses de troisième cycle (je crois que ce n'était pas des thèses d'état). Or, ces thèses furent considérées comme n'étant pas de valeur scientifique suffisante. Elles furent jugées très sévèrement par Dieudonné qui est un bon collègue à moi et avec lequel j'ai écrit un gros traité de géométrie algébrique. Je le connais donc très bien, c'est un homme qui a un jugement scientifique très sûr, qui est très exigeant sur la qualité d'un travail scientifique. Ainsi, alors que ces thèses étaient discutées par la Commission pour l'inscription sur la liste d'aptitude aux fonctions de l'Enseignement Supérieur, il les a saquées et l'inscription a été refusée. Ceci, bien entendu, a été ressenti comme une sorte d'affront personnel par Molinaro qui avait déjà eu des difficultés auparavant et il s'est suicidé sur ces circonstances. En fait, j'ai eu un ami mathématicien, qui s'appelait Terenhôfel qui s'est également suicidé. Je connais un certain nombre de mathématiciens (je parle surtout ici de mathématiciens puisque c'est le milieu que j'ai le mieux connu) qui sont devenus fous.

Je ne pense pas que cela soit une chose propre aux mathématiques. Je pense que le genre, disons, d'atmosphère qui prévaut dans le monde scientifique, qu'il soit mathématique ou non, une sorte d'atmosphè-re à l'air extrêmement raréfié, et la pression qui s'exerce sur les chercheurs sont pour beaucoup dans l'évolution de ces cas malheureux.

Ceci concernant le plaisir que nous prenons à faire de la recherche scientifique. Je crois qu'il peut y avoir plaisir, mais je suis arrivé à la conclusion que le plaisir des uns, le plaisir des gens haut placés, le plaisir des brillants, se fait aux dépens d'une répression véritable vis-à-vis du scientifique moyen.

Un autre aspect de ce problème qui dépasse les limites de la communauté scientifique, de l'ensemble des scientifiques, c'est le fait que ces hautes voltiges de la pensée humaine se font au dépens de l'ensemble de la population qui est dépossédée de tout savoir. En ce sens que, dans l'idéologie dominante de notre société, le seul savoir véritable est le savoir scientifique, la connaissance scientifique, qui est l'apanage sur la planète de quelques millions de personnes, peut-être une personne sur mille. Tous les autres sont censés "ne pas connaître" et, en fait, quand on parle avec eux, ils ont bien l'impression de "ne pas connaître". Ceux qui connaissent sont ceux qui sont là-haut, dans les hautes sciences : les mathématiciens, les scientifiques, les très calés, etc.

Donc, je pense qu'il y a pas mal de commentaires critiques à faire sur ce plaisir que nous retourne la science et sur ses à-côtés. Ce plaisir est une sorte de justification idéologique d'un certain cours que la société humaine est en train de prendre et, à ce titre, je pense même que la science la plus désintéressée qui se fait dans le contexte actuel, et même la plus éloignée de l'application pratique, a un impact extrêmement négatif.

C'est pour cette raison que, personnellement, je m'abstiens actuellement, dans toute la mesure du possible, de participer à ce genre d'activités. Je voudrais préciser la raison pour laquelle au début j'ai interrompu mon activité de recherche : c'était parce que je me rendais compte qu'il y avait des problèmes si urgents à résoudre concernant la crise de la survie que ça me semblait de la folie de gaspiller des forces à faire de la recherche scientifique pure. Au moment où j'ai pris cette décision, je pensais consacrer plusieurs années à faire de la recherche, à acquérir certaines connaissances de base en biologie, avec l'idée d'appliquer et de développer des techniques mathématiques, des méthodes mathématiques, pour traiter des problèmes de biologie. C'est une chose absolument fascinante pour moi et, néanmoins, à partir du moment où des amis et moi avons démarré un groupe qui s'appelle "Survivre", pour précisément nous occuper des questions de la survie, à partir de ce moment, du jour au lendemain, l'intérêt pour une recherche scientifique désintéressée s'est complètement évanoui pour moi et je n'ai jamais eu une minute de regrets depuis.

Il reste la deuxième motivation : la science, l'activité scientifique, nous permet d'avoir un salaire, nous permet de vivre. C'est en fait la motivation principale pour la plupart des scientifiques, d'après les conversations que j'ai pu avoir avec un grand nombre d'entre eux. Il y aurait aussi pas mal de choses à dire sur ce sujet. En particulier, pour les jeunes qui s'engagent actuellement dans la carrière scientifique, ceux qui font des études de sciences en s'imaginant qu'ils vont trouver un métier tout prêt qui leur procurera la sécurité. Je crois qu'il est généralement assez bien connu qu'il y a là une grande illusion, à force de produire des gens hautement qualifiés, on en a produit vraiment de trop depuis le grand boom dans la production de jeunes savants, depuis le Spoutnik il y a une quinzaine d'années, et il y a de plus en plus de chômage dans les carrières scientifiques. C'est un problème qui se pose de façon de plus en plus aigüe pour un nombre croissant de jeunes, surtout de jeunes scientifiques. Aux Etats-Unis, on doit fabriquer chaque année quelque chose comme 1000 ou 1500 thèses rien qu'en mathématiques et le nombre de débouchés est à peu près de l'ordre du tiers de cela.

D'autre part, il n'en reste pas moins que lorsque la science nous permet d'avoir un salaire et de subvenir à nos besoins, les liens entre notre travail et la satisfaction de nos besoins sont pratiquement tranchés, ce sont des liens extrêmement abstraits. Le lien est pratiquement formé par le salaire, mais nos besoins ne sont pas directement reliés à l'activité que nous exerçons. En fait, c'est cela la chose remarquable, quand on pose la question : "à quoi sert socialement la science ?", pratiquement personne n'est capable de répondre. Les activités scientifiques que nous faisons ne servent à remplir directement aucun de nos besoins, aucun des besoins de nos proches, de gens que nous puissions connaître. Il y a aliénation parfaite entre nous-même et notre travail.

Ce n'est pas un phénomène qui soit propre à l'activité scientifique, je pense que c'est une situation propre à presque toutes les activités professionnelles à l'intérieur de la civilisation industrielle. C'est un des très grands vices de cette civilisation industrielle. En ce qui concerne les mathématiques plus particulièrement, depuis quelques mois, j'essaie vraiment de découvrir une façon dont la recherche mathématique, celle qui s'est faite depuis quelques siècles (je ne parle pas nécessairement de la recherche mathématique la plus récente, celle dans laquelle j'étais encore impliqué moi-même à date assez récente) pourrait servir du point de vue de la satisfaction de nos besoins. J'en ai parlé avec toute sorte de mathématiciens depuis trois mois. Personne n'a été capable de me donner une réponse. Dans des auditoires comme celui-ci ou des groupes de collègues plus petits, personne ne sait. Je ne dirais pas qu'aucune de ces connaissances ne soit capable, d'une façon ou d'une autre, de s'appliquer pour nous rendre heureux, pour nous permettre un meilleur épanouissement, pour satisfaire certains désirs véritables, mais jusqu'à maintenant je ne l'ai pas trouvé. Si je l'avais trouvé, j'aurais été beaucoup plus heureux, beaucoup plus content à certains égards, du moins jusqu'à une date récente. Après tout, je suis mathématicien moi-même et cela m'aurait fait plaisir de savoir que mes connaissances mathématiques pouvaient servir à quelque chose de socialement positif. Or, depuis deux ans que j'essaie de comprendre un petit peu le cours que la société est en train de prendre, les possibilités que nous avons pour agir favorablement sur ce cours, en particulier les possibilités que nous avons pour permettre la survie de l'espèce humaine et pour permettre une évolution de la vie qui soit digne d'être vécue, que la survie en vaille la peine, mes connaissances de scientifique ne m'ont pas servi une seule fois.

Le seul point sur lequel ma formation de mathématicien m'ait servi, ce n'est pas tellement par ma formation de mathématicien en tant que telle ni mon nom de mathématicien, c'était que, puisque j'étais un mathématicien connu, j'avais la possibilité de me faire inviter par pas mal d'universités un peu partout. Ceci m'a donné la possibilité de parler avec beaucoup de collègues, d'étudiants, de gens un peu partout. Cela s'est produit pour la première fois au printemps dernier où j'ai fait un tour au Canada et aux Etats-Unis. En l'espace de trois semaines, j'ai visité une vingtaine de campus. J'ai retiré un bénéfice énorme de ces contacts ; mes idées, ma vision des choses ont énormément évolué depuis ce moment là. Mais c'est donc de façon tout-à-fait incidente que ma qualité de mathématicien m'a servi ; en tous cas, mes connaissances de mathématicien n'y étaient vraiment pour rien.

Je pourrais ajouter que j'ai pris l'habitude, depuis le printemps dernier, lorsque je reçois une invitation pour faire des exposés mathématiques quelque part, et lorsque je l'accepte, c'est en explicitant que cela ne m'intéresse que dans la mesure où un tel exposé me donne l'occasion de débattre de problèmes plus importants, tels que celui dont on est en train de parler maintenant ici. En général, cela me donne aussi l'occasion de parler avec des non-mathématiciens, avec des scientifiques des autres disciplines, et également avec des non-scientifiques. C'est pourquoi je demande à mes collègues mathématiciens qu'au moins une personne du département s'occupe de l'organisation de tels débats. Cela a été le cas, par exemple, pour toutes les conférences que j'ai faites au Canada et aux Etats- Unis. Jusqu'à maintenant, personne n'a refusé une seule fois cette proposition d'organiser des débats non-techniques, non purement mathématiques, en marge de l'invitation mathématique au sens traditionnel. D'ailleurs, depuis ce moment là, j'ai également modifié un peu ma pratique en introduisant également des commentaires, disons, préliminaires, dans les exposés mathématiques eux-mêmes pour qu'il n'y ait pas une coupure trop nette entre la partie mathématique de mon séjour et l'autre.

Donc, non seulement j'annonce le débat public plus général qui a lieu ensuite, mais également je prends mes distances vis-à-vis de la pratique même d'inviter des conférenciers étrangers pour accomplir un certain rituel à savoir, faire une conférence de haute volée sur un grand sujet ésotérique devant un public de cinquante ou cent personnes dont peut-être deux ou trois peuvent péniblement y comprendre quelque chose, tandis que les autres se sentent véritablement humiliés parce que, effectivement, ils sentent une contrainte sociale posée sur eux pour y aller. La première fois que j'ai posé la question clairement, c'était à Toulouse, il y a quelques mois, et j'ai senti effectivement une espèce de soulagement du fait que ces choses là soient une fois dites. Pour la première fois depuis que je faisais ce genre de conférence, spontanément, sans que rien n'ait été entendu à l'avance, après la conférence mathématique qui était effectivement très ésotérique et qui, en elle-même était très pénible et pesante (j'ai eu à m'excuser plusieurs fois au cours de la conférence parce que, vraiment, c'était assez intolérable) ; eh bien, immédiatement après, s'est instauré une discussion extrêmement intéressante et précisément sur le thème : "à quoi sert ce genre de mathématiques ?" et "à quoi sert ce genre de rituel qui consiste à faire des conférences devant des gens qui ne s'y intéressent rigoureusement pas ?".

Mon intention n'était pas de faire une sorte de théorie de l'anti-science. Je vois bien que j'ai à peine effleuré quelques-uns des problèmes qui sont liés à la question "Allons-nous continuer la recherche scientifique ?", même parmi ceux qui étaient indiqués sur ce tract dont j'ai vu une copie. Par exemple, sur les possibilités de développer une pratique scientifique entièrement différente de la pratique scientifique actuelle et sur une critique plus détaillée de cette pratique. J'ai parlé plutôt en termes assez concrets de mon expérience personnelle, de ce qui m'a été transmis directement par d'autres, pendant une demi- heure. C'est probablement suffisant ; peut-être sera-t-il préférable que d'autres points soient traités un peu plus en profondeur au cours d'une discussion générale.

Je voudrais simplement indiquer, avant de terminer mon petit laïus introductif, que j'ai ramené ici quelques exemplaires d'un journal que nous éditons qui s'appelle Survivre et Vivre. Il s'agit du groupe dont j'ai parlé au début et qui a changé de nom depuis quelques mois. Au lieu de Survivre, après un certain changement d'optique assez important, assez caractéristique, il est devenu Survivre et Vivre. Au début, nous avions démarré sous la hantise d'une possible fin du monde où l'impératif essentiel, pour nous, était l'impératif de la survie. Depuis lors, par un cheminement parallèle chez beaucoup d'entre nous et d'autres ailleurs hors du groupe, nous sommes parvenus à une autre conclusion. Au début, nous étions si l'on peut dire overwhelm, écrasés, par la multiplicité des problèmes extrêmement enchevêtrés, de telle façon qu'il semblait impossible de toucher à aucun d'eux sans, en même temps, amener tous les autres. Finalement, on se serait laissé aller à une sorte de désespoir, de pessimisme noir, si on n'avait pas fait le changement d'optique suivant : à l'intérieur du système de référence habituel où nous vivons, à l'intérieur du type de civilisation donné, appelons-la civilisation occidentale ou civilisation industrielle, il n'y a pas de solution possible ; l'imbrication des problèmes économiques, politiques, idéologiques et scientifiques, si vous voulez, est telle qu'il n'y a pas d'issue possible.

Au début, nous pensions qu'avec des connaissances scientifiques, en les mettant à la disposition de suffisamment de monde, on arriverait à mieux appréhender une solution des problèmes qui se posent. Nous sommes revenus de cette illusion. Nous pensons maintenant que la solution ne proviendra pas d'un supplément de connaissances scientifiques, d'un supplément de techniques, mais qu'elle proviendra d'un changement de civilisation. C'est en cela que consiste le changement d'optique extrêmement important. Pour nous, la civilisation dominante, la civilisation industrielle, est condamnée à disparaître en un temps relativement court, dans peut-être dix, vingt ou trente ans... une ou deux générations, dans cet ordre de grandeur ; parce que les problèmes que posent actuellement cette civilisation sont des problèmes effectivement insolubles.

Nous voyons maintenant notre rôle dans la direction suivante : être nous-mêmes partie intégrante d'un processus de transformations, de ferments de transformations d'un type de civilisation à un autre, que nous pouvons commencer à développer dès maintenant. Dans ce sens, le problème de la survie pour nous a été, si l'on peut dire, dépassé, il est devenu celui du problème de la vie, de la transformation de notre vie dans l'immédiat ; de telle façon qu'il s'agisse de modes de vie et de relations humaines qui soient dignes d'être vécues et qui, d'autre part, soient viables à longue échéance et puissent servir comme point de départ pour l'établissement de civilisations post-industrielles, de cultures nouvelles.

Pour les abonnements, on peut écrire à mon adresse : 21, avenue Kennedy, 91 Massy ; les conditions sont indiquées dans le journal.

Discussion

Question :

J'aimerais beaucoup savoir ce qui, selon vous, rend la vie digne d'être vécue.

Réponse :

En fait, jusqu'à présent, l'activité, la vie que j'ai eue, je la considérais tout à fait digne d'être vécue. J'avais le sentiment d'un certain type d'épanouissement personnel qui me satisfaisait. Maintenant, avec le recul, j'envisage ma vie passée sous un jour très différent ; en ce sens que je me rends compte que cet épanouissement était en même temps une mutilation. En effet, il s'agit d'une activité extrêmement intense, mais dans une direction excessivement étroite. De telle façon que toutes les autres possibilités d'épanouissement de la personne ne sont pas touchées. Pour moi, il n'y a absolument plus de doute possible à ce sujet. Le genre d'activité que j'ai actuellement est infiniment plus satisfaisant, plus enrichissant, que celui que j'ai eu pendant vingt ou vingt-cinq années de mon travail de chercheur mathématique. Ceci est un point tout-à-fait personnel, en ce qui concerne ma propre vie.

Mais, d'autre part, quand je parle d'une vie qui est digne d'être vécue, il ne s'agit pas seulement de ma vie à moi, il s'agit de la vie de tous. Et je me rends compte que l'épanouissement que j'ai pu réaliser dans une direction très limitée se faisait au dépens des possibilités d'épanouissement d'autres personnes. Si certaines personnes se sont trouvées sous une pression psychologique si forte qu'elles en sont parfois venues au suicide, c'est bien à cause d'un consensus dominant qui faisait que la valeur de la personne était jugée, par exemple, d'après sa virtuosité technique à démontrer des théorèmes, c'est-à-dire à effectuer des opérations excessivement spécialisées alors que, précisément, tout le reste de la personne était complètement laissée dans l'ombre. C'est une chose que j'ai expérimentée maintes fois. Quand on parle d'une certaine personne et que je demande "Qui est-ce ?", on me répond "C'est un con." En voulant dire par là, entre mathématiciens, que c'est un type qui soit démontre des théorèmes qui ne sont pas très intéressants, soit démontre des théorèmes qui sont faux, ou bien ne démontre pas de théorèmes du tout.

Donc, là, j'ai défini un peu négativement ce que j'entends par une vie qui soit digne d'être vécue. Je pense que, pour tout le monde, il y a possibilité d'épanouissement sans que nous soyons jugés par les autres, par des critères aussi étroits, aussi étriqués. En fait, je pense que cette échelle de valeurs a un effet directement mutilant sur les possibilités d'épanouissement. Enfin, c'est un des aspects, je ne prétends pas répondre ici à la question soulevée qui est très vaste ; mais dans l'optique où nous nous plaçons ici, en partant de la pratique scientifique, c'est ce que je vois de plus immédiat à répondre.

Question :

Quelles sont vos opinions sur la structure de la recherche scientifique dans la République Populaire de Chine ?

Réponse :

Jusqu'à une date assez récente, disons jusqu'à il y a environ trois mois, j'étais assez fermé à toutes les informations qui nous venaient de Chine parce qu'elles s'enveloppaient dans un jargon tel qu'on avait envie, a priori, de les mettre en doute, on n'avait pas envie de les prendre au sérieux. Le jargon, disons, d'un culte effréné de la personnalité de Mao Tsé Toung, une sorte de hagiographie qui l'accompagnait, faisait que je lisais ces publications assez souvent, mais qu'elles me tombaient des mains de découragement : ça ne passait pas. Alors, il y a trois mois, j'ai rencontré les *Nouveaux Alchimistes*[1] qui m'ont fait comprendre la possibilité d'une pratique scientifique entièrement différente de celle qui prévaut actuellement dans toutes les sciences qui sont professées à l'université et dans les instituts de recherche, à partir de ce moment là, effectivement, j'ai attaché un intérêt renouvelé à ce qui se passe en Chine et j'ai eu la motivation nécessaire pour dépasser, disons, les fioritures du style et pour essayer de voir le fond des choses. Ainsi, je me suis convaincu qu'il y a des choses extrêmement intéressantes qui se passent également en Chine, précisément en direction du développement d'une science nouvelle. En tout cas, la Chine est le seul pays dans lequel le mythe de l'expert soit officiellement battu en brèche, dans lequel on dit aux gens "ne vous fiez pas aux experts", "n'attendez pas que le gouvernement vous envoie des types compétents pour les résoudre vous-mêmes", "résolvez-les vous-mêmes avec les moyens du bord, avec les moyens que vous trouvez sur place".

Que nous soyons des professeurs d'université, des ouvriers ou des paysans, nous sommes tous capables d'initiatives créatrices, nous sommes tous capables d'inventer quelque chose. Je crois que la façon la plus frappante dont ces... appelons-les "mots d'ordre" ou ce mouvement nouveau se sont matérialisés, c'est dans le développement de la médecine chinoise. Tout particulièrement depuis la Révolution Culturelle. C'est un exemple où, précisément, la science sort des mains d'une certaine caste pour devenir la science de tous et

1. Note : Le *New Alchemy Institute* est un groupe de chercheurs en agrobiologie fondé par le Dr. John Todd et le Dr. William McLarney situé à Woods Hole, Massachusetts, Etats-Unis : Nancy Todd, The Book of the new alchemists, éd. Dutton, New York 1977.

ce n'est qu'en devenant la science de tous qu'elle peut devenir la science pour tous. En fait, pratiquement n'importe qui peut devenir médecin, quelle que soit sa formation culturelle. Ce vaste mouvement de "médecins aux pieds nus" a mobilisé un nombre impressionnant de gens (mais je suis mauvais en statistiques et je ne saurai pas dire combien) qui parcourent les campagnes pour toutes sortes d'interventions médicales simples qui ne seraient admises qu'après des années et des années d'études médicales dans un contexte social comme le nôtre. Alors que là-bas, après quelques mois de préparation, on peut exercer certaines activités médicales.

On remarque tout particulièrement le développement sensationnel de l'acupuncture chinoise, qui a permis de guérir certaines affections dans des cas tout-à-fait insoupçonnés jusqu'à maintenant, ou d'être, par exemple, auxiliaire de certaines techniques médicales. On connaît le rôle que joue actuellement l'acupuncture chinoise dans l'anesthésie. L'acupuncture permet également de guérir toutes sortes d'affections, y compris des affections aussi banales que les rhumes, mais aussi, par exemple, des affections très sérieuses comme des descentes de matrice à des états très avancés. J'ai eu récemment la traduction d'un article d'un journal chinois à ce sujet qui nous éclaire bien sur les différences entre, disons, la pratique scientifique et en particulier la pratique médicale dans les pays occidentaux comme la France ou la Suisse et la pratique en Chine où une technique entièrement nouvelle de guérison d'une descente de matrice très avancée a été trouvée par une jeune femme médecin qui avait très peu d'études derrière elle, mais qui était fortement motivée pour guérir un cas précis. D'autre part, elle se trouvait dans un climat culturel où il n'est pas considéré comme inadmissible, comme impensable, qu'une personne ayant peu de connaissances, n'ayant pratiquement pas de diplômes, puisse développer des techniques nouvelles. Elle a fait des essais sur elle-même en faisant des piqûres sur ses propres vertèbres inférieures puisqu'elle savait, d'après le peu de choses élémentaires qu'elle avait apprises, qu'il y avait des liens nerveux directs entre la matrice et ces vertèbres et à force d'expérimentation sur elle-même, elle a fini par trouver un point qui lui a causé une réaction extrêmement forte qui lui a fait remonter la matrice à l'intérieur de son ventre. Sur ce, ayant la conviction qu'elle avait trouvé le point correct, elle a fait la même opération sur la malade qu'elle avait en vue et cette malade a été guérie. Depuis lors, d'après ce journal, une cinquantaine d'autres cas auraient été traités avec quarante cinq cas de guérison.

On peut voir ici la différence fondamentale entre cette sorte de pratique et de découvertes scientifiques et celles qui prévalent dans les pays occidentaux. Tout d'abord le malade n'est plus un objet entre les mains du médecin ; ce n'est plus le médecin qui est le sujet qui sait et qui applique son savoir sur l'objet malade. Ici, dans l'investigation scientifique, le médecin est en même temps l'objet de l'expérimentation, ce qui, en même temps, lui permet de surmonter cette relation intolérable pour le malade d'être précisément un objet sans volonté, sans personnalité, entre les mains du médecin et, en même temps, qui permet, je crois, une connaissance beaucoup plus directe, beaucoup plus intense de ce qui se passe.

Lorsqu'on ressent la recherche scientifique dans sa propre chair, lorsqu'on ressent soi-même les réactions du corps, c'est une connaissance tout-à-fait différente que si l'on fait quelque chose sur un objet malade et que quelques aiguilles, ou autres, enregistrent des réactions de façon purement quantitative. Je pense qu'il y a là un ensemble de facteurs où les facultés rationnelles de la personne ne sont plus séparées les unes des autres, où elles ne sont plus séparées, par exemple, de l'expérience sensorielle directe, ou des motivations affectives, idéologiques, appelez-les comme vous voudrez.

Donc, je pense qu'il y a là véritablement intégration de nos différentes facultés cognitives, de nos facultés de connaissance, qui fait véritablement défaut dans la pratique scientifique dominante, occidentale. Ici, au contraire, nous faisons tout pour séparer coûte que coûte les facultés purement rationnelles et tout le reste de nos possibilités de connaissance. Ceci est, entre autre, un des facteurs qui a abouti à cette espèce de délire technologique qui fait que les savants sont capables de fasciner sur des problèmes techniques, comme ceux posés par la construction de missiles intercontinentaux ou d'autres choses analogues, sans du tout se poser la question des implications atroces de l'utilisation éventuelle de ce qu'ils sont en train de construire.

Question :

D'après vous, il faudrait changer la société en une société post-industrielle dans dix ou vingt ans. Je vous accorde même cinquante ans. Je vous demande la chose suivante : supposez qu'une fée vous accorde un pouvoir illimité de persuader tout le monde de faire ce que vous pensez qu'il faille faire. Que ferez vous sans provoquer une grande catastrophe, disons, de famine, etc. ?

Réponse :

Je crois qu'il y a déjà un malentendu de base. Je n'ai pas dit qu'il faut que qui que ce soit, de particulier, ou quelqu'un d'autre, moi par exemple, transforme la société industrielle, comme ça, dans les dix, vingt ou trente années qui viennent dans une autre forme de société prédéterminée. Si une fée m'investissait de pouvoirs discrétionnaires, je lui dirais que je n'en ai pas envie. Effectivement, je suis bien persuadé que ce que je pourrais faire, ce ne serait guère autre chose que de mettre encore plus de mess, de bordel, que celui qui y est déjà. En fait, je suis entièrement convaincu qu'absolument personne n'est capable, disons, de programmer, de prévoir les changements qui vont avoir lieu. Je pense que la complexité des problèmes planétaires est si grande qu'elle défie absolument les capacités d'analyse mathématique ou expérimentale. Nous sommes dans une situation où les méthodes des sciences expérimentales ne nous servent pratiquement à rien. Parce que, finalement, une planète Terre, il y en a une seule et une situation comme une situation de crise où nous sommes maintenant n'a lieu qu'une seule fois dans l'histoire de l'évolution. Nous n'avons donc pas là une expérience que nous puissions répéter à volonté pour voir quelles vont être les conséquences de telle ou telle opération, de façon à ensuite optimiser nos modes opérationnels. Il n'est absolument pas question de ceci. Il s'agit d'une situation unique, d'une complexité qui dépasse infiniment nos possibilités d'analyse et de prédiction détaillée.

Tout ce que nous pouvons faire, j'en suis persuadé, c'est que, chacun dans notre propre sphère d'activités, dans notre propre milieu, nous essayions d'être un ferment de transformation dans la direction qui, au jugé, intuitivement, nous semble la plus indiquée, en commençant par les rapports humains avec nos proches, les membres de notre famille, nos enfants, notre femme, nos amis, également nos collègues de travail. Je suis persuadé que c'est une première transformation qui a l'avantage d'être communicative, de se communiquer des uns aux autres.

Parmi les transformations à effectuer, il y a plus particulièrement : le dépassement de l'attitude de compétitivité entre personnes, le dépassement de l'attitude ou du désir de domination des uns par rapport aux autres qui engendre d'autre part le désir de soumission à l'autorité (on a d'ailleurs là deux aspects de la même tendance) et surtout l'établissement de la communication entre les personnes qui est devenue extrêmement pauvre dans notre civilisation. J'ai fait, assez récemment, le bilan de ma propre vie et des relations humaines que j'ai eues, et j'ai été frappé de constater à quel point la véritable communication était pauvre. Par exemple, en milieu mathématique, entre collègues, les conversations roulent essentiellement sur des sujets techniques concernant la mathématique. J'ai eu un certain nombre de relations amoureuses dans ma vie, comme sans doute la plupart d'entre vous, et, là également, je me suis aperçu à quel point la communication véritable, la connaissance l'un de l'autre était pauvre. Je suis tout-à-fait convaincu qu'il ne s'agit pas d'une particularité liée à ma personne parce que je serais personnellement moins doué pour la communication que d'autres. En fait, il s'agit là d'un phénomène général dans notre culture et effectivement en parlant avec beaucoup d'autres personnes, j'ai fait des constatations tout-à-fait analogues. Pour ma part, par exemple, j'ai pris cette décision générale de ne poursuivre des relations amoureuses avec une femme que dans la mesure où elles me sembleraient être un moyen pour établir une communication plus profonde. Si vous voulez, c'est juste un exemple particulier d'une façon dans laquelle chacun de nous peut dans l'immédiat transformer la façon dont il aborde les autres. De même, je peux vous dire que mes relations avec de mes enfants ont changé ; dans le sens où j'ai compris que, dans beaucoup d'occasions, j'ai exercé sur eux une autorité assez arbitraire disons, sur des choses qui, en bonne conscience, étaient de leur propre ressort. Ce sont donc là des choses qu'on peut modifier.

On peut se demander, à première vue, en quoi ce type de changement est lié, disons, aux problèmes globaux de la survie. J'en suis convaincu, mais je ne peux pas le prouver parce que rien d'important ne peut être prouvé ; on peut simplement le ressentir, le deviner. Mais je suis convaincu qu'effectivement ces changements dans les relations humaines vont être un facteur tout-à-fait déterminant, peut-être le plus important, dans les changements qui vont se faire d'un mode de civilisation vers un autre. Encore une fois, il est maintenant devenu tout-à-fait clair pour moi que ces changements ne se feront pas par la vertu d'innovations techniques, de changements de structures. Le changement véritablement profond qui va se faire, c'est un changement dans les mentalités et les relations humaines.

Question :

Je voudrais revenir à la recherche scientifique. Vous parlez, en fait, des déviations de la recherche scientifique. Je suis en partie d'accord avec certains de vos diagnostics : le fait que nous recherchons trop la gloire personnelle, l'asservissement à la mode, les prétentions abusives de certains scientifiques, etc. Mais ceci est-il inhérent à la science ? La science, à mon avis, voudrait construire une nouvelle vision du monde. Quel but donneriez-vous à une autre pratique scientifique ?

Réponse :

Quand on dit inhérent à la science, inhérent à quelle science ? Je pense que c'est inhérent à la science telle qu'elle est définie par la pratique des derniers siècles, telle qu'elle s'est développée depuis le début des sciences exactes. Je pense qu'elle est inhérente à la méthode même de ces sciences. Parmi les traits distinctifs de cette pratique scientifique, il y a un premier point qui est la séparation stricte de nos facultés rationnelles et des autres modes de connaissance. Donc une méfiance instinctive de tout ce qui est, disons émotivité, de tout ce qui est connaissance philosophique, religieuse, de tout ce qui est considération éthique, de tout ce qui est ressenti sensoriel, direct. En ce sens nous avons plus confiance dans les indications d'une aiguille sur un cadran, qu'en ce que nous ressentons immédiatement, directement.

L'exemple suivant mesure très bien cette méfiance vis-à-vis du vécu immédiat ; je pourrais en citer bien d'autres, mais celui-ci me semble particulièrement frappant. C'est le cas de parents qui vont voir avec leur enfant un médecin en lui disant : "Nous sommes bien malheureux, notre enfant devient de plus en plus impossible en classe, il est kleptomane, il se bagarre avec tout le monde, chez nous il reste à bouder des journées entières, il fait pipi au lit, etc." Et ils posent la question : "Est-ce que notre enfant est malade ?" On demande donc au spécialiste, à la personne qui sait, de prononcer une formule rituelle : "Votre enfant est malade" ou "Votre enfant n'est pas malade". Dans le cas "Votre enfant est malade", on s'attend à ce qu'il prescrive un médicament, une méthode de traitement, quelque chose qui le fera revenir dans l'autre état, le cas "Votre enfant n'est pas malade" et un point ce sera tout. Mais si, par hasard, il dit : "Votre enfant n'est pas malade", les parents, un peu consolés, s'en iront chez eux et auront l'impression qu'il n'y a pas de problème qui se pose réellement. C'est, je crois, une des façons d'illustrer cet état d'esprit dans la science, de vouloir faire abstraction du vécu et tout énoncer en termes de normes purement rationnelles qui s'expriment, qui sont incarnées par des spécialistes.

Nous en arrivons ainsi au deuxième point, au deuxième vice de méthode, qui est inhérent à la méthode scientifique. C'est l'attitude analytique qui, bien entendu (je le sais bien) a été nécessaire pour le développement de ce type de connaissance. Le fait de diviser chaque parcelle de la réalité, chaque problème en des composantes simples pour mieux les résoudre et cette tendance à la spécialisation, comme on sait, est devenue de plus en plus grande. Chacun de nous ne saisit qu'une parcelle infime de la réalité. Ce qui fait que chacun de nous est parfaitement impuissant pour saisir, pour comprendre et pour prendre des options dans n'importe quelle question importante de sa vie, de la vie de la communauté ou de la vie du monde. Parce que n'importe quelle question importante a une infinité d'aspects différents, son découpage en petites tranches de spécialités est parfaitement arbitraire, et ce qu'un spécialiste tout seul ne peut pas faire, un colloque de cent spécialistes de spécialités différentes n'y parviendra pas non plus.

Finalement, de par sa propre logique interne, par l'évolution de la méthode analytique, on est arrivé à un point où, je crois qu'indépendamment de la question de la crise écologique, il y a une crise de la connaissance. En ce sens je crois que, s'il n'y avait pas eu la crise écologique, d'ici dix ou vingt ans on se serait tous aperçu qu'il y a une profonde crise de la connaissance, même au sens de la connaissance scientifique. En ce sens qu'on n'arrive plus à intégrer en une image cohérente une vision du monde (puisqu'après tout c'est à cela que nous voulons arriver), à une vision de la réalité qui nous permette d'interagir de façon favorable avec elle à partir de nos petites tranches de spécialités. C'est un deuxième aspect qui me semble être devenu néfaste.

Il y en a un troisième lié à celui-ci. C'est que les spécialités s'ordonnent spontanément les unes par rapport aux autres, d'après des critères objectifs de subordination des unes aux autres ; de telle façon que nous voyons apparaître une stratification de la société en commençant, disons par une stratification de la science, d'après des soi-disant critères objectifs de subordination des spécialités les unes aux autres. En ce sens, la science, dans sa pratique actuelle telle qu'elle s'est développée depuis trois cents ou quatre cents ans, me semble être le principal support idéologique de la stratification de la société avec toutes les aliénations que cela implique. Je crois que, en ce sens, la communauté scientifique est une sorte de microcosme qui reflète assez fidèlement les tendances à l'intérieur de la société globale.

En outre, quatrième point, c'est la séparation dans la science entre connaissance d'une part et désirs et besoins d'autre part. La connaissance scientifique se développe d'après, soi-disant, une logique interne à la connaissance, d'après, soi-disant, des critères objectifs pour la poursuite de la connaissance. Mais en fait, en s'éloignant de plus en plus de nos besoins et de nos désirs véritables. La chose la plus frappante à cet égard me semble être l'état de stagnation relative dans laquelle se trouve l'agriculture, depuis quatre cents ans que les sciences exactes se développent, quand on la compare avec des branches en plein essor comme les mathématiques, la physique, la chimie ou plus récemment la biologie. L'agriculture après tout, est la base de nos sociétés dites civilisées depuis dix mille ans. C'est véritablement l'activité de base de la société, c'est de là que nous tirons l'essentiel des ressources pour satisfaire nos besoins matériels. On aurait pu penser qu'avec le développement de méthodes de connaissance nouvelle, elles seraient appliquées en priorité à l'agriculture pour nous permettre de nous libérer, dans une certaine mesure, de cette obligation d'un travail démesuré pour satisfaire nos besoins élémentaires. Il n'en a rien été. Encore actuellement, je crois que pour la plupart d'entre nous, l'agriculture n'est pas considérée comme une science. Cela semblerait indigne d'un esprit brillant de s'occuper d'agriculture. Or, précisément, avec des techniques scientifiques nouvelles, la première chose à se demander c'est : "à quoi peut servir la science, le contenu de la science que nous développons ?" Je pense que parmi les thèmes les plus importants qui seront étudiés par une science nouvelle, il y aura précisément le développement de techniques agricoles nouvelles beaucoup plus efficientes et surtout beaucoup plus viables à longue échéance que les techniques qui ont été utilisées jusqu'à présent.

Voici donc quelques critiques de la pratique scientifique actuellement. D'après ce que j'ai entendu dire de certaines tentatives dans un sens novateur, je suis convaincu qu'on peut surmonter ces limitations de la science actuelle, qu'on peut donc développer une science qui soit directement et constamment subordonnée à nos besoins et nos désirs ; dans laquelle il n'y ait plus de séparation arbitraire entre l'activité scientifique et l'ensemble de nos modes de connaissance, où il n'y aurait plus de séparation arbitraire entre la science et notre vie. Du même coup aussi, les relations humaines qui sont promues par l'activité scientifique changeraient du tout au tout. La science ne serait plus la propriété d'une caste de scientifiques, la science serait la science de tous. Elle se ferait non pas dans des laboratoires par certaines personnes hautement considérées à l'exclusion de l'immense majorité de la population, elle se ferait dans les champs, dans les jardins, au chevet des malades, par tous ceux qui participent à la production dans la société, c'est-à-dire à la satisfaction de nos besoins véritables, c'est-à-dire en fait par tout le monde.

Donc, la science devient véritablement la science de tous. Pour les *Nouveaux Alchimistes*, ce groupe auquel j'ai déjà fait allusion, c'est même une nécessité du point de vue technique. En effet, leur intention, leur thème de départ, c'était de développer des biotechniques qui permettent, avec des moyens extrêmement rudimentaires ne faisant pas appel à l'hyperstructure industrielle et technologique, de créer des écosystèmes artificiels très productifs en nourriture. Les moyens technologiques au sens ordinaire, par exemple l'introduction d'une source continue d'énergie [l'électricité], ou l'approvisionnement en aliments par des industries chimiques (les engrais ou les aliments qu'on donnerait au bétail, aux poissons), peuvent être remplacés par une connaissance sophistiquée et globale des phénomènes naturels à l'intérieur de ces écosystèmes artificiels. Pour ce faire, ils se sont convaincus qu'il n'était pas pensable de la faire à l'intérieur des structures académiques existantes ; en fait, ce n'était pas possible même de le faire à l'intérieur de laboratoires fermés ; on ne pouvait le faire que sur le terrain, parce qu'il fallait tenir compte dans le développement de ces techniques de facteurs écologiques subtils qui varient énormément d'un microsystème écologique à un autre et il y en a des milliers et des dizaines de milliers dans un pays tel que les Etats-Unis où il poursuivent leurs activités.

Donc, pour arriver à développer ces méthodes, c'est sur le terrain qu'il faut les développer et que tous doivent s'y associer virtuellement. Les *Nouveaux Alchimistes* sont en relation avec des millions d'américains intéressés par l'agrobiologie, "Organic gardening and farming", l'agriculture et le jardinage biologique, par l'intermédiaire de leur magazine Organic gardening and farming magazine. Parmi ceux-ci, il y a déjà des milliers de petites gens, de petits paysans, de petits jardiniers, qui leur ont écrit pour s'associer à leurs recherches concernant le développement de tels écosystèmes. Donc, actuellement, il ne s'agit pas seulement d'idées dans l'air, mais de choses qui sont en train d'être faites dans un pays aussi radicalement opposé à ce genre d'esprit que les Etats-Unis. Encore une fois, par des détails concrets dont m'a parlé John Todd, l'un des fondateurs des *Nouveaux Alchimistes*, il n'est absolument pas possible de promouvoir ce genre de recherches à l'intérieur des structures académiques existantes. Ils ont essayé, mais c'est impossible.

Question :

Bien que 99 % de la population n'ait pas accès à la science, il faut remarquer qu'elle a un respect plus grand de la science que vous et c'est basé sur un fait qui n'est pas simplement dû à son ignorance. Par exemple, on peut se poser la question : "combien de gens dans cette salle doivent la vie au fait qu'il y a eu cette science que vous décriez ?". Qu'il y a eu des retombées en médecine, par exemple, qui ne sont pas l'acupuncture, qui ne sont pas le remontée des matrices, mais qui sont simplement la pénicilline et un certain nombre de choses décisives qui ont fait que la population du globe a augmenté. Un certain nombre d'entre nous, nous vivons, votre groupe s'appelle "vivre", nous vivons parce qu'il y a eu cette science maudite.

Il est vrai que nous risquons la destruction et il est naturel qu'il y ait une réflexion sur ce qu'est la science aujourd'hui entre les mains de types qui semblent surgir du fond des âges, parce que ce sont des barbares qui sont prêts à l'utiliser pour détruire l'humanité. C'est vrai. Mais je trouve chez vous qu'une partie de cette réflexion est détruite par l'espèce de nihilisme absolu, de négation absolue, que vous professez à l'égard de la science.

J'ai relevé dans votre exposé un certain nombre d'affirmations péremptoires qui enlèvent une partie du poids à votre position : vous avez émis le doute, il est basé sur les relations que vous avez avec certaines gens du CERN, que la recherche que nous pouvons faire, nous par exemple, n'a pas d'application militaire. C'est quelque chose que l'on peut parfaitement mettre en doute. On doit être, peut-être, tous complètement idiots, mais je ne crois pas. Vraiment, je ne crois pas que des collègues prendraient le moindre risque à venir nous dire en quoi ce que nous faisons risque d'avoir des applications militaires. Et ça me fait venir à quelque chose qui me paraît essentiel.

Nous avons posé la question : "à quoi servent les mathématiques ?" Il faut continuer : "à quoi sert la musique ? à quoi servent un certain nombre d'activités que les gens font simplement pour leur plaisir ?".

Enfin quelle est votre conception de l'homme ? Il est vrai qu'un certain nombre de gens ont des activités auxquelles la masse n'a pas accès, mais je ne pense pas que c'est en décidant que M. Einstein ne doit pas faire de la recherche ou que M. Evariste Galois ne doit pas faire de la recherche que vous arriverez à enrichir la vie des gens qui ne sont ni Galois ni Einstein. Il y a des problèmes qui sont posés pour des gens qui ne sont ni Galois ni Einstein et qui sont dans des grandes institutions dans lesquelles l'organisation de la recherche de façon industrielle pose des problèmes considérables, des angoisses considérables.

Mais je trouve qu'avec votre façon de rejeter totalement la science vous rejoignez Planète, vous rejoignez un certain nombre de..., vous voyez à quoi je pense..., vous rejoignez un certain nombre d'obscurantistes. Je m'excuse, comme je vous reçois dans l'estomac pour la première fois, je ne peux pas critiquer vos positions, mais il y a beaucoup de choses chez vous qui mériteraient un débat.

Réponse :

Si vous me permettez, je vais dire quelques mots à propos de votre intervention.

Donc, vous me reprochez un nihilisme anti-science. En fait, c'est vrai que dans la mesure où par science on entend l'activité scientifique telle qu'elle est exercée actuellement, je suis arrivé à la conclusion que, par beaucoup d'aspects, c'est une des principales forces négatives à l'œuvre dans la société actuelle. Ce n'était sans doute pas le cas il y a deux cents ans et peut-être même pas le cas il y a cent ans. Actuellement je crois que la situation a beaucoup changé. Mais encore une fois, comme je l'ai dit tout à l'heure, je pense que l'activité scientifique actuelle est susceptible de se modifier très très profondément ; je pense que ceci ne se fera pas sans que la plupart des secteurs scientifiques actuels dépérissent purement et simplement. Je suis tout à fait convaincu que les recherches actuelles où l'on se met à cataloguer des particules élémentaires correspondant à tels ou tels opérateurs dans l'espace de Hilbert, ou les recherches mathématiques dans lesquelles j'ai été impliqué jusqu'à maintenant vont dépérir, non pas par un décret autoritaire de moi ou de personne d'autre, mais spontanément. Et ce lorsque les structures actuelles de la société vont s'écrouler, lorsque les rouages ne marcheront plus, parce que les mécanismes de la société industrielle, par son fonctionnement normal même, sont autodestructeurs ; ils détruisent l'environnement et heureusement pour nous je dirai. De telle sorte qu'ils ne peuvent pas continuer à fonctionner indéfiniment, ils mettent en marche des processus irréversibles. Alors il y aura écroulement de nos modes de vie actuels. Lorsque nos cités, par exemple, s'écrouleront, lorsque personne ne payera plus les salaires qui nous permettent, grâce à une activité scientifique ésotérique, d'aller acheter les provisions dont nous avons besoin dans les magasins, d'acheter des habits, de payer nos loyers, etc. (et alors même que nous aurions l'argent, cet argent ne nous servirait à rien parce que la nourriture, il nous faudra l'arracher de la terre par nos propres moyens, parce qu'il n'y en aura plus assez), à ce moment là, les motivations pour étudier les particules élémentaires disparaîtront entièrement.

J'étais moi-même assez fanatique, si l'on peut dire, de la recherche. J'étais vraiment très captivé, il y a de nobles passions. Mais à supposer même qu'il reste des physiciens (malgré une pression extrêmement forte des nécessités matérielles pour la survie) qui rêveraient de continuer la recherche, il ne faut pas oublier quand même qu'un accélérateur de particules ne se fabrique pas avec quelques morceaux de bois ; c'est quelque chose qui implique un effort social considérable et je doute fort que les autres membres de la société soient disposés à distraire des activités véritablement nécessaires pour établir un monde viable, digne d'être vécu, pour rebâtir des accélérateurs de particules et des choses analogues. En tout cas, je crois que, pour les accélérateurs et autres engins de ce genre, le large public n'a jamais été consulté. D'ailleurs, j'ajoute que s'il l'avait été, probablement qu'il l'aurait été de telle façon qu'il aurait dit "Amen !".

Après les leçons que chacun de nous qui survivra pourra tirer des événements qui accompagneront l'écroulement de la société industrielle, je pense que les mentalités auront très profondément changé. C'est pour cette raison que la recherche scientifique cessera, ce ne sera pas parce que tel ou tel aura décidé autoritairement que nous ne ferons plus de recherches scientifiques à partir d'aujourd'hui. Elle cessera simplement, comme quelque chose qui, d'après un consensus général, sera devenu entièrement inintéressant. On n'aura plus envie, simplement, j'en suis persuadé, d'en faire, ça ne signifie pas que l'on n'aura plus envie de faire de la recherche tout court. La recherche, nos activités créatrices, se dirigeront dans des directions tout à fait différentes.

Je pense, par exemple, au genre de recherches que sont en train de poursuivre les *Nouveaux Alchimistes* avec des milliers de petites gens qui n'ont pas de formation universitaire. Ce sont des choses fascinantes qui mettront en jeu la créativité de chacun de nous de façon aussi profonde et peut-être aussi satisfaisante qu'actuellement les travaux ultra-spécialisés en laboratoire.

Nous avons été élevés dans une certaine culture ambiante, dans un certain système de référence. Pour beaucoup d'entre nous, d'après les conditionnements reçus dès l'école primaire en fait, nous considérons que la société telle que nous la connaissons est l'aboutissement ultime de l'évolution, le nec plus ultra. Enfin, c'est le cas pour la majorité des scientifiques. Mais nous oublions qu'il y a eu des centaines et des milliers de civilisations avant la nôtre, avec des cultures différentes, qui sont nées, qui ont vécu, qui ont fleuri et qui se sont éteintes. Notre civilisation, ou la civilisation industrielle (parce que je ne la considère plus comme la mienne), n'y fera pas exception.

Une chose qui va au delà de cette remarque, à mon sens, c'est de réaliser qu'il s'agit d'un processus qui est vraiment devant nous, dans lequel nous sommes déjà engagés maintenant. En fait, la crise écologique, la crise de civilisation, ce n'est pas quelque chose pour dans dix ans ou dans vingt ans : nous sommes en plein dedans. Je crois même qu'il y a de plus en plus de personnes qui s'en aperçoivent ; c'est une chose qui me frappe de plus en plus tout au long de ces derniers mois et de ces dernières semaines, à quel point des gens chez qui on s'y attendait le moins commencent à le ressentir. On gratte un tout petit peu en-dessous des choses superficielles qu'ils disent et on s'aperçoit qu'il y a un véritable désarroi concernant, disons, le sens global de la culture ambiante. Voici donc concernant l'accusation de nihilisme. Donc, il y a du vrai dedans si on l'applique à une certaine forme d'activité scientifique. J'ai quelque peu oublié les autres objections que vous faisiez ?

Question :

On doit la vie à la science !

Réponse :

Je crois qu'il y a des choses utiles à dire à ce sujet. A supposer que certains ici doivent la vie à la science, on peut dire qu'il y a des centaines de milliers de gens au Vietnam qui doivent également leur mort, et leur mort sous des conditions atroces, à cette même science. C'est là un argument un peu facile parce qu'il y a beaucoup de gens qui disent : "La science a été mal employée, le remède est de faire toujours la même espèce de science, mais de la mettre maintenant entre les mains de gens qui vont l'employer bien." On nous dira, par exemple, que la médecine, les recherches biologiques, etc., c'est le type de science qui est utilisée surtout de façon bénéfique. Alors, là encore, il y a une façon facile d'y répondre en disant : le même genre de recherche fondamentale en biologie qui par un travail d'engineering va, par exemple, servir à développer des vaccins anti-poliomyélite ou contre d'autres maladies, ce même genre de recherche fondamentale, par un autre travail d'engineering, va servir à produire des souches de microbes très pathogènes, très résistants à tous les agents antibiotiques et qui seront utilisés pour la guerre bactériologique. Donc, finalement, la recherche n'a pas d'odeur et quelles que soient les intentions de celui qui promeut un certain type de recherches (tout au moins le type de recherches qui est actuellement promu à l'intérieur de notre science traditionnelle) l'expérience a montré qu'elle est toujours détournable et détournée.

Comme j'ai donné ici l'exemple de la guerre bactériologique, on pourrait dire que les deux exemples sont un peu de même type. En ce sens qu'on peut les considérer comme liés à un accident, à savoir : l'existence d'appareils militaires, l'existence de nations antagonistes. Mais supposons que ces difficultés soient éliminées, que le rêve des citoyens du monde soit réalisé, qu'il y ait un gouvernement mondial. Ou bien supposons que les Etats-Unis, la Russie ou la Chine, au choix, ait absorbé l'ensemble de la planète, qu'il n'y ait plus qu'un seul pays. Ou supposons que la planète soit plus petite qu'elle n'est et qu'elle ne soit constituée que par les Etats-Unis, ou bien supposons que les Etats-Unis, par une politique isolationniste extrême arrivent à vivre en vase clos, et regardons ce qui se passe là-bas. Je prétends qu'en fait les problèmes sont plus profonds que cela, que les problèmes essentiels se posent encore dès lors même qu'il n'y aurait plus de problèmes militaires.

Prenons par exemple, les antibiotiques dont vous avez parlé, précisément parce qu'ils sauvent effectivement des vies humaines. Que voyons-nous, pour l'usage des antibiotiques ? Nous voyons que, lorsque nous avons le moindre rhume, n'importe quelle affection quelle qu'elle soit, nous allons chez le médecin. Qu'est-ce qu'il nous prescrit ? Il nous prescrit des antibiotiques. En fait, pour une simple fatigue, très souvent, il nous prescrit des antibiotiques. Il semble être pris sous une sorte de pression sociale, à savoir, son client attend de lui qu'il prescrive à chaque fois le remède qui est susceptible, le plus rapidement possible d'apporter une amélioration. Ceci sans préjudice de ce qui va se passer à longue échéance. Or, n'importe quel biologiste vous le dira, il n'y a pas besoin d'être un grand génie pour ça et même moi je le sais bien que je ne sois pas biologiste, le fait d'utiliser à titre routinier des antibiotiques est un véritable contresens. En effet, par cette pratique, nous contribuons à la formation de souches de microbes dans notre organisme qui vont développer une résistance, précisément aux antibiotiques que nous prenons. De sorte que, dans les cas véritablement graves où une intervention urgente par antibiotiques serait susceptible de nous sauver la vie, nous risquons de rester sur le carreau [2]. Maintenant, nous sommes dans une situation où il est malaisé d'évaluer les bénéfices ou les avantages qu'il y a eu dans l'emploi des antibiotiques. Qu'est-ce qui l'emporte sur l'autre : est-ce que les dizaines de milliers de vies qui ont été sauvées par l'emploi des antibiotiques pèsent plus lourd dans la balance que, disons, les millions d'organismes qui ont été affaiblis dans leur résistance naturelle aux agents microbiens par l'usage inconsidéré des antibiotiques ?

Je ne trancherai pas ce problème, mais je dirai simplement qu'ici la question n'est pas une question technologique, ce n'est pas une question de connaissances. Il est bien clair que les biologistes ont les connaissances nécessaires pour décider, dès maintenant, que l'usage qu'en font les médecins, en clinique et dans leur pratique journalière, est insensé. C'est une question de mode de vie. C'est une question de civilisation. En fait, je ne dis pas qu'il faut bannir nécessairement les antibiotiques dans une société idéale future. Les antibiotiques sont des champignons qui peuvent être produits avec des moyens extrêmement rudimentaires, sans utiliser les grandes hyperstructures de l'industrie lourde. On peut donc fort bien utiliser les antibiotiques dans une société très décentralisée dans laquelle des communes de quelques centaines ou quelques milliers d'habitants vivraient en autarcie relative. Il est tout-à-fait possible et probable que les antibiotiques continueront à être utilisés dans des sociétés post-industrielles, dans certaines du moins. Ce n'est pas parce qu'ils ont été produits dans notre culture scientifique occidentale actuelle qu'il faudrait mettre l'interdit général contre ce genre de procédé. Je crois qu'il y a lieu de juger sur pièces et que ce n'est pas un travail théorique à faire maintenant, à savoir : de séparer le bon grain de l'ivraie dans l'ensemble de nos connaissances scientifiques et des techniques actuellement disponibles. C'est, je crois, un travail qui se fera au jour le jour, suivant les nécessités de l'heure. C'est-à-dire que c'est un travail qui ne se fera pas par quelques spécialistes, biologistes, médecins, psychiatres, physiciens, etc. Il se fera par tout le monde au fur et à mesure des besoins. On verra bien de quoi on a besoin dans le grand amas de connaissances scientifiques dont je suis convaincu que la plus grande partie est parfaitement inutilisable et va dépérir complètement.

Question :

Qu'en est-il des relations entre le CERN et les militaires ?

Réponse :

Je n'ai pas d'informations secrètes à ce sujet. Je ne prétendais pas parler, disons, de relations réelles, officielles ou occultes, entre le CERN et les appareils militaires. Je n'ai pas connaissance de telles choses. Je voulais parler de l'image que le nom du CERN a sur une large partie du public plus ou moins cultivé, par exemple moi-même. Le nom déjà : Centre Européen de Recherches Nucléaires. Le fait qu'il soit un organisme qui regroupe un certain nombre de pays, le prestige qui lui est attaché et que vous ne nierez sans doute pas ; le fait également qu'il s'agisse de recherches concernant tout au moins l'atome, même si ce ne sont pas des "recherches nucléaires" et ceci, lié à la préoccupation, aux soucis grandissants dans le public vis-à-vis, précisément, de l'atome, y compris de l'atome pacifique, tout ceci crée une certaine résonance concernant le CERN qu'on ne peut pas nier. A cela près que, en ce qui me concerne, de toute façon, le genre de recherches, le genre de pratique scientifique qui est poursuivi dans le CERN, comme dans n'importe qu'elle autre institution scientifique actuelle (mais encore plus à cause, malgré tout, des connotations générales de la recherche atomique avec les périls liés à notre survie), tout ceci a comme effet de créer une gêne, je crois, chez beaucoup et chez moi en particulier.

Question :

Et Evariste Galois ?

Réponse :

Il est mort le pauvre.

2. NdE : L'augmentation des résistances est seulement maintenant reconnue par les pouvoirs publics, campagne publicitaire "les antibiotiques, c'est pas automatique" fin 2004

Question :

Vous avez signalé de nombreuses choses mauvaises et je suis d'accord avec vous, elles devraient être changées. La question est : "Quel est le rapport avec la science ?" Vous signalez que de nombreux scientifiques sont cupides, recherchent les honneurs, sont imbus de hiérarchie, etc. Est-ce vraiment différent parmi les artistes, les fermiers, les politiciens et d'autres ? De même, vous signalez de nombreuses choses déplorables sur le plan humain : des gens se suicident ou vont se suicider, ont des dépressions nerveuses. Ici aussi, en est-il autrement parmi les politiciens, les hommes d'affaires, etc., et la science est-elle responsable de ces malheurs ? Est-ce seulement la science qui rend les gens cupides ou suicidaires ?

Et, pour prendre un exemple, il a existé des poètes qui ont écrit de très belles choses sans avoir aucune communication, disons, avec leur femme. Pensez-vous que là encore la science est vraiment responsable de ce manque de communication ? Je crois que c'est plutôt propre à la nature humaine et que c'est mauvais. Nous devons lutter contre cela, mais cela n'a rien à voir avec la science.

Et enfin, à propos des guerres, à propos du Vietnam. Nous sommes tous d'accord que c'est une tragédie. Mais la science en est-elle responsable ? Je veux dire, il y a trois mille ans, pensez-vous que cela était fondamentalement différent ? Merci.

Réponse :

Je suis tout à fait d'accord avec vous pour constater que la plupart des aspects de la pratique scientifique que j'ai mis en avant (un certain nombre du moins) ne sont pas spécifiques aux milieux de la recherche scientifique. Je ne pense pas qu'il y ait nécessairement plus de suicides, disons, parmi les mathématiciens que dans les autres professions. Pourquoi est-ce que j'en ai parlé ? Simplement, c'est parce qu'on parle mieux, malgré tout, du milieu que l'on connaît : on en parle de première main. Et j'en ai parlé parce que, finalement, il y a un certain mythe qui veut que les choses soient mieux dans la communauté scientifique, qui veut, par exemple, que l'activité scientifique soit nécessairement source de satisfaction, source de plaisir, de joie. Alors que, dans un certain nombre de cas, on peut montrer que c'est précisément l'activité scientifique qui est source de contraintes, de répressions et de drames. Je connais d'autres cas, disons moins extrêmes que celui-là, dans ma pratique personnelle. Mais c'est pour aller à l'encontre de certains mythes que j'ai parlé de ces cas-là. Autrement, je suis tout-à-fait d'accord avec votre objection. Donc, finalement, je crois qu'il y a un malentendu, ce n'est pas vraiment une différence de vision importante. En ce qui concerne l'autre question, je ne pense pas que la science soit la seule cause de la situation assez catastrophique dans laquelle nous nous trouvons. J'avais dit dès le début que c'est une des causes. En tout cas, si cette cause n'existait pas, les problèmes liés, disons, à la survie de l'homme ne se poseraient pas actuellement. Ils se poseraient peut-être dans quelques siècles, mais ils ne se poseraient pas à l'heure actuelle. Bien entendu des guerres comme celle du Vietnam pourraient fort bien avoir lieu et ont eu lieu sans que la science ait le développement actuel. Ce qui est frappant, je crois, pour un scientifique, c'est de constater à quel point les techniques les plus modernes trouvent leur application dans cette guerre. Je suis allé au Vietnam du Nord et j'ai pu discuter sur place avec les intéressés sur les différents perfectionnements des bombes à billes, par exemple. Les billes ont un mouvement de rotation très rapide afin de mieux déchiqueter les chairs et de manière aussi à ce qu'elles puissent pénétrer à l'intérieur des abris anti-aériens qui sont creusés un peu partout le long des rues et le long des routes, pour peu que l'on n'ait pas pris soin de les fermer. Et enfin, elles éclatent en l'air pour mieux frapper les populations civiles. D'ailleurs, malgré les consignes, la plupart des vietnamiens, comme ils ont envie de voir ce qui se passe, ne ferment pas les trous. Ainsi, lorsque les bombes explosent, ceci rend ces abris à peu près illusoires. De même, les billes de métal ont été remplacées par des billes en plastique pour que leur détection par des moyens de radiographie soit impossible. Il faut donc développer des techniques nouvelles pour arriver à extraire ces billes des chairs déchiquetées. La technologie militaire employée au Vietnam est orientée plus vers une mutilation de la population que vers son extermination directe, parce qu'une personne mutilée demande des soins de beaucoup d'autres gens pour la maintenir en vie, tandis qu'une personne tuée en demande très peu. Il y a donc un certain nombre d'aspects assez atroces de la technologie liées véritablement à une recherche, à l'état actuel de la science.

Par ailleurs, il y a une chose dont je ne me rendais pas compte au moment où j'ai commencé à réfléchir sur ces questions, c'est que pratiquement toutes les grandes firmes commerciales américaines sont directement impliquées dans la fabrication des armements. C'est vrai dans une moindre mesure pour les firmes françaises ; je ne sais pas ce qu'il en est pour les firmes suisses. Au moment où j'ai quitté l'institut où je travaillais à cause de la présence de 5 % du budget qui était d'origine militaire, je ne voyais rien à redire au fait que la plupart des fonds provenaient de firmes telles que Esso, Saint-Gobain et autres. Mais depuis lors, j'ai découvert que ces firmes sont très directement impliquées également dans ces fabrications d'armement, elles ont toutes d'importants contrats avec l'armée. De telle façon que, finalement, il devient impossible de distinguer entre la recherche militaire et la recherche tout court, et même entre, disons, les firmes d'usage courant et les firmes liées à la prolifération des appareils militaires. Finalement, j'ai fini par m'apercevoir que tout était inextricablement lié.

Au fait, je m'aperçois qu'il y a une question à laquelle je n'ai pas répondu, qui était peut-être liée à Galois. C'était l'affirmation qu'il était bon de poursuivre la recherche scientifique pour elle-même, pour le plaisir de la connaissance, au même titre que l'on poursuit une activité artistique. Alors là, il y a peut-être une ou deux choses à dire.

Une première chose est que pour arriver à comprendre et à apprécier le genre de mathématiques que je faisais, par exemple, il y a trois ans encore, à supposer même que l'on court-circuite les canaux habituels dans l'enseignement, que l'on aille directement au fait, à l'essentiel, il faut compter quelque chose comme une formation spécialisée de cinq à dix ans. Or, il est clair qu'une telle formation sera dans l'état actuel des choses l'apanage d'une infime minorité de la population. D'autre part des centaines d'autres mathématiciens font des choses tout aussi ésotériques dans leur coin. De telle façon que finalement, ceux qui arrivent à comprendre le genre de chose que je faisais, une chose à laquelle je me livrais intensément depuis quelques années, sont (que sais-je) peut-être cinq, dix, quinze, vingt personnes au monde, quelque chose dans ce goût-là. Alors, l'importance que peut avoir du point de vue artistique, disons, l'activité mathématique est très différente de l'importance que peut avoir, par exemple, la musique. Pour ressentir la musique, nous n'avons pas besoin d'une longue formation. En fait, nous n'avons pas même besoin d'être encore né, parce que même un embryon, dans le ventre de sa mère, réagit déjà aux stimuli musicaux. Je crois que pas mal de personnes ont dû en faire l'expérience, en tous cas ma femme l'a faite : lorsqu'il y avait une musique de jazz, alors qu'elle était enceinte depuis cinq ou six mois, le bébé dansait dans son ventre. Bien entendu, quand je parle d'art ici, je parle de l'art élémentaire, de l'art que nous pouvons apprécier, et même que nous pouvons faire chacun de nous : de la musique, du dessin, de la poterie, des choses comme cela, qui demandent une formation relativement minime.

Mais il est vrai que dans les arts, comme dans les sciences, comme dans pratiquement toute activité humaine, également dans l'activité physique, dans les sports, l'aspect de compétition prend de plus en plus d'importance. Actuellement, chez presque tous, quand on dit art, le réflexe est de penser à des gens comme Rubinstein, Gieseking ou Heifetz, ou bien comme Picasso, etc. C'est-à-dire de penser immédiatement aux grands virtuoses de l'art, ceux qui sont arrivés à une position de prestige extraordinaire. Finalement, l'art devient l'apanage d'un tout petit nombre de gens qui font de l'art pour nous, par procuration, parce que là il n'est absolument plus question que chacun de nous en fasse autant dans sa propre vie.

Or, c'est encore une des choses qu'on pourrait dire à propos de la question de ce que l'on entend par une vie qui vaut la peine d'être vécue : c'est une vie qui, précisément, contienne sa part de créativité, y compris sa part de créativité artistique. Il est beaucoup plus important que chacun de nous soit capable d'être artiste dans son propre domaine et à son propre niveau, à produire de la musique, à en exécuter, disons, sur un harmonica, sur un piano ou sur une guitare et à en retirer un plaisir direct. Ce plaisir, je crois, sera infiniment plus profond que le plaisir qu'il pourra avoir à écouter un disque de Heifetz ou de Gieseking. Il est d'une autre nature, en tous cas, il se place à un autre niveau. Peut-être que l'un n'empêche pas l'autre, ce n'est d'ailleurs pas clair. J'ai l'impression que le genre de mentalité qui règne parmi les grands virtuoses (qui leur fait exécuter, par exemple, cinq heures de gammes par jour, jour après jour) finit par tuer une grande part de la joie qu'ils ressentent à faire de la musique. Et ceci est nécessaire pour arriver à tenir le coup dans la compétition très forte qui s'exerce entre virtuoses. Je crois qu'elle est à peu près du même type que la compétition, parfois inconsciente, qu'il y a entre scientifiques. Compétition qui fait que des gens que je connais, y compris moi-même parfois, passent quinze heures de leur journée, jour après jour, pendant longtemps, à essayer de développer des théorèmes mathématiques de plus en plus sophistiqués, de plus en plus ésotériques. J'ai l'impression que ce type de mentalité disparaîtra dans les générations qui viennent.

Question :

Ne pensez-vous pas qu'il y a quelque chose de beaucoup plus, quelque soit le mode de la civilisation et qui est propre à l'homme : cette liberté troublante de se poser des questions, de se demander "Pourquoi, par exemple, les planètes tournent de cette façon autour du soleil ?" ; "Pourquoi sommes-nous malheureux ?". Cette grande liberté me paraît un peu, elle aussi, être condamnée vis-à-vis de la science. Parce que, en fait, nous avons aussi cette liberté de dire que la science est un malheur. En nous faisant prendre conscience que la science actuelle est mauvaise, vous supprimerez peut-être à l'avenir toute la liberté aux autres. Peut-être un jour la science pourrait apparaître bonne. En quelque sorte, comme un pendule, l'homme est à la fois cohabité par l'ange et le démon. Vous voudriez simplement qu'il soit habité par l'ange. J'en serais ravi, mais l'histoire humaine a montré souvent, n'est-ce pas, qu'il oscille entre le mauvais et le bien. Vous prévoyez peut-être que le pendule ira cette fois-ci du bon côté. J'espère avec vous, mais je ne sais pas si ce pendule sera arrêté à l'avenir à cette position.

Réponse :

Une de vos questions est de savoir si en tournant le dos à la science telle qu'elle se fait actuellement et, éventuellement, en retirant aux gens la liberté de se poser le genre de questions que se pose la science actuelle, on ne va pas supprimer en même temps la liberté ou une partie appréciable de la liberté.

Je voudrais dire à ce propos que moi-même et mes amis de Survivre et Vivre ne recommandons nullement de prendre des mesures coercitives qui empêcheraient qui que ce soit de faire de la science. La question n'est pas là. Si je prévois que la science, telle qu'elle est pratiquée actuellement, va dépérir, que par exemple la mathématique toute entière, à peu de choses près, va disparaître dans les générations qui viennent, c'est qu'il s'agira d'un dépérissement tout naturel parce que les gens ne se sentiront plus incités à en faire. Ainsi, pour faire un parallèle à une échelle moindre, je crois que c'était dans le premier siècle de notre ère, la science des sections hyperplanes, des sections coniques et des faisceaux de coniques était arrivée à un degré de complexité tel que les mathématiciens de cette époque pensaient que c'était la fin de la mathématique, parce que de toute façon, en allant plus loin, les choses deviendraient d'une complexité telle qu'il serait impossible à l'esprit humain de s'y reconnaître. Or il est arrivé que, purement et simplement, on a complètement laissé tomber ce genre de spéculations et la mathématique a continué dans des voies entièrement différentes et on s'aperçoit bien que la mathématique n'a pas cessé de produire du neuf jusqu'à aujourd'hui. Dans le même ordre d'idées, je pense que la direction de recherches qui s'est développé depuis 400 ans, disons, dans un certain esprit, va dépérir de la même façon et que l'esprit humain prendra des avenues très différentes. Non pas de façon coercitive, simplement parce que ce ne sera plus pratiqué. Il y aura d'autres impératifs liés à nos besoins véritables.

Je pense que l'agriculture, l'élevage, la production d'énergie décentralisée, une certaine espèce de médecine très différente de la médecine qui prévaut actuellement, vont être à l'avant plan. Il est impossible de dire quelle sera la part de joie purement créatrice dans ces développements nouveaux. J'espère que ce sera un développement créateur où il n'y aura pas de différences essentielles entre activités conceptuelles et activités physiques manuelles. Quand les hommes deviendront suffisamment maîtres de leurs besoins pour qu'une part appréciable de leur créativité reste libre (et ceci prendra un temps qu'on ne peut pas prévoir, ce sera peut-être une génération, peut-être dix, nul ne sait) à ce moment-là, n'importe qui, pas seulement une certaine élite scientifique, sera en mesure de dédier une partie importante de son temps à des recherches purement créatrices, purement spéculatives, purement ludiques. Même si on reprend certaines directions de recherches qui auraient été abandonnées entre temps, par exemple certaines directions de la mathématique actuelle ou même de la physique (si la société est prête à les prendre en charge, parce que la physique actuelle ne se fait pas simplement par la tête, elle se fait avec une instrumentation sérieuse, avec des mises de fonds, implique la mobilisation d'une énergie collective importante), à ce moment-là, je n'y vois pas d'inconvénient ; mais je crois qu'il est absolument impossible de le prévoir maintenant. En tout cas, je suis d'accord avec vous que la liberté est véritablement un critère essentiel pour les directions à prendre ; enfin, pour moi elle l'est certainement. Je pense que rien de nouveau se créera en dehors de la liberté et même, encore une fois, que le dépérissement de la science actuelle augmentera notre liberté, et ce ne sera pas aux dépens de la liberté de qui que ce soit.

A propos de votre image de l'homme ange et démon, je ne crois pas à cette dichotomie du bien et du mal. Je ne partage pas cette façon de voir ; il y a plutôt un mélange complexe de deux principes opposés. Si vous le permettez, je vais faire une petite digression philosophique concernant le mode de pensée mathématique et son influence sur la pensée générale. Une chose m'avait déjà frappé avant d'en arriver à une critique d'ensemble de la science depuis près de deux ans : c'est la grossièreté, disons, du mode de raisonnement mathématique quand on le confronte avec les phénomènes de la vie, avec les phénomènes naturels. Les modèles que nous fournit la mathématique, y compris les modèles logiques, sont une sorte de lit de Procuse pour la réalité. Une chose toute particulière aux mathématiques, c'est que chaque proposition, si l'on met à part les subtilités logiques, est ou bien vraie ou bien fausse ; il n'y a pas de milieu entre les deux, la dichotomie est totale. En fait, cela ne correspond absolument pas à la nature des choses. Dans la nature, dans la vie, il n'y a pas de propositions qui soient absolument vraies ou absolument fausses. Il y a même lieu souvent, pour bien appréhender la réalité, de prendre en ligne de compte des aspects en apparence contradictoires, en tout cas, des aspects complémentaires, et tous les deux sont importants. D'un point de vue plus élémentaire, aucune porte n'est jamais entièrement fermée ou entièrement ouverte, ça n'a pas de sens. Cette dichotomie qui provient peut-être de la mathématique, de la logique aristotélicienne, a vraiment imprégné le mode de pensée, y compris dans la vie de tous les jours et dans n'importe quel débat d'idées ou même de vie personnelle. C'est une chose que j'ai souvent remarquée en discutant avec des personnes, que ce soit en privé ou en public. En général, les personnes voient deux alternatives extrêmes et ne voient pas de milieu entre les deux. Si mon interlocuteur a choisi une certaine alternative et que j'aie une vision qui se situe au-delà de celle qu'il considère comme bonne, tout aussitôt, il m'accusera d'avoir choisi l'alternative extrême opposée, parce qu'il ne voit pas le milieu.

Je crois qu'il y a là un vice de pensée inhérent au mode de pensée mathématique et j'ai l'impression qu'il se reflète également dans cette vision manichéenne de la nature humaine. Il y a d'une part le bon, d'autre part le mauvais et dans le meilleur des cas on les voit cohabiter. J'ai l'impression que ce que nous appelons mauvais n'est qu'une réaction naturelle à un certain nombre de répressions que nous subissons depuis notre naissance ; en un sens ce sont des réactions tout aussi naturelles, tout aussi nécessaires que, par exemple, l'apparition de la fièvre signe que notre corps est en train de réagir douloureusement et positivement à une invasion microbienne. La tâche du médecin n'est pas d'éliminer la fièvre, mais d'essayer de combattre l'invasion microbienne par des médicaments. Ceci est tout au moins la thèse officielle. Peut-être la tâche du médecin de l'avenir sera-t-elle surtout de comprendre la cause psychosomatique de la prolifération microbienne à ce moment plutôt qu'à un autre, alors qu'il y a toujours des microbes dans l'environnement et alors que nous y sommes exposés tout le temps : quelles sont les causes véritables, quelles sont les tensions auxquelles nous avons été soumis et qui nous rendent vulnérables. Mais ceci est une autre paire de manches. Donc, j'ai l'impression que la vision manichéenne n'est pas très bonne. Elle fait partie de l'air que nous respirons avec la culture ambiante et je crois que cette vision va encore se modifier.

Question :

Vous pensez que cette vue du juste et du faux, c'est de l'air que nous respirons et qui vient de la mathématique. Moi, je crois plutôt le contraire. La mathématique moderne est plus jeune que toute notre philosophie médiévale ou même que la théologie. Parce que cette pensée qu'il y a le bon Dieu et le Diable, les deux adversaires, elle est très ancienne. Il se peut que les mathématiciens médiévaux du XV$^{\text{ème}}$ et du XVI$^{\text{ème}}$ siècle étaient tellement imprégnés de cette idée qu'il était naturel de penser comme cela, à propos de l'autre exemple, je pense qu'avant que la médecine n'arrive au point actuel, on essayait aussi d'expulser les mauvais esprits, le Diable. Donc, c'était la même idée. Je voulais juste émettre un doute, je le vois juste à l'envers. Je ne dirai pas que c'est un vice qui est dû à la mathématique seulement, mais je dirai qu'elle a peut-être hérité cela du passé.

Réponse :

Bourbaki n'est pas à l'origine de la mathématique ; dans ses notes historiques, Bourbaki la fait remonter aux mathématiciens Grecs, disons à partir de Pythagore. C'est donc déjà une tradition très ancienne. Prenons par exemple Euclide qui a développé cet esprit systématique de façon absolument parfaite, de telle sorte qu'il a été enseigné jusqu'à il n'y a pas tellement longtemps encore. Il est donc possible que la mathématique soit pour quelque chose dans cet état d'esprit ; même s'il n'y a pas (je ne peux pas en jurer) un effet de causalité. Enfin, le fait que les deux choses aillent dans le même sens, la dichotomie mathématique et le manichéisme ou cette tendance à ne voir toujours que les deux extrêmes d'une alternative, ça ne peut guère être le hasard ; il y a certainement corrélation entre les deux. Ce sont des choses liées dans la culture dominante. Cette culture dominante, de toute façon, ne date pas d'hier, je pense qu'elle s'est développée depuis plus de deux mille ans. Je ne suis pas très féru en histoire mais, par exemple des gens comme Jacques Ellul ou Lewis Mumford ont étudié précisément les tenants et les aboutissants idéologiques de la science et de la technologie depuis les origines ; en ce qui concerne Mumford, il me semble qu'il les situe déjà du temps de pharaons, des grands travaux de l'Egypte. Donc, je crois que nos ancêtres, à ce sujet, remontent assez loin. Mais il y avait une autre question je crois ?

Question :

Début de la question inaudible de démystification ou de dénonciation du rôle de la science et surtout la motivation du scientifique, même si cela est peut-être incomplet. Je crois par exemple qu'on pourrait discuter longtemps et noter les rôles importants qu'a, à mon avis, la science dans la conservation même des structures sociales de notre société. J'ai trouvé un peu préoccupante la sorte d'interprétation qui pouvait découler de votre exposé sur la solution qui peut être trouvée à cette difficulté. La solution de se retirer, disons, du travail qui finalement est la raison pour laquelle la société vous paye est une solution de luxe qui ne peut être accessible qu'à très peu de gens et qui ne peut pas être érigée en solution. Matériellement, un ouvrier ne peut pas se retirer du travail pour développer sa sensibilité, à mon avis, si un ouvrier ne se cultive pas, ce n'est pas parce qu'il n'en a pas envie, ou ne comprend pas quels sont les vrais problèmes ; c'est parce que le poids écrasant de la société et des rythmes de travail, des conditions de vie auxquelles il est soumis ne lui offrent aucune autre possibilité, à mon avis, ce n'est pas les symptômes qu'il faut soigner, c'est la maladie. La maladie est entièrement basée dans la structure sociale, à mon avis, c'est seulement en participant à ces changements de structure qu'on pourrait un jour envisager de trouver un rôle nouveau soit dans la sensibilité de chacun, soit un rôle nouveau de la science elle-même. Ce n'est pas en faisant un peu de théorie (ici, sur quel est le rôle de la science), qu'on pourra trouver notre place. Je crois que la participation à cette lutte est difficile pour un scientifique parce que justement la parcellisation des activités sociales la rend difficile. Je crois que la participation à cette lutte ne peut se faire qu'à partir de son poste de travail parce que le poste de travail est l'arme de tout le monde et je ne vois pas pourquoi ce serait différent pour un scientifique.

Réponse :

Je pense qu'il y a un malentendu en ce sens que vous croyez que je préconise telle ou telle solution. Or, effectivement, j'ai parlé de mon expérience personnelle, de ma pratique personnelle, à titre d'illustration d'un type d'action, de conclusions qu'on peut tirer lorsqu'on est confronté avec certaines contradictions. Toutefois, ce n'est absolument pas dans l'intention de me poser en modèle pour qui que ce soit. Je réalise bien que les conditions dans lesquelles sont placés les uns et les autres sont extrêmement différentes. D'une part les conditions dites objectives et ensuite les conditions subjectives, disons, l'état de préparation nécessaire pour prendre des décisions assez draconiennes ; comme celles que j'ai prises en quittant l'Institut dans lequel je travaillais et un peu plus tard en décidant d'arrêter la recherche scientifique. Ce qui n'empêche pas d'ailleurs, que je suis encore payé pour enseigner, l'année dernière et cette année-ci, la science très ésotérique au Collège de France et que l'an prochain je serai ou bien enseignant à la Faculté des Sciences ou bien directeur de recherches au Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS), c'est-à-dire que je n'aurai pas échappé à la contradiction de mon état scientifique.

Finalement, ce qui compte pour moi, ce n'est pas tellement d'atteindre la position de pureté morale qui est parfaitement impossible à l'intérieur de cette société (c'est une des nombreuses choses que j'ai apprises au cours de ces deux dernières années), ce qui compte c'est que nous soyons un ferment de transformations, un facteur de transformations là où nous nous trouvons. Bien entendu, si nous nous trouvons dans un certain milieu professionnel, il ne s'impose pas nécessairement que nous quittions ce milieu professionnel. Mais ce dont je suis convaincu, c'est que cette transformation ne se fera pas par la vertu magique d'adhérer à un certain parti ou, de temps en temps, de distribuer des tracts, ou encore d'adhérer à certains syndicats ou de déposer des bulletins de vote. Je suis entièrement persuadé que ce genre de transformation se fera, pour commencer, au niveau des relations personnelles. Dans la mesure où ces relations personnelles ne changeront pas profondément, rien ne changera. Si l'on pense que les relations personnelles ne peuvent changer qu'après le changement des structures (cela signifie qu'on renvoie tout au grand jour J de la révolution) la révolution ne viendra jamais ou la révolution qui viendra ne changera rien. C'est-à-dire qu'elle mettra une équipe dirigeante technocratique à la place d'une autre équipe technocratique et la société industrielle ira son chemin comme par devant.

Comme exemple de relations qui devront changer de façon radicale, je pense par exemple aux relations entre les enseignants et les étudiants. Je serai probablement confronté dès cet automne à cette situation. C'est la première fois de ma vie d'ailleurs que je serai dans un amphithéâtre avec des étudiants auxquels je devrai pour de bon enseigner les mathématiques qui vont les préparer à certains examens, leur procurer certains diplômes, dont je suis convaincu qu'ils ne servent à rien. D'une part, ils ne servent à rien pour la société dans son ensemble et d'autre part, il n'est même pas clair qu'ils servent à quelque chose à ceux qui auront ce diplôme, parce qu'il n'est absolument pas clair que cela leur permettra d'avoir un métier par la suite. Aujourd'hui encore, la plupart des scientifiques ou bien se refusent à voir le problème ou bien, s'ils le voient, posent un voile pudique par dessus dans leurs relations avec les étudiants. Les relations entre les étudiants et eux sont donc des relations traditionnelles de professeur à étudiant ; c'est-à-dire qu'ils font un cours technique, celui qu'on leur demande, un point c'est tout. Lorsque, exceptionnellement, les étudiants posent des questions techniques, on répond à ces questions techniques du mieux que l'on peut et c'est tout. En ce qui me concerne, j'ai décidé de ne pas m'en tenir à ce type de relations et de ne plus séparer l'enseignement mathématique d'une discussion cartes sur table avec des étudiants ou tous ceux qui voudront venir assister à la discussion pour essayer de faire le point : "Pourquoi est-ce que nous sommes là ?" ; "Qu'est-ce que nous allons apprendre ensemble ?" ; "Pourquoi ?" ; "Que signifie l'examen qui est au bout du programme de cette année ?" ; "Quel est son sens ?" ; "Quel est notre rôle mutuel, moi professeur et vous étudiants ?". Et enfin, décider ensemble de ce que l'on fera. Sans doute, dans les premières années, à moins que la situation ne mûrisse encore plus vite que je ne le prévois, il est probable que les étudiants, dans leur majorité, insisteront pour que, une fois ces discussions terminées, on suive plus ou moins le programme traditionnel et qu'on fasse le rituel d'usage des examens. Il est possible aussi qu'ils en décident autrement, auquel cas je me plierai à leur avis. De toute façon, il y a là la possibilité d'un échange dynamique, d'un mûrissement de l'atmosphère générale.

En fait, j'ai commencé à mettre ces idées en pratique cette année même au Collège de France où j'avais annoncé, comme première partie au cours de mathématique prévu, une discussion sur le même thème que notre discussion d'aujourd'hui. Cette proposition a donné lieu à un débat assez vif parmi mes collègues du Collège de France. Pour la grande majorité d'entre eux, c'était une chose absolument impensable qu'un cours de mathématique puisse être partiellement et officiellement consacré à une question de ce type. En fait, le titre était plus long : "Sciences et techniques dans la crise évolutionniste actuelle : allons-nous continuer la recherche scientifique ?". Je posais donc la question de la crise de civilisation qui me semble être la question urgente à débattre actuellement. Or, peut-être pour la première fois ou une des rares fois que dans cette auguste institution on pose une question véritablement brûlante pour la civilisation dans laquelle nous sommes et qu'on se propose de la discuter publiquement et en profondeur, c'est pratiquement la seule fois où le corps professoral réuni refuse de donner son approbation à ce sujet de cours. En effet, le vote a donné quelque chose comme trente-cinq voix contre et neuf voix pour et j'ai été moi-même surpris de trouver neuf collègues pour soutenir mon initiative. Cette surprise était d'ailleurs, j'en suis convaincu, beaucoup plus grande chez les trente-cinq autres. D'après le ton sur lequel avait lieu cette discussion, il était clair que, pour eux, c'était impensable qu'un scientifique dans son sens commun puisse ne pas être choqué par le genre de proposition que je faisais pour ce cours soi-disant de mathématiques.

Ceci, bien entendu, juste à titre d'exemple, non pas pour dire que tout le monde peut faire la même chose, mais à titre d'exemple concret de ce que, personnellement, j'essaie de faire pour tirer parti d'une situation simplement contradictoire. Au lieu d'essayer de cacher ces contradictions, j'essaie de les faire éclater le plus brutalement possible et ceci comme un moyen de faire mûrir une certaine situation.

Question :

Vous avez fait constamment référence à la recherche scientifique, mais j'ai l'impression que vous donnez au terme une signification trop restreinte. J'ai l'impression que pour vous ce sont les mathématiques bien sûr, ensuite la physique, quelque chose comme ça, à la rigueur la recherche médicale. Mais il me semble que vous ignorez qu'il y a la recherche en sciences sociales, la recherche en sciences de l'homme. Vous parlez en termes apocalyptiques de ce qui va arriver à la société, à la civilisation, comme si c'était quelque chose qui devait arriver fatalement et de façon incontrôlable par l'homme. Je ne suis pas d'accord avec vous parce que, précisément, les sciences de l'homme permettent de contrôler cette évolution. On peut déjà observer le travail concret des agences publicitaires pour ne pas parler de choses beaucoup plus graves que la consommation du Coca-Cola. Vous parlez en termes apocalyptiques de choses qui doivent arriver comme des choses incontrôlables pour l'homme et là je crois que vous avez tort parce que si vous voulez modifier la société dans un sens (et je suis tout à fait d'accord avec vous qu'il faut la modifier, même si je ne suis pas tout à fait certain que ce soit dans le même sens, mais en tout cas on est d'accord sur le principe), je crois au contraire qu'il faut faire cette science maudite, comme le disait le monsieur, pour pouvoir nous aussi contrôler cette évolution que vous présentez dans les caractéristiques de fatalisme. D'autre part, lorsque vous dites que vous allez discuter avec les étudiants de quels seront vos rapports avec eux, vous allez faire une science de l'homme que l'on appelle la communication pédagogique. Ce n'est pas les mathématiques, mais c'est de la science. Je crains que fatalement vous retombiez soit dans la religion, soit dans la science parce que soit vous faites des prophéties apocalyptiques soit vous essayez de faire avec vos étudiants, de réinventer des sciences qui sont déjà faites.

Réponse :

Vous parlez d'une vision apocalyptique de la civilisation et c'est un terme qui revient souvent quand on parle de la civilisation. C'est toujours ce même conditionnement qui nous fait concevoir qu'il y a une civilisation, comme s'il n'y en avait pas eu des centaines et comme s'il ne va pas y en avoir des centaines d'autres. Donc, déjà, un premier point que je voudrais remettre en place dans ma vision tout au moins : c'est qu'il s'agit d'une certaine civilisation, qu'on peut fort bien récuser d'ailleurs et dont on peut fort bien prévoir qu'elle va disparaître comme bien d'autres civilisations ont disparu. Lorsqu'il y a près de deux ans, j'envisageai la disparition de la civilisation, j'étais encore trop prisonnier de ses conditionnements : j'identifiais la civilisation, la seule que je connaissais, avec l'humanité. La destruction de cette civilisation m'apparaissait effectivement sous une image apocalyptique de fin de l'espèce humaine. Or, voici une demi-heure ou une heure, j'ai expliqué que cette vision a entièrement changé maintenant. L'écroulement de cette civilisation n'est pas une vision apocalyptique ; c'est, disons, quelque chose qui me semble hautement souhaitable. Je considère même que c'est notre grande chance qu'il existe, disons, une base biologique de la société humaine qui se refuse à suivre la voie de la civilisation industrielle dominante. Finalement, c'est la crise écologique qui va nous forcer, que nous le voulions ou non, à modifier notre cours et à développer des modes de vie et des modes de production qui soient radicalement différents de ceux en cours dans la civilisation industrielle.

D'autre part, vous parlez du rôle des sciences humaines en disant qu'il n'y a pas que les sciences dites exactes, les sciences physiques, et je le sais bien. Vous savez aussi comme moi d'ailleurs, et ça c'est une critique très sérieuse qu'on peut faire aux sciences humaines, qu'elles essaient de plus en plus de se mouler sur le modèle des sciences dites exactes, les sciences mathématiques en particulier. De telle façon que, dans la mesure où les sciences humaines veulent accéder au véritable statut scientifique (puisque seule la science d'après des normes universellement admises est considérée comme sérieuse), on enferme ces sciences humaines de plus en plus dans un jargon souvent mathématique. On connaît l'influence des tests numériques, des méthodes quantitatives, dans la psychologie par exemple. On pourrait souligner aussi que pas mal de traités d'économie, des gros traités, commencent, pour les deux tiers du livre, par l'exposé de pesants formalismes mathématiques qui ont comme seul but de les rendre incompréhensibles au commun des mortels. Un professeur d'économie de Bordeaux a dit textuellement à un de mes amis que le but de ce formalisme mathématique dans un livre de sa composition était de cacher le fait que le contenu scientifique véritable pouvait être compris par n'importe quelle personne ayant le niveau d'instruction du Certificat d'études. Ainsi, on peut faire un reproche très sérieux aux sciences humaines dans cette direction.

D'autre part les sciences humaines sont l'objet de détournements et à ce titre elles sont soumises aux mêmes critiques que les autres sciences. Par exemple, dans l'avant dernier numéro de Survivre, on donne pas mal de détails sur l'utilisation de l'anthropologie dans la guerre du Sud-Ouest Asiatique. En fait, la science anthropologique américaine est en grande partie au service des militaires : pour arriver à quadriller les populations indigènes en Asie du Sud-Ouest, pour étudier par ordinateur l'impact que pourrait avoir telle politique ou telle autre, comme de brûler les récoltes par exemple, afin de savoir si les retombées seront plus bénéfiques vis-à-vis de l'implantation américaine ou si, au contraire, le ressentiment pourrait l'emporter. Il y a donc des études comme celles-ci qui sont faites sur le terrain par des anthropologistes.

Finalement, je crois qu'il n'y a pas tellement de différences à faire du point de vue du rôle pratique et idéologique entre les sciences humaines et les sciences dites exactes, les sciences naturelles disons.

Question :

Je voudrais vous demander quels sont les buts du mouvement Survivre et quels sont les contacts que vous avez avec les mouvements existants dans la région comme le Comité *Bugey-Cobaye*.

Réponse :

Les buts du mouvement Survivre ? Au début notre vision était apocalyptique et nous avions pris pour but de lutter pour la survie de l'espèce humaine menacée par les dangers des conflits militaires et par la crise écologique provenant de la pollution et de l'épuisement des ressources naturelles. Mais au cours d'un an et demi d'existence, nous avons pas mal évolué et je pense que l'on pourrait formuler ainsi la façon dont la plupart d'entre nous voient notre but : aider à préparer le passage d'un type de civilisation à un autre par des transformations qui puissent s'effectuer dans l'immédiat. Jusqu'à maintenant, notre travail a été surtout un travail critique. Néanmoins, cela fait longtemps, plus de six mois, que nous voyons assez clairement qu'il faut arriver à dépasser le travail critique pour arriver à faire quelque chose dans une direction constructive. Par exemple, disséminer de l'information sur le mouvement communautaire, sur le développement des techniques de technologie légère, de biotechnologie, dans le sens des *Nouveaux Alchimistes* ; disséminer de l'information sur les expériences d'écoles nouvelles du type Summerhill et des choses dans ce genre-là. Mais, entre l'intention de le faire et, disons, la préparation du point de vue de l'expérience, du point de vue du contact, etc. il y a encore un pas. Je pense que cette transformation, dans le contenu du journal et notre action, se fera progressivement, au cours de l'année ou des années qui viennent. J'espère que d'ici une année par exemple, au moins une moitié des publications que nous sortirons, que ce soit journal ou autre chose, vont être dans cette direction constructive au lieu d'être purement critiques.

En ce qui concerne nos relations avec le Comité *Bugey-Cobaye*, eh bien nous sommes en bonnes relations avec eux ! Cinq membres de Survivre ont participé à la grande fête-manifestation de *Bugey-Cobaye* du mois de juin dernier. Nous sommes en relations assez suivies avec eux. On a même eu quelqu'un à la permanence devant la centrale nucléaire de Bugey pendant un mois ou deux en automne dernier. C'était un adhérent de l'Hérault, un rédacteur du Courpatier, un petit journal écologique régional de la Provence.

Du point de vue pratique, une des choses utiles que nous pouvons faire, disons, comme action spécifique, en particulier parce que nous sommes beaucoup de scientifiques à l'intérieur de Survivre et que nous sommes donc mieux placés que beaucoup d'autres, c'est de contribuer à dénoncer un certain nombre de mythes de la science et nous allons commencer vigoureusement dans ce sens à partir du n° 9 de Survivre. Son éditorial est consacré à une description critique de l'idéologie scientiste, avec pour titre "La Nouvelle Eglise Universelle".

D'autre part, nous pensons qu'un phénomène très important est en train de se passer. A savoir le nombre de plus en plus grand de personnes isolées dans leur coin ou dans leur milieu familial ou professionnel qui commencent à être conscientes de l'existence d'une véritable crise de civilisation. Elles se sentent donc isolées et de ce fait paralysées, et nous voulons contribuer à créer un réseau des connaissances entre ces gens-là. En fait, ce réseau est en train de se constituer par l'intermédiaire de toutes sortes de facteurs ; je crois que, par exemple, les articles de Fournier dans Charlie-Hebdo y contribuent et je pense que l'existence de notre groupe y contribue également. D'ailleurs, ce phénomène de création d'un réseau de liens entre des entités d'abord isolées ne concerne pas seulement les personnes mais aussi les groupes. Par exemple, pendant un bon moment, le groupe Survivre croyait être le seul de son espèce à faire une analyse critique de la science. Or nous nous sommes aperçus depuis que, un peu partout, il y a des groupes analogues qui sont en train de surgir. Nous connaissons particulièrement bien le groupe *Lacitoc* et un autre groupe aux Etats-Unis *Science for the People*. Il y a d'autres groupes qui se sont créés plus ou moins simultanément avec nous et sous le même nom *Survival* aux Etats-Unis. Ces groupes, qui sont partis chacun d'un aspect spécifique de la crise de civilisation, élargissent peu à peu leur point de départ avec toutes sortes d'autres groupes qui parfois sont partis de points très différents. J'ai l'impression que ce processus extrêmement rapide va probablement être achevé dans l'année qui vient. C'est-à-dire qu'à partir de ce moment-là, n'importe qui dans la société occidentale, tout au moins celui qui commence à sentir assez clairement que quelque chose ne va pas du point de vue de la civilisation, qui commence à être étreint par un sentiment d'incohérence dans sa propre vie (mais une incohérence qui ait une signification globale), d'emblée il lui sera impossible d'être isolé, il trouvera immédiatement à se placer dans ce réseau. C'est un processus auquel un groupe comme le nôtre peut très bien contribuer. Ce sont des choses assez modestes, disons, chacun le fait dans sa propre sphère d'activités, mais comme il y a beaucoup de personnes et de groupes qui le font, l'effet global n'est absolument pas négligeable.

“Responsabilité du savant dans le monde d’aujourd’hui. Le savant et l’appareil militaire”
Alexander Grothendieck, Faculté des sciences de Paris, 15.12.1970

Ce texte reproduit, approximativement, la présentation d’Alexandre Grothendieck par lui-même au cours de la discussion publique “Le travailleur scientifique et la machine sociale”, qui a eu lieu à la faculté des sciences de Paris (Paris-VI), le mardi 15 décembre 1970, avec la participation du comité Survivre.

Il est assez peu courant que des scientifiques se posent la question du rôle de leur science dans la société. J’ai même l’impression très nette que plus ils sont haut situés dans la hiérarchie sociale et plus par conséquent ils se sont identifiés à l’establishment, ou moins ils sont contents de leur sort et moins ils ont tendance à remettre en question cette religion qui nous a été inculquée dès les bancs de l’école primaire : toute connaissance scientifique est bonne, quel que soit son contexte ; tout progrès technique est bon. Et comme corollaire : la recherche scientifique est toujours bonne. Aussi les scientifiques, y compris les plus prestigieux, ont-ils généralement une connaissance de leur science exclusivement “de l’intérieur”, plus éventuellement une connaissance de certains rapports administratifs de leur science avec le reste du monde. Se poser une question comme : la science actuelle en général, ou mes recherches en particulier, sont-elles utiles, neutres ou nuisibles à l’ensemble des hommes ? Cela n’arrive pratiquement jamais, la réponse étant considérée comme évidente par les habitudes de pensée enracinées depuis l’enfance et léguées depuis des siècles. Pour ceux d’entre nous qui sommes des enseignants, la question de la finalité de l’enseignement, ou même simplement celle de son adaptation aux débouchés, est tout aussi rarement posée.

Pas plus que mes collègues, je n’ai fait exception à la règle. Pendant près de vingt-cinq ans, j’ai consacré la totalité de mon énergie intellectuelle à la recherche mathématique, tout en restant dans une ignorance à peu près totale sur le rôle des mathématiques dans la société, c’est-à-dire pour l’ensemble des hommes, sans même m’apercevoir qu’il y avait là une question qui méritait qu’on se la pose ! La recherche avait exercé sur moi une grande fascination, et je m’y étais lancé dès que j’étais étudiant, malgré l’avenir incertain que je prévoyais comme mathématicien, alors que j’étais étranger en France. Les choses se sont aplanies par la suite : j’ai découvert l’existence du CNRS et j’y ai passé huit années de ma vie, de 1950 à 1958, toujours émerveillé à l’idée que l’exercice de mon activité favorite m’assurait en même temps la sécurité matérielle, plus généreusement d’ailleurs d’année en année. Depuis 1959, j’ai été professeur à l’Institut des hautes études scientifiques (IHES), qui est un petit institut de recherche pure créé à ce moment, subventionné à l’origine uniquement par des fonds privés (industries). Avec mes quelques collègues, j’y jouissais de conditions de travail exceptionnellement favorables, comme on n’en trouve guère ailleurs qu’à l’Institute for Advanced Study, à Princeton, qui avait d’ailleurs servi de modèle à l’IHES. Mes relations avec les autres mathématiciens (comme, dans une large mesure, celles des mathématiciens entre eux) se bornaient à des discussions mathématiques sur des questions d’intérêts communs, qui fournissaient un sujet inépuisable. N’ayant eu d’autre enseignement à donner qu’au niveau de la recherche, avec des élèves préparant des thèses, je n’avais guère eu l’occasion d’être directement confronté aux problèmes de l’enseignement ; d’ailleurs, comme la plupart de mes collègues, je considérais que l’enseignement au niveau élémentaire était une diversion regrettable dans l’activité de recherche, et j’étais heureux d’en être dispensé.

Heureusement, il commence à y avoir une petite minorité de scientifiques qui se réveillent plus ou moins brutalement de l’état de quiétude parfaite que je viens de décrire. En France, le mois de mai 1968 a été dans ce sens un puissant stimulant sur beaucoup de scientifiques ou d’universitaires. Le cas de Claude Chevalley est à ce sujet particulièrement éloquent. Pour moi, ces événements m’ont fait prendre conscience de l’importance de la question de l’enseignement universitaire et de ses relations avec la recherche, et j’ai fait partie d’une commission de travail à la faculté des sciences d’Orsay, chargée de mettre au point des projets de structure (nos conclusions tendant à une distinction assez nette entre le métier d’enseignant et celui de chercheur ont été d’ailleurs battues en brèche avec une rare unanimité par les assistants et les professeurs, et les rares étudiants qui se sont mêlés aux débats). Cependant, n’étant pas enseignant, ma vie professionnelle n’a été en rien modifiée par le grand brassage idéologique de Mai 68.

Néanmoins, depuis environ une année, j’ai commencé à prendre conscience progressivement de l’urgence d’un certain nombre de problèmes, et depuis fin juillet je consacre la plus grande partie de mon temps en militant pour le mouvement Survivre, fondé en juillet à Montréal. Son but est la lutte pour la survie de l’espèce humaine, et même de la vie tout court, menacée par le déséquilibre écologique croissant causé par

Texte consultable ici https://agone.org/revueagone/agone41et42/enligne/10/index.htmldebut-chapitre une utilisation indiscriminée de la science et de la technologie et par des mécanismes sociaux suicidaires, et menacée également par des conflits militaires liés à la prolifération des appareils militaires et des industries d'armement. Les questions soulevées dans le petit tract qui a annoncé la réunion d'aujourd'hui font partie de la sphère d'intérêt de Survivre, car elles nous semblent liées de façon essentielle à la question de notre survie. On m'a suggéré de raconter ici comment s'est faite la prise de conscience qui a abouti à un bouleversement important de ma vie professionnelle et de la nature de mes activités.

Pour ceci, je devrais préciser que, dans mes relations avec la plupart de mes collègues mathématiciens, il y avait un certain malaise. Il provenait de la légèreté avec laquelle ils acceptaient des contrats avec l'armée (américaine le plus souvent), ou acceptaient de participer à des rencontres scientifiques financées par des fonds militaires. En fait, à ma connaissance, aucun des collègues que je fréquentais ne participait à des recherches de nature militaire, soit qu'ils jugent une telle participation comme répréhensible, soit que leur intérêt exclusif pour la recherche pure les rendent indifférents aux avantages et au prestige qui est attaché à la recherche militaire. Ainsi, la collaboration des collègues que je connais avec l'armée leur fournit un surplus de ressources ou des commodités de travail supplémentaires, sans contrepartie apparente sauf la caution implicite qu'ils donnent à l'armée.

Cela ne les empêche d'ailleurs pas de professer des idées “de gauche” ou de s'indigner des guerres coloniales (Indochine, Algérie, Viêt Nam) menées par cette même armée dont ils recueillent volontiers la manne bienfaisante. Ils donnent généralement cette attitude comme justification de leur collaboration avec l'armée puisque, d'après eux, cette collaboration “ne limitait en rien” leur indépendance par rapport à l'armée, ni leur liberté d'opinion. Ils se refusent à voir qu'elle contribue à donner une auréole de respectabilité et de libéralisme à cet appareil d'asservissement, de destruction et d'avilissement de l'homme qu'est l'armée.

Il y avait là une contradiction qui me choquait. Cependant, habitué depuis mon enfance aux difficultés qu'il y a à convaincre autrui sur des questions morales qui me semblent évidentes, j'avais le tort d'éviter les discussions sur cette question importante et je me cantonnais dans le domaine des problèmes purement mathématiques, qui ont ce grand avantage de faire aisément l'accord des esprits.

Cette situation a continué jusqu'au mois de décembre 1969, où j'appris fortuitement que l'IHES était depuis trois ans financé partiellement par des fonds militaires. Ces subventions d'ailleurs n'étaient assorties d'aucune condition ou entrave dans le fonctionnement scientifique de l'IHES ; et elles n'avaient pas été portées à la connaissance des professeurs par la direction - ce qui explique mon ignorance à leur sujet pendant si longtemps. Je réalise maintenant qu'il y avait eu négligence de ma part, et que vu ma ferme détermination à ne pas travailler dans une institution subventionnée pas l'armée il m'appartenait de me tenir informé sur les sources de financement de l'institution où je travaillais.

Quoi qu'il en soit, je fis aussitôt mon possible pour obtenir la suppression des subventions militaires de l'IHES. De mes quatre collègues, deux étaient en principe favorables au maintien de ces subventions, un autre était indifférent, un autre hésitant sur la question de principe.

Tout compte fait, tous quatre auraient préféré la suppression des subventions militaires plutôt que mon départ. Ils firent même une démarche en ce sens auprès du directeur de l'IHES, contredites peu après par des démarches contraires de deux de ces collègues. Aucun d'eux n'était disposé à appuyer à fond mon action, ce qui aurait certainement suffi à obtenir gain de cause. Il est inutile d'entrer ici dans le détail des péripéties qui ont abouti à me convaincre qu'il était impossible d'obtenir une quelconque garantie que l'IHES ne serait pas subventionné par des fonds militaires à l'avenir. Cela m'a conduit à quitter cet institut au mois de septembre. Pour l'année académique 1970-1971, je suis professeur associé au Collège de France.

Après quelques semaines d'amertume et de déception, j'ai réalisé qu'il est préférable pour moi que l'issue ait été telle que je l'ai décrite. En effet, lorsqu'il semblait à un moment donné que la situation “allait s'arranger”, je me disposais déjà à retourner entièrement à des efforts purement scientifiques. C'est de m'être vu dans une situation où j'ai dû abandonner une institution dans laquelle j'avais donné le meilleur de mon œuvre mathématique (et dont j'avais été le premier, avec J. Dieudonné, à fonder la réputation scientifique) qui m'a donné un choc d'une force suffisante pour m'arracher à mes intérêts purement spéculatifs et scientifiques, et pour m'obliger, après des discussions avec de nombreux collègues, à prendre conscience du principal problème de notre temps, celui de la survie, dont l'armée et les armements ne sont qu'un des nombreux aspects. Ce dernier m'apparaît encore comme le plus flagrant du point de vue moral, mais non comme le plus fondamental pour l'analyse objective des mécanismes qui sont en train d'entraîner l'humanité vers sa propre destruction.