Problème de géométrie résolu par l'analyse de Diophante

par
M. L. Euler

Présenté à la Conférence le 4 Mars 1782

---

§. 1.

Le sujet du problème dont il s'agit dans ce mémoire, est tiré de la Trigonométrie rationnelle. On demande les trois côtés x, y, z, d'un triangle dont les lignes tirées des angles par le centre de gravité du triangle soyent toutes trois exprimées en nombres rationnels ; c'est-à-dire : on demande trois nombres x, y, z, tels que

$$\begin{array}{l} 2xx \ + \ 2yy \ - \ zz = \square \\ 2yy \ + \ 2zz \ - \ xx = \square \\ 2zz \ + \ 2xx \ - \ yy = \square. \end{array}$$

J'ai déjà donné, à différentes reprises, des solutions de ce problème, sans qu'aucune m'ait entièrement satisfait. Celle que je présente ici réunit, à beaucoup d'élégance, la plus grande généralité. Mais avant d'entrer en matière il sera bon de faciliter la solution par le Lemme suivant :

Lemme.

§. 2. Deux nombres de la forme :

$$A^2 + 2PAB + B^2 \qquad \text{et} \qquad A^2 + 2QAB + B^2,$$

seront toujours quarrés, lorsque

$$A = 4(P + Q) \qquad \text{et} \qquad B = (P - Q)^2 - 4.$$

Démonstration.

Multiplions l'une de ces formes par l'autre, et nous aurons le produit suivant :

$$A^4 + 2(P + QA^3B + 2(2PQ + 1)A^2B^2 + 2(P + Q)AB^3 + B^4.$$

Soit la racine de cette quantité quarrée

$$A^2 + (P + Q)AB - B^2,$$

et puisque le quarré est

$$A^4 + 2(P + Q)A^3B + [(P + Q)^2 - 2]A^2B^2 - 2(P + Q)AB^3 + B^4,$$

Transcription en LaTex d'un article trouvable à l'adresse
https://scholarlycommons.pacific.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1753context=euler-works
référence E754 dans la page
https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/index.8.html,
Denise Vella-Chemla, février 2021.

en comparant cette forme avec la précédente on voit que, pour que l'une soit égale à l'autre, il faut que

$$((P-Q)^2-4)A = 4(P+Q)B,$$

donc $A = 4(P+Q)$ et $B = (P-Q)^2 - 4$.

Substituant ces valeurs dans l'une ou l'autre des deux formes du lemme, elle devient un quarré. Par exemple la première, en y faisant ces substitutions, deviendra :

$$16(P+Q)^2 + 2P[4(P+Q)(P-Q)^2 - 16(P+Q)] + (P-Q)^4 - 8(P-Q)^2 + 16,$$

où il faut remarquer que

$$\begin{aligned}&(P-Q)^4 + 8P(P+Q)(P-Q)^2 = (P-Q)^2 - 3P + Q)^2,\\ &16(P+Q)^2 + 32P(P+Q) - 8(P-Q) = -8(P-Q)(3P+Q).\end{aligned}$$

De cette façon la forme se réduit à

$$((P-Q)(3P+Q)-4)^2.$$

Or le produit des deux formes du lemme étant un quarré et la première l'étant aussi, il est clair que l'autre forme doit être nécessairement de même un quarré. Aussi la racine se trouvera-t-elle, par des procédés semblables, être $(Q-P)(3Q+P)-4$.

Corollaire.

§. 3. À l'égard des valeurs de A et B il faut remarquer :
1°) qu'à cause de la permutabilité évidente de ces deux quantités, on pourra aussi faire :

$$A = (P-Q)^2 - 4 \qquad \text{et} \qquad B = 4(P+Q);$$

2°) que ces valeurs peuvent être simplifiées dans certains cas. Car puisque $(P-Q)^2 = (P+Q)^2 - 4PQ$, en mettant cette valeur dans l'expression de B, on aura $B = (P+Q)^2 - 4(PQ+1)$, de sorte que, toutes les fois que $PQ+1 = n(P+Q)$, on pourra diviser A et B par le même nombre $P+Q$, et on aura $A = 4$ et $B = P+Q-4n$. Quant au racines des deux formes proposées, savoir

$$(P-Q)(3P+Q)-4 \qquad \text{et} \qquad (Q-P)(3Q+P)-4,$$

comme la première peut être représentée par

$$(P+Q)(P-Q) + 2P(P-Q) - 4,$$

et que $2P(P-Q) - 4 = 2P(P+Q) - 4(PQ+1)$ à cause de $PQ+1 = n(P+Q)$, on pourra diviser par $P+Q$, de sorte que la racine de la première forme $= 3P - Q - 4n$, et, à cause de la permutabilité de P et Q la racine de l'autre forme sera $3Q - P - 4n$.

Solution du Problème proposé.

§. 4. Soit

$$\begin{aligned}2xx + 2yy - zz &= pp\\ 2xx + 2zz - yy &= qq\\ 2yy + 2zz - xx &= rr\end{aligned}$$

et en mettant $xx + yy + zz = s$, on aura

$$pp + 3zz = qq + 3yy = rr + 3xx = 2s.$$

Ensuite on trouve aussi que

$$\begin{aligned}2pp + 2qq - rr &= 9xx\\ 2pp + 2rr - qq &= 9yy\\ 2qq + 2rr - pp &= 9zz.\end{aligned}$$

Quoique ces propriétés ne contribuent en aucune manière à la solution du problème, elles méritoient bien d'être remarquées ici en passant. Quant à la solution même, elle se déduit des opérations suivantes :

§. 5. Prenons la différence de la première et seconde de nos trois équations fondamentales, qui sera

$$pp - qq = 3(yy - zz),$$

ou bien, en facteurs on aura

$$(p + q)(p - q) = 3(y + z)(y - z).$$

Soit

$$p + q = \frac{3a}{b}(y - z)$$

$$p - q = \frac{b}{a}(y + z)$$

et la somme des quarrés sera ;

$$(p + q)^2 + (p - q)^2 = 2pp + 2qq = \frac{9aa}{bb}(y - z)^2 + \frac{bb}{aa}(y + z)^2.$$

Or les équations fondamentales donnent

$$\begin{aligned}2pp + 2qq &= 8xx + 2yy + 2zz, \text{ ou bien}\\ 2pp + 2qq &= 8xx + (y + z)^2 + (y - z)^2,\end{aligned}$$

d'où l'on tire cette équation entre x, y, z :

$$\frac{9aa}{bb}(y - z)^2 + \frac{bb}{aa}(y + z)^2 = 8xx + (y + z)^2 + (y - z)^2,$$

qui peut aussi être représentée ainsi :

$$8xx = \frac{9aa - bb}{bb}(y - z)^2 + \frac{bb - aa}{aa}(y + z)^2.$$

§. 6. La troisième équation fondamentale $2yy - 2zz - xx = rr$ se transforme aisément en celle-ci :

$$(y + z)^2 + (y - z)^2 - xx = rr,$$

qui multipliée par 8 devient :

$$8rr = 8(y+z)^2 + 8(y-z)^2 - 8xx$$

équation qui, si l'on met à la place de $8xx$ la valeur trouvée au précédent §, sera

$$8rr = \frac{9(bb-aa)}{bb}(y-z)^2 + \frac{9aa-bb}{aa}(y+z)^2.$$

§. 7. Mettons maintenant

$$y+z = a(c+d)\ ;$$
$$y-z = b(c-d)\ ;$$

et les deux expressions trouvées pour $8xx$ et $8rr$ prendront les formes suivantes :

$$2xx = 2aa(cc+dd) + cd(bb-5aa)\ ;$$
$$2rr = 2bb(cc+dd) + cd(9aa-5bb)\ ;$$

qui, divisées l'une par $2aa$ et l'autre par $2bb$, donneront :

$$\frac{xx}{aa} = cc + dd + \frac{bb-5aa}{2aa}\ .\ cd\ ;$$

$$\frac{rr}{bb} = cc + dd + \frac{9aa-5bb}{2bb}\ .\ cd.$$

§. 8. En comparant ces deux expressions avec les formes du lemme, nous verrons que $A = c, B = d$,

$$P = \frac{bb-5aa}{4aa} \qquad \text{et} \qquad Q = \frac{9aa-5bb}{4bb}.$$

De ces valeurs on déduit aisément :

$$n(P+Q) = \frac{n(b^4 - 10aabb + 9a^4)}{4aabb}\ ;$$

$$PQ + 1 = -\frac{5}{4}\frac{(b^4 - 10aabb + 9a^4)}{4aabb}\ ;$$

donc

$$n = -\frac{5}{4}.$$

§. 9. Or en vertu du corollaire §. 3., il y a $A = 4$ et $B = P + Q - 4n$, donc $c = 4$ et $d = \dfrac{(9aa+bb)(aa+bb)}{4aabb}$, portant

$$y+z = \frac{a(16aabb + (9aa+bb)(aa+bb))}{4aabb}\ ;$$

$$y-z = \frac{b(16aabb - (9aa+bb)(aa+bb))}{4aabb}\ ;$$

Et puisque, en vertu du même corollaire,

$$\frac{x}{a} = 3P - Q - 4n \qquad \text{et} \qquad \frac{r}{b} = 3Q - P - 4n,$$

nous aurons aussi

$$x = \frac{a((9aa+bb)(aa+bb) - 2(9a^4 - b^4))}{4aabb} \; ;$$

$$r = \frac{b((9aa+bb)(aa+bb) - 2(9a^4 - b^4))}{4aabb} \; ;$$

Enfin on aura

$$p+q = \frac{3a}{b}(y-z) \; ;$$

$$p-q = \frac{b}{a}(y+z) \; .$$

§. 10. Mettons pour abréger

$$\begin{aligned} &C = 16aabb \; ; \\ &D = (9aa+bb)(aa+bb) \; ; \\ &F = 2(9a^4 - b^4) \; ; \end{aligned}$$

et en supprimant le diviseur. commun $4aabb$, nous aurons

$$\begin{array}{r||r} x = a(D-F) & r = b(D+F) \\ y+z = a(C+D) & p+q = 3a(C-D) \\ y-z = b(C-D) & p-q = b(C+D) \end{array}$$

Exemple 1.

§. 11. Soit $a = 1$ et $b = 2$, et on aura $C = 64$, $D = 65$, $F = -14$, donc

$$\begin{array}{r||r} x = 79 & r = 102 \\ y+z = 129 & p+q = -3 \\ y-z = -2 & p-q = 258 \end{array}$$

par conséquent on aura

$$\begin{array}{r||r} x = 79 & p = \dfrac{255}{2} \\ y = \dfrac{127}{2} & q = \dfrac{-261}{2} \\ z = \dfrac{131}{2} & r = 102 \end{array}$$

Exemple 2.

§. 12. Soit $a = 2$ et $b = 1$, de sorte que $C = 64$, $D = 185$ et $F = 286$, donc

$$\begin{array}{r||r} x = -202 & r = +471 \\ y+z = +498 & p+q = -726 \\ y-z = -121 & p-q = +249 \end{array}$$

On aura donc

$$\begin{array}{r||l} x = 202 & p = \dfrac{477}{2} \\[2ex] y = \dfrac{377}{2} & q = \dfrac{975}{2} \\[2ex] z = \dfrac{619}{2} & r = 471 \end{array}$$

§. 13. Si l'on veut avoir des solutions en nombres entiers, il est évident qu'on n'a qu'à multiplier par 2 tous les six nombres de chacun des deux exemples précédents. En voilà encore quelques solutions :

$$\begin{array}{rrr} 68 & 87 & 85 \\ 158 & 127 & 131 \\ \hline 159 & 325 & 314 \\ 619 & 377 & 404 \\ \hline 477 & 277 & 446 \\ 569 & 881 & 640 \end{array}$$

Une solution plus facile d'un problème diophantien à propos de triangles, dont les droites tirées des sommets bissectant les côtés opposés peuvent être exprimées rationnellement

Leonhard Euler

1. Les côtés d'un triangle ayant été placés de telle façon que $AB = 2c$, $AC = 2b$ et $BC = 2a$, si l'on appelle les bissectrices $AX = x$, $BY = y$ et $CZ = z$, il est clair du fait de la géométrie des carrés que ces trois droites peuvent s'exprimer de la façon suivante :

$$xx = 2bb + 2cc - aa$$
$$yy = 2cc + 2aa - bb$$
$$zz = 2aa + 2bb - cc,$$

et que ces équations peuvent ainsi être satisfaites par des nombres rationnels.

2. À partir de ces 3 équations, on génère ces 3 autres :

$$\text{I.}\quad xx - yy = 3(bb - aa)$$
$$\text{II.}\quad xx + yy = 4cc + aa + bb$$
$$\text{III.}\quad zz = 2aa + 2bb - cc.$$

On gère ces équations de la manière suivante.

3. On commence avec les premières équations, et de façon à éviter les fractions, on pose $xx - yy = 3(bb - aa) = 12fg(pp - qq)$; de là, avec ceci $bb - aa = 4fg(pp - qq)$, on obtient que $b+a = 2f(p+q)$ et que $b-a = 2g(p-q)$, d'où on tire $b = (f+g)p+(f-g)q$ et $a = (f-g)p+(f+g)q$. En effet, avec l'équation précédente $xx - yy = 12fg(pp - qq)$, on prend $x + y = 6g(p + q)$ et $x - y = 2f(p - q)$, d'où on peut obtenir que $x = (3g + f)p + (3g - f)q$ et $y = (3g - f)p + (3g + f)q$.

4. On gère maintenant la seconde équation :

$$xx + yy = 4cc + aa + bb,$$

et avec les valeurs qui viennent d'être déterminées, on découvre que :

$$xx + yy = 2(9gg + ff)(pp + qq) + 4(9gg - ff)pq.$$

Alors, en effet, on aura :

$$bb + aa = 2(ff + gg)(pp + qq) + 4(ff - gg)pq.$$

Délivré à l'Académie de St.-Pétersbourg le 12 août 1779. Publié initialement sous le titre *Solutio facilior problematis Diophantei circa triangulum, in quo rectae ex angulis latera opposita bisecantes rationaliter exprimantur*, Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg **2** (1810), 10-16, et réimprimé dans les *Leonhard Euler, Opera Omnia*, Série 1 : Opera mathematica, Volume 4, Birkhäuser, 1992. On peut trouver une copie du texte original dans le site Euler Archive, à l'adresse https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/. Cet article est référencé E732 dans l'index de Eneström.

Date de traduction en anglais : 2 mars 2005.

Traduit par Jordan Bell, en seconde année de Honours Mathematics, School of Mathematics and Statistics, Carleton University, Ottawa, Ontario, Canada.

Traduction effectuée sous la direction du Dr. B. Mortimer.

Consultable ici https://arxiv.org/abs/math/0503052.

Traduction de l'anglais au français : Denise Vella-Chemla, janvier 2021.

Par conséquent, avec ceci $4cc = xx + yy - (bb + aa)$, on aura :

$$4cc = 16gg(pp + qq) + (40gg - 8ff)pq,$$

grâce à quoi on obtient $cc = 4gg(pp + qq) + (10gg - 2ff)pq$, de telle façon que cette formule doit être transformée en un carré.

5. De là, la troisième équation est traitée, c'est $zz = 2(aa + bb) - cc$, dont on tire $2(aa + bb) = 4(ff + gg)(pp + qq) + 8(ff - gg)pq$ et $cc = 4gg(pp + qq) + (10gg - 2ff)pq$ et cela donnera

$$zz = 4ff(pp + qq) + (10ff - 18gg)pq,$$

qui est ainsi une autre formule que nous devons réduire à un carré.

6. Nous divisons la première de ces deux équations par $4gg$ et la dernière par $4ff$, de façon à pouvoir obtenir les formules suivantes, réduites à des carrés :

$$\frac{cc}{4gg} = pp + qq + 2pq\left(\frac{5gg - ff}{4gg}\right)$$
$$\frac{zz}{4ff} = pp + qq + 2pg\left(\frac{5ff - 9gg}{4ff}\right).$$

7. Pour abréger, on pose ici $\dfrac{5gg - ff}{4gg} = m$ et $\dfrac{5ff - 9gg}{4ff} = n$, de telle façon que maintenant le problème global est ramené à la résolution de ces deux formules :

$$\frac{cc}{4gg} = pp + qq + 2mpq = tt$$
$$\frac{zz}{4ff} = pp + qq + 2npq = uu,$$

et avec ça, nous aurons $c = 2gt$ et $z = 2fu$. À ce point, pour réduire ces deux formules à des carrés, il faut que $tt - uu = 2(m - n)pq$, et pour rendre ça pratique, on permet de traiter cela de telle façon que $t + u = (m - n)p$ et $t - u = 2q$, dont on tire $t = \frac{1}{2}(m - n)p + q$ et $u = \frac{1}{2}(m - n)p - q$.

8. Mais si l'on substitue ces valeurs à celles de t et u, il vient que les carrés apparaissent simultanément des deux côtés de l'équation :

$$pp\left(1 - \frac{1}{4}(m - n)^2\right) + (m + n)pq = 0,$$

et quand cette équation est divisée par p, on obtient :

$$p\left(1 - \frac{1}{4}(m - n)^2\right) + (m + n)q = 0,$$

d'où découle librement le rapport entre les lettres p et q : $\dfrac{p}{q} = \dfrac{4(m + n)}{(m - n)^2 - 4}$, en vertu de quoi on pourra prendre $p = 4(m + n)$ et $q = (m - n)^2 - 4$, ou des multiples équivalents, de telle façon qu'on peut en général prendre $p = 4(m + n)M$ et $q = ((m - n)^2 - 4)N$, et de cette façon, toutes les conditions sont pleinement satisfaites.

9. Maintenant qu'on a géré les lettres p et q, ce sera de $t = 2(m + n)(m - n) + (m - n)^2 - 4 = (m - n)(3m + n) - 4$ et $u = (m - n)(m + 3n) + 4$ dont comme précédemment on inférera ces déterminations :

$$c = 2g(m-n)(3m+n) - 8g \quad \text{et}$$
$$z = 2f(m-n)(m+3n) + 8f.$$

De plus, il est utile de sommer à la place de p et q leur valeur du § 7, de telle façon qu'on ait $c = g(m-n)p + 2gq$ et $z = f(m-n)p - 2fq$.

10. Maintenant on peut construire une solution à notre problème de la façon suivante :

1) Les lettres f et g sont librement choisies, à partir desquelles les lettres m et n peuvent être définies au moyen des formules $m = \frac{5gg - ff}{4ff}$ et $n = \frac{5ff - 9gg}{4ff}$.

2) Maintenant, comme précédemment, les lettres p et q sont recherchées grâce aux formules $p = 4(m+n)$ et $q = (m-n)^2 - 4$, grâce auxquelles on peut exprimer les droites bissectant les côtés du triangle de la manière ci-après.

3) Bien sûr, les côtés sont trouvés avec ces formules :

$$a = (f-g)p + (f+g)q$$
$$b = (f+g)p + (f-g)q$$
$$c = 2g(m-n)(3m+n) - 8g = g(m-n)p + 2gq$$

4) Par conséquent, finalement, les droites bissectrices elles-mêmes seront obtenues :

$$x = (3g+f)p + (3g-f)q$$
$$y = (3g-f)p + (3g+f)q$$
$$z = 2f(m-n)(m+3n) + 8f = f(m-n)p - 2fg.$$

11. De façon à pouvoir illustrer cela par un exemple, supposons que $f = 2$ et $g = 1$, et on obtiendra alors $m = \frac{1}{4}$ et $n = \frac{11}{16}$. De cela comme précédemment, on obtiendra que $p = \frac{15}{4}$ et $q = -\frac{975}{256}$, dont les valeurs, pour être réduites à des nombres entiers, peuvent être $p = 64$ et $q = -65$. Alors notre triangle sera déterminé ainsi :

$$a = 131; b = 127; c = 158; \quad \text{alors en effet,}$$
$$x = 255; y = 261; z = 204.$$

12. À cette occasion, comme cela a été noté pour l'exemple, il sera utile maintenant également de dénoter les côtés par les lettres x, y, z, en ayant en général :

$$2xx - 2yy - zz = 9cc$$
$$2yy + 2zz - -xx = 9aa$$
$$2zz + 2xx - yy = 9bb,$$

d'où il découle, en réduisant par 3 les nombres correspondant à x, y, z, que l'on obtient un triangle très simple, dont les côtés sont de longueurs 136, 170, 174.

13. À ce point, en ayant $m = \frac{5gg - ff}{4gg}$ et $n = \frac{5ff - 9gg}{4ff}$, on obtiendra d'abord

$$m + n = \frac{10ffgg - f^4 - 9g^4}{4ffgg} = -\frac{(gg-ff)(9gg-ff)}{4ffgg}.$$

Alors en effet, on aura $m-n=\dfrac{9g^4-f^4}{4ffgg}=\dfrac{(3gg+ff)(3gg-ff)}{4ffgg}$, dont on obtiendra que

$$m-n+2=\frac{9g^4+8ffgg-f^4}{4ffgg}=\frac{(gg+ff)(9gg-ff)}{4ffgg}$$

et

$$m-n-2=\frac{9g^4-8ffgg-f^4}{4ffgg}=\frac{(gg-ff)(9gg+ff)}{4ffgg}.$$

Au moyen de cela, ajouté au fait qu'on a trouvé que $p=4(m+n)M$, on aura alors :

$$p=-\frac{(gg-ff)(9gg-ff)M}{4ffgg} \quad \text{et,}$$
$$q=((m-n)^2-4)M=\frac{(g^4-f^4)(81g^4-f^4)}{16f^4g^4}M.$$

14. Alors on réduit le rapport des lettres p et q aux termes minimum, et on prend $M=\dfrac{16f^4g^4}{(gg-ff)(9gg-ff)}$, et il découle de cela que $p=-16ffgg$ et $q=(gg+ff)(9gg+ff)$. De cela, parce qu'on avait $t=\dfrac{1}{2}(m-n)p+q$, il découle maintenant que

$$t=(gg+ff)(9gg+ff)-2(3gg+ff)(3gg-ff).$$

De façon similaire, on aura $u=\dfrac{1}{2}(m-n)p-q$, dont on déduira que :

$$u=-(gg+ff)(9gg+ff)-2(3gg+ff)(3gg-ff).$$

Alors, à cause de cela, découlera que $c=2gt$ et $z=2fu$.

15. Pour les variables restantes, on aura d'abord $a+b=2f(p+q)$ et $b-a=2g(p-q)$; alors en effet, on aura $x+y=6g(p+q)$ et $x-y=2f(p-q)$.

Cela ne pose pas de problèmes de résoudre de nombreux exemples juste au moyen de ces formules, jusqu'à ce qu'on obtienne des entiers ; puisqu'ils sont à tout point de vue déterminés par le rapport de nombres entiers f et g, on peut toujours supposer que ceux-ci sont des entiers.

16. On obtiendra $f=1$ et $g=2$, et $p=-64$ et $q=185$.

Par conséquent, on aura $t=-101$ et $u=-471$; alors en effet $c=-404$ et $z=-942$. Pour être sûr, comme précédemment, on aura $b-a=-996$ et $b+a=+242$; $x+y=1452$ et $x-y=-498$. Il en découlera par conséquent que :

$$a=619; b=377; c=404$$
$$x=477; y=975; z=942.$$

On observe que les nombres x,y,z peuvent être utilisés plutôt que a,b,c, en divisant ceux-ci par 3, de telle façon que l'on obtient :

$$a=159; b=325; c=314, \quad \text{et on aura alors également,}$$
$$x=619; y=377; z=404.$$

Un théorème arithmétique et sa démonstration

Leonhard Euler

J'ai précédemment communiqué à des collègues le théorème que je propose et démontre ici, il a été jugé très digne de mériter attention, spécialement car sa démonstration n'est pas évidente du tout, et il est possible que plusieurs aient cherché à le démontrer en vain [1]. J'énonce le théorème de la façon suivante : [2]

Si plusieurs nombres différents sont donnés a, b, c, d etc., et que l'on forme à partir d'eux des fractions dont le numérateur commun est 1, et que ces fractions sont telles que le dénominateur de chacune est le produit de toutes les différences d'un nombre et de chacun des nombres restants, de telle façon que les fractions sont

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)(a-d)\text{ etc.}}, \quad \frac{1}{(b-a)(b-c)(b-d)\text{ etc.}}, \quad \frac{1}{(c-a)(c-b)(c-d)\text{ etc.}} \text{ etc.},$$

alors la somme de toutes ces fractions est toujours égale à 0.

Ainsi par exemple pour les nombres donnés $2, 5, 7, 8$, les quatre fractions

$$\frac{1}{-3\cdot-5\cdot-6}, \quad \frac{1}{3\cdot-2\cdot-3}, \quad \frac{1}{5\cdot 2\cdot-1}, \quad \frac{1}{6\cdot 3\cdot 1}$$

sont écrites ainsi, et se réduisent à

$$-\frac{1}{3\cdot 5\cdot 6}, \quad +\frac{1}{3\cdot 2\cdot 3}, \quad -\frac{1}{5\cdot 2\cdot 1}, \quad +\frac{1}{6\cdot 3\cdot 1},$$

et par la force du théorème

$$-\frac{1}{90}+\frac{1}{18}-\frac{1}{10}+\frac{1}{18}=0.$$

Pour ne pas compliquer avec des signes négatifs, ces fractions peuvent être arrangées par ordre de grandeur du dénominateur, soit croissant, soit décroissant, et en alternant les signes $+$ et $-$.

Par exemple, si les nombres donnés sont

$$3, \ 8, \ 12, \ 15, \ 17, \ 18,$$

Publié initialement sous le titre *Theorema arithmeticum eiusque demonstratio*, Commentationes arithmeticae collectae **2** (1849), 588–592. E794 dans l'index d'Eneström.

Traduit du latin à l'anglais par Jordan Bell, Département de Mathématiques, Université de Toronto, Toronto, Ontario, Canada.

Consultable ici https://arxiv.org/abs/math/0502425

Traduction de l'anglais au français : Denise Vella-Chemla, janvier 2021.

1. Note du traducteur : voir les lettres de Euler à Goldbach en dates des 25 septembre 1762 et 9 november 1762.
2. Note du traducteur : Euler a démontré cela dans son *Institutionum calculi integralis volumen secundum*, 1769, E366, § 1169, qui est expliqué dans l'article de Ed Sandifer de mars 2005 *How Euler Did It*. Les *Opera omnia* font également référence à l'article E540 d'Euler, *Nova methodus fractiones quascumque rationales in fractiones simplices resolvendi* (1775) et à l'article E475, *Speculationes analyticae* (1774).

dont on obtient les dénominateurs

$$\begin{array}{r|rl} 3 & 5\cdot 9\cdot 12\cdot 14\cdot 15 & = 113400 \\ 8 & 5\cdot 4\cdot 7\cdot 9\cdot 10 & = 12600 \\ 12 & 9\cdot 4\cdot 3\cdot 5\cdot 6 & = 3240 \\ 15 & 12\cdot 7\cdot 3\cdot 2\cdot 3 & = 1512 \\ 17 & 14\cdot 9\cdot 5\cdot 2\cdot 1 & = 1260 \\ 18 & 15\cdot 10\cdot 6\cdot 3\cdot 1 & = 2700 \end{array}$$

et on aura

$$\frac{1}{113400} - \frac{1}{12600} + \frac{1}{3240} - \frac{1}{1512} + \frac{1}{1260} - \frac{1}{2700} = 0$$

ou en multipliant chacune par 36

$$\frac{1}{3150} - \frac{1}{350} + \frac{1}{90} - \frac{1}{42} + \frac{1}{35} - \frac{1}{75} = 0,$$

et en réduisant ces fractions au même dénominateur 3150, il est directement clair que

$$\frac{1 - 9 + 35 - 75 + 90 - 42}{3150} = 0.$$

En effet, dans le cas où seuls deux nombres sont donnés, le théorème n'a pas besoin de démonstration, puisqu'il est évident que

$$\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-a} = 0\ ;$$

mais même dans le cas de trois nombres a, b, c, c'est mainteant plus subtil, car il n'est pas immédiatement évident que

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} = 0\ ;$$

et pour des nombres plus grands, et encore plus, même, en général, pour des nombres quelconques, savoir que cela est vrai pour les cas les plus simples n'offre que peu d'aide.

En effet, j'ai étendu ce théorème plus largement, et il peut être énoncé de la façon suivante :

Théorème général [3]

Si plusieurs nombres différents a, b, c, d, e, f etc. sont donnés, dont le nombre $= m$, et que les produits suivants sont formés à partir des différences de l'un à tous les autres

$$\begin{array}{rcl} (a-b)(a-c)(a-d)(a-e)(a-f)\text{ etc.} & = & A, \\ (b-a)(b-c)(b-d)(b-e)(b-f)\text{ etc.} & = & B, \\ (c-a)(c-b)(c-d)(c-e)(c-f)\text{ etc.} & = & C, \\ (d-a)(d-b)(d-c)(d-e)(d-f)\text{ etc.} & = & D, \\ (e-a)(e-b)(e-c)(e-d)(e-f)\text{ etc.} & = & E \\ \text{etc.} & & \end{array}$$

3. Note du traducteur : Euler a en fait montré cela dans son *Institutionum calculi integralis volumen secundum*, 1769, E366, § 1169.

chacun était constitué de $m-1$ factors, alors non seulement on aura, comme précédemment

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}+\frac{1}{E}+\text{etc.}=0$$

mais on aura également de façon générale

$$\frac{a^n}{A}+\frac{b^n}{B}+\frac{c^n}{C}+\frac{d^n}{D}+\frac{e^n}{E}+\text{etc.}=0,$$

à la condition que l'exposant n soit un nombre positif entier moindre que $m-1$.

Ainsi dans l'exemple ci-dessus, où les nombres donnés sont $3, 8, 12, 15, 17, 18$, non seulement a-t-on

$$\frac{1}{113400}-\frac{1}{12600}+\frac{1}{3240}-\frac{1}{1512}+\frac{1}{1260}-\frac{1}{2700}=0,$$

mais on obtient également la vérité des fractions suivantes

$$\begin{array}{rcl}
\frac{3}{113400}-\frac{8}{12600}+\frac{12}{3240}-\frac{15}{1512}+\frac{17}{1260}-\frac{18}{2700} &=& 0,\\
\frac{3^2}{113400}-\frac{8^2}{12600}+\frac{12^2}{3240}-\frac{15^2}{1512}+\frac{17^2}{1260}-\frac{18^2}{2700} &=& 0,\\
\frac{3^3}{113400}-\frac{8^3}{12600}+\frac{12^3}{3240}-\frac{15^3}{1512}+\frac{17^3}{1260}-\frac{18^3}{2700} &=& 0,\\
\frac{3^4}{113400}-\frac{8^4}{12600}+\frac{12^4}{3240}-\frac{15^4}{1512}+\frac{17^4}{1260}-\frac{18^4}{2700} &=& 0\ ;
\end{array}$$

mais on ne peut continuer avec des puissances plus grandes, puisque chaque dénominateur est constitué de cinq facteurs.

Démonstration du théorème [4]

J'ai trouvé ce théorème en considérant la formule [5]

$$\frac{x^n}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ \text{etc.}},$$

ce qui, à chaque fois que l'exposant n est un nombre entier positif moindre que le nombre de facteurs du dénominateur, est tel qu'on peut toujours l'écrire comme somme de fractions simples ainsi [6]

$$\frac{A'}{x-a}+\frac{B'}{x-b}+\frac{C'}{x-c}+\frac{D'}{x-d}+\text{etc.},$$

où les dénominateurs sont les facteurs du dénominateur initial, et où les numérateurs sont des quantités constantes, ne dépendant pas de x, chacune pouvant être définie de la façon ci-après.

4. Note du traducteur : cf. Gauss, *Travaux de Carl Friedrich Gauss, vol. III*, pp. 265–268.
5. Note du traducteur : Le dénominateur ici a seulement $m-1$ facteurs : c'est $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\cdots(x-v)$, où v est l'avant-dernier des nombres. Pour le moment, x est une variable, mais plus tard, nous prendrons x comme étant le dernier des nombres.
6. Note du traducteur : Fractions partielles : voir Euler's *Introductio in analysin infinitorum*, vol. I, § 46.

Puisque la forme donnée est égale à ces fractions simples, en multipliant par $x-a$, on aura

$$\frac{x^n}{(x-b)(x-c)(x-d) \text{ etc.}} = A' + \frac{B'(x-a)}{x-b} + \frac{C'(x-a)}{x-c} + \frac{D'(x-a)}{x-d} + \text{etc.}$$

Cette égalité est vérifiée pour toute valeur prise par x, puisque les lettres A', B', C', D', etc. ne dépendent pas de x. Par conséquent, cette équation sera vraie si on prend $x = a$, d'où

$$\frac{a^n}{(a-b)(a-c)(a-d) \text{ etc.}} = A',$$

et ainsi la valeur de A' est connue. On voit de manière similaire que

$$B' = \frac{b^n}{(b-a)(b-c)(b-d) \text{ etc.}}, \quad C' = \frac{c^n}{(c-a)(c-b)(c-d) \text{ etc.}},$$

et la même chose pour les autres. Alors, en amenant les fractions simples du côté gauche,

$$\frac{x^n}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \text{ etc}} + \frac{A'}{a-x} + \frac{B'}{b-x} + \frac{C'}{c-x} + \frac{D'}{d-x} + \text{etc.} = 0,$$

et dans tous les cas, nous aurons, en voyant le nombre x comme le dernier des nombres $a, b, c, d, \ldots, x$,

$$\begin{aligned} &\frac{a^n}{(a-b)(a-c)(a-d)\cdots(a-x)} + \frac{b^n}{(b-a)(b-c)(b-d)\cdots(b-x)} \\ &+ \frac{c^n}{(c-a)(c-b)(c-d)\cdots(c-x)} + \ldots + \frac{x^n}{(x-a)(x-b)(x-c)\cdots(x-\upsilon)} = 0, \end{aligned}$$

avec υ dénotant l'avant-dernier des nombres.

Ceci est la démonstration du théorème proposé, qui n'est ainsi pas si évident, de telle façon que sa vérité devrait être comptée parmi celles dont la règle se perçoit aisément, à moins peut-être qu'une démonstration plus simple ne soit trouvée ; [7] mais la nature de cette règle nous laisse difficilement espérer cela, parce que le théorème n'est pas vrai à moins que l'exposant n ne soit un nombre entier positif, moindre que le nombre de facteurs dans chacun des dénominateurs.

Alors, puisqu'en prenant un nombre plus grand pour n, la somme de ces fractions ne s'évanouit plus, à partir de la même source dont nous avons tiré ce théorème, pour chaque cas, nous pourrons assigner la valeur de la somme, notamment en prenant le nombre de facteurs comme étant $= m-1$ et par conséquent, le nombre de tous les nombres donnés $a, b, c, d, \ldots, x$ comme étant $= m$. Si $n = m-1$, ou $n = m$, ou $n > m$, la fraction

$$\frac{x^n}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \text{ etc.}}$$

utilisée dans la démonstration sera vue comme impropre et interprétée comme s'il s'agissait d'une intégration par parties, [8] et la somme des fractions sera égale à la partie en question.

7. Note du traducteur : alors non seulement l'assertion de la preuve serait aisément perçue mais également la preuve serait aisément perçue ?

8. Note du traducteur : cf. vol. I, § 46 de l'*Introductio*. Si $\deg M \geq \deg N$ alors il y a une partie polynomiale dans la décomposition partielle en fraction de $\frac{M}{N}$. Dans le § 38, Euler définit ce qu'est une fraction "impropre" de polynômes.

Ainsi, dans le cas où $n = m - 1$, la partie entière vaut l'unité, et alors également la somme des fractions $= 1$. Par conséquent, dans l'exemple traité ci-dessus, où les signes sont changés selon la démonstration, on aura

$$\frac{18^5}{2700} - \frac{17^5}{1260} + \frac{15^5}{1512} - \frac{12^5}{3240} + \frac{8^5}{12600} - \frac{3^5}{113400} = 1.$$

Mais si $n = m$, la partie entière provenant de la fraction est

$$x + a + b + c + d + \text{etc.},$$

c'est-à-dire, la somme de tous les nombres donnés.

Par conséquent, puisque dans l'exemple ci-dessus, la somme de tous les nombres donnés est $= 73$, on aura

$$\frac{18^6}{2700} - \frac{17^6}{1260} + \frac{15^6}{1512} - \frac{12^6}{3240} + \frac{8^6}{12600} - \frac{3^6}{113400} = 73.$$

On peut facilement voir à partir d'ici comment on trouve les sommes suivantes. Notamment, d'abord, la somme de tous les nombres donnés $a, b, c, d, \ldots, x$ est prise, qu'on pose $= P$, alors la somme des produits de deux, qu'on pose $= Q$, puis la somme de trois, qu'on pose $= R$, de même pour quatre $= S$, pour cinq $= T$, et etc. Maintenant avec ceci fait, on forme la série [9]

$$1 + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \text{etc.}$$

de telle façon que

$$\begin{aligned}&\mathfrak{A} = P, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{A}P - Q, \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{B}P - \mathfrak{A}Q + R,\\ &\mathfrak{D} = \mathfrak{C}P - \mathfrak{B}Q + \mathfrak{A}R - S \quad \text{etc.}\end{aligned}$$

et alors

cas	somme des fractions
$n = m - 1$	$1,$
$n = m$	$\mathfrak{A} = P,$
$n = m + 1$	$\mathfrak{B} = P^2 - Q,$
$n = m + 2$	$\mathfrak{C} = P^3 - 2PQ + R,$
$n = m + 3$	$\mathfrak{D} = P^4 - 3P^2Q + 2PR + Q^2 - S,$
$n = m + 4$	$\mathfrak{E} = P^5 - 4P^3Q + 3P^2R + 3PQ^2 - 2PS - 2QR + T$
	etc.

Or, si on met la somme des nombres $= \mathfrak{P}$, la somme de leur carré $= \mathfrak{Q}$, la somme de leur cube $= \mathfrak{R}$, la somme de leur quatrième puissance, $= \mathfrak{S}$, de leur cinquième puissance $= \mathfrak{T}$, etc., on obtiendra que [10]

$$\begin{aligned}&\mathfrak{A} = \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{B} = \frac{1}{2}\mathfrak{P}^2 + \frac{1}{2}\mathfrak{Q}, \quad \mathfrak{C} = \frac{1}{6}\mathfrak{P}^3 + \frac{1}{2}\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + \frac{1}{3}\mathfrak{R},\\ &\mathfrak{D} = \frac{1}{24}\mathfrak{P}^4 + \frac{1}{4}\mathfrak{P}^2\mathfrak{Q} + \frac{1}{8}\mathfrak{Q}^2 + \frac{1}{3}\mathfrak{P}\mathfrak{R} + \frac{1}{4}\mathfrak{S} \quad \text{etc.,}\end{aligned}$$

9. Note du traducteur : plutôt on forme la fonction génératrice $1 + \mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^2 + \mathfrak{C}z^3 + \mathfrak{D}z^4 +$ etc.

10. Note du traducteur : Les *Opera omnia* réfèrent à l'article E153 d'Euler, *Demonstratio gemina theorematis Neutoniani. . .*, dans lequel Euler démontre les identités de Newton. Les identités de Newton relient les coefficients d'un polynôme aux sommes des puissances des racines du polynôme.

dont les valeurs découlent de la loi

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= \mathfrak{P}, \\
\mathfrak{B} &= \frac{1}{2}(\mathfrak{P}\mathfrak{A} + \mathfrak{Q}), \\
\mathfrak{C} &= \frac{1}{3}(\mathfrak{P}\mathfrak{B} + \mathfrak{Q}\mathfrak{A} + \mathfrak{R}), \\
\mathfrak{D} &= \frac{1}{4}(\mathfrak{P}\mathfrak{C} + \mathfrak{Q}\mathfrak{B} + \mathfrak{R}\mathfrak{A} + \mathfrak{S}) \\
& \text{etc.}
\end{aligned}$$

Avec la vérité de notre théorème établie, je juge qu'il ne serait pas hors de propos que j'étudie avec attention la nature des formules sur lesquelles le théorème s'appuie. Donc, si les nombres a, b, c, d, etc. sont donnés, pour chacun d'entre eux on cherche quel sera le caractère de la formule $(a-b)(a-c)(a-d)$ etc., qui est le produit des différences de ce nombre avec tous les autres.

Alors en posant que le nombre des nombres donnés $= n$,[11] et en supposant que z est une quantité variable, je fabrique ce produit à partir de lui

$$(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)(z-e) \text{ etc.},$$

qui par multiplication amène au développement

$$z^n - Pz^{n-1} + Qz^{n-2} - Rz^{n-3} + Sz^{n-4} - \text{etc.}$$

Alors en divisant ceci par $z-a$, on aura

$$(z-b)(z-c)(z-d) \text{ etc.} = \frac{z^n - Pz^{n-1} + Qz^{n-2} - Rz^{n-3} + \text{etc.}}{z-a}.$$

Si nous posons maintenant $z = a$, la forme en question $(a-b)(a-c)(a-d)$ etc. apparaît que j'ai dénotée ci-dessus par la lettre A. Alors en effet, pour l'autre côté, à la fois le numérateur et le dénominateur tendent vers zéro, et par conséquent, sa valeur sera

$$na^{n-1} - (n-1)Pa^{n-2} + (n-2)Qa^{n-3} - (n-3)Ra^{n-4} + \text{etc.},$$

qui, puisqu'il se trouve que

$$a^n - Pa^{n-1} + Qa^{n-2} - Ra^{n-3} + Sa^{n-4} - \text{etc.} = 0,$$

...[12]

11. Note du traducteur : Ce nombre était précédemment dénoté par m.
12. Note du traducteur : L'article s'arrête ici.