

**Traduction d'une interview
de Jacques Dixmier par Martin Raussen**

EDUCATION

Pouvons-nous commencer par vos jeunes années ? Vous êtes né en 1924. Où avez-vous grandi et comment était l'enseignement entre les deux guerres mondiales ?

Je suis né à Saint-Étienne, pas loin de Lyon. Comme mes parents étaient enseignants, tous les deux, nous avons voyagé en France, et je ne suis donc pas originaire d'un endroit précis. J'ai vécu à Rouen puis à Lille et ensuite à Versailles, à partir de l'âge de 9 ans. Ca a été l'endroit le plus important pour moi.

Vous avez reçu une grande partie de votre éducation à Versailles ?

Oui, à Versailles de la 6^{ième} à la mathématiques spéciales (2 ans après le baccalauréat¹) excepté, à cause de la guerre, une année à Saint-Brieuc, qui est une petite ville de Bretagne. Et d'ailleurs là, j'ai eu un très bon professeur de mathématiques.

Et c'était probablement important ?

C'était extrêmement important. J'avais eu de bons professeurs en mathématiques pendant la totalité de ma scolarité. Sauf en 6^{ième} où le professeur était complètement nul. Mais après ça, pendant presque 10 ans, chaque année j'avais un merveilleux professeur de mathématiques. C'est probablement une des causes principales de ma vocation.

Pouvez-vous vous rappeler une circonstance particulière qui vous ait fait penser "les mathématiques sont-elles un truc pour moi ?"

J'ai toujours aimé les mathématiques mais au départ, je ne croyais pas que je serais capable de faire de la recherche. J'ai réalisé que j'aimais enseigner et j'ai pensé que je serais un bon professeur de mathématiques. C'était ma raison principale pour

L'interview est consultable dans cette Newsletter de la Société européenne de mathématiques (EMS).

<https://www.ems-ph.org/journals/newsletter/pdf/2009-06-72.pdf>.

Elle a eu lieu à Aalborg, au Danemark.

1. Diplôme de fin de lycée.

continuer à étudier les mathématiques - et ensuite pour entrer à l'Ecole Normale Supérieure.

Aviez-vous des personnes de votre famille qui avaient de l'expérience en science ou en mathématiques ?

Pas que je connaisse. Mon père aurait préféré que je devienne ingénieur. Quand j'ai vu que j'étais bon en mathématiques, il a pensé que je pourrais entrer à l'Ecole Polytechnique. Il était lui-même professeur - en français, Latin et Grec. Il n'a pas exprimé d'opposition sérieuse quand j'ai dit que je préférerais l'Ecole Normale. Ma mère a toujours accepté tous mes projets.

Avant d'entrer à l'ENS, vous deviez aller à l'Ecole préparatoire ?

Oui. Après le baccalauréat, quelques personnes en France vont dans les classes qu'on appelle Classes préparatoires. De mon temps, ça s'appelait Mathématiques Supérieures et après Mathématiques Spéciales.

C'était à Paris ?

Non. C'était à Versailles.

Vous êtes entré à l'ENS à 18 ans en 1942 ?

J'étais à l'ENS de 1942 à 1945 ou 46 ; la dernière année est un peu douteuse. Avant 1945, le parcours en mathématiques à l'ENS durait trois ans. A la fin de la guerre, une quatrième année fut ajoutée. Mais je travaillais au CNRS² - encore un peu nouveau - en même temps. En fait, j'ai écrit ma thèse cette année-là.

Pouvez-vous me raconter vos souvenirs de vos années étudiantes à l'ENS ? Comment était-ce d'étudier en ces temps difficiles, sous occupation allemande ?

Beaucoup de personnes en France n'avaient pas assez à manger mais ça n'était pas mon cas. La nourriture n'était pas bonne mais on en avait assez, nous avions de quoi manger. Vous voulez probablement que je vous parle de mon attitude par rapport à la résistance³. J'ai rejoint la résistance mais seulement à la fin. On n'était que très

2. Centre national de la recherche scientifique

3. par rapport au mouvement de résistance française.

peu au courant de ça parce que les étudiants dans la résistance n'allaient pas vous en parler ; c'était trop dangereux ! En fait, la résistance devint beaucoup plus importante quand nous avons été obligés d'aller dans les usines en Allemagne ; le "service du travail obligatoire (STO)" comme il s'appelait a été introduit en 1942. Je n'étais pas concerné par cette exception du dernier mois parce que j'étais encore trop jeune. Mais la plupart de mes camarades étaient assez vieux. Beaucoup quittèrent l'ENS et le pays pour éviter le STO. En fait, l'un de mes amis les plus proches est parti en Espagne, puis au Portugal, puis en Angleterre et il a étudié pour devenir pilote. Il a juste fini ses études le 8 Mai 1945, le dernier jour de la guerre.

Qu'est-ce que ça signifiait pour vous d'être un membre de la résistance ?

Je suppose que si j'avais été arrêté, j'aurais été emprisonné. Je n'ai jamais porté d'arme. Je n'y connaissais rien aux armes. J'ai participé à quelques très petites rencontres.

Et alors, la libération a eu lieu en août 1944 à Paris.

Oui. En fait, la Gestapo est venue à l'Ecole Normale Supérieure quelques jours avant cela. Finalement, ils ont arrêté Georges Bruhat⁴ qui était le directeur à ce moment-là.

Que lui est-il arrivé ?

Il a été transféré en Allemagne et il est mort là-bas dans un camp. Il était déjà vieux ; je ne connais pas bien les détails. Le secrétaire général de l'ENS, Baillou, qui avait aussi été emmené en Allemagne, a survécu et est revenu à Paris. En fait, ils sont revenus pendant les vacances en août et ils ont arrêté quelques élèves, dont j'étais. Il y a quelque chose qui me concerne personnellement et que je ne comprends toujours pas. J'étais à l'ENS en train de faire quelque chose qui était probablement illégal. J'ai entendu du bruit mais je ne savais pas ce qui se passait. Alors je suis allé dans le hall de l'ENS. Il y avait deux officiers de la Gestapo. Ils ont hurlé et j'ai été pris complètement par surprise. Ils ont tiré et je ne comprends pas comment je n'ai pas été touché. Ils m'ont attrapé et j'ai été envoyé en détention dans un bureau. Finalement, au lieu d'emmener quelques élèves, ils ont emmené le directeur et M. Baillou, qui se sont probablement proposés à la place des élèves.

Est-ce que les enseignements continuaient comme d'habitude, comme avant ou après la guerre ?

4. Gorges Bruhat (1887-1945)

Il y a de grandes différences entre maintenant et alors mais qui sont arrivées progressivement. Il n'y a pas eu de grande rupture dans les formes d'enseignement entre 1944 et 1946, par exemple. Durant mes années à l'Ecole Normale, je suivais les cours de Cartan⁵ et de de Broglie⁶. Nous ne comprenions rien aux cours de de Broglie ; nous étions là, il y avait le tableau noir, de Broglie ne parlait pas et n'écrivait rien. Nous avions de grandes difficultés à comprendre Cartan mais nous essayions. Avec de Broglie, on n'essayait même pas.

Lesquels de vos professeurs de l'époque ont été importants pour vous et pour votre carrière future ?

Mes professeurs principaux étaient Cartan et Julia⁷. J'avais déjà eu Cartan comme professeur pendant deux ans à l'Ecole Normale Supérieure. De façon plus importante, après que j'aie assisté au Séminaire Cartan et plus tard, j'ai été un collègue de Cartan à Bourbaki. Aussi, l'importance de Cartan est immense mais cela date principalement de l'époque après les deux années à l'Ecole Normale.

Julia était important pour une raison différente. J'ai suivi son cours en 1943 pendant ma première année à l'Ecole Normale.

Julia donnait un cours chaque année en analyse mathématique avancée. Cette sorte de cours, qui était aussi donné par Montel⁸, Denjoy⁹ et d'autres, étaient trop difficiles pour nous les étudiants.

Mais nous étions très anxieux d'avoir notre diplôme dès que possible à cause de la guerre ; je ne savais pas ce qui arriverait quelques mois plus tard ! Julia était un extrêmement bon professeur et nous le comprenions. En fait, le niveau de son cours sur les espaces de Hilbert n'était pas très élevé mais nous comprenions presque tout. La conséquence de cela a été que l'espace de Hilbert m'est devenu aussi familier que l'espace ordinaire. Ca a certainement été la raison de mon orientation ultérieure en recherche. Il est très important d'être complètement familier avec les bases de votre sujet.

THÈSE SOUS LA DIRECTION DE GASTON JULIA

Je voudrais vous en demander davantage au sujet de votre directeur de thèse, Gaston Julia. De nos jours il est célèbre parce qu'il avait déjà jeune

5. Henri Cartan (1904-2008)

6. Louis de Broglie (1892-1987)

7. Gaston Julia (1893-1978)

8. Paul Montel (1876-1975)

9. Arnaud Denjoy (1884-1974)

homme étudié l'itération de fonctions rationnelles dans le plan complexe. Beaucoup de personnes ont vu les ensembles de Julia, etc. Était-il aussi connu à l'époque ? Quelle sorte de personne était-ce ?

Avant tout, je pense que c'était un très bon mathématicien. Quand il avait environ 40 ans, il devint davantage intéressé par les questions académiques que par les mathématiques réelles. En particulier, je ne pense pas qu'il ait été très au courant des développements récents concernant l'espace de Hilbert - heureusement pour moi parce que cela m'a rendu plus facile le fait de comprendre de quoi il parlait ! Un autre point important le concernant est qu'il avait été très sérieusement blessé durant la première guerre mondiale ; il avait perdu son nez, il portait un masque et il souffrait beaucoup. Il a écrit sa thèse, qui consistait en deux gros articles, pendant qu'il était à l'hôpital. Je ne pense pas qu'il ait eu de patron de thèse au sens habituel du mot.

Oh, je voulais vous demander cela ! J'ai remarqué que le projet de généalogie mathématique américain n'indique pas de directeur de thèse pour Julia.

J'ai essayé de résoudre ce problème il y a quelques années. Une jeune femme qui était étudiante de Mathieu¹⁰ savait que Mathieu était un étudiant de Duflo¹¹, que Duflo était l'un de mes étudiants et que j'étais un étudiant de Julia. Aussi, elle est venue à moi et m'a demandé si je pouvais lui dire qui était le directeur de thèse de Julia. Je ne savais pas et alors, j'ai regardé ses deux premiers gros articles. Ils ne contiennent pas trace d'un directeur de thèse, ni même de quelqu'un qui l'aurait inspiré pour écrire ces articles. J'ai demandé à son petit-fils, qui est mathématicien également, et il ne sait pas non plus. On devrait regarder dans les archives de la Sorbonne. Je ne sais toujours pas.

Savez-vous qui a pu l'inspirer pour regarder ces questions ?

Probablement Picard¹². J'ai été récemment informé par Michèle Audin (Strasbourg) que dans le jury de thèse de Julia, il y avait Picard, Humbert¹³ et Lebesgue¹⁴. Malheureusement, je ne suis pas compétent concernant le travail de Julia sur les fonctions d'une variable complexe. Dans ses cours à propos de l'espace de Hilbert, il essayé de faire une analogie entre ces deux sujets. Je pense que cette analogie était farfelue mais peut-être ai-je raté un point important. On ne peut jamais être sûr.

10. Olivier Mathieu

11. Michel Duflo

12. Charles E. Picard (1856-1941)

13. Marie Georges Humbert (1859-1921)

14. Henri Lebesgue (1875-1941)

Comment était-il comme directeur de votre thèse ? Comment était votre collaboration ?

Ce n'était pas quelqu'un de facile. Comme vous le savez probablement, il était politiquement à l'extrême-droite et il espérait une victoire allemande pendant la guerre. Lui et mon père étaient étudiants en même temps à l'Ecole Normale pendant deux ans : mon père en littérature et celui de Julia en mathématiques. Ils se connaissaient donc. Julia avait vécu à Versailles et mon père était professeur au Lycée de Versailles. Cela a rendu les choses plus faciles pour moi. Julia avait six fils. Ma mère, qui était institutrice, avait eu certains d'entre eux comme élèves. Ainsi, il y avait des liens entre nos deux familles.

Vous a-t-il proposé un sujet de thèse ?

Non, mais j'ai certainement été inspiré par certaines des choses qu'il nous avait apprises - en parlant généralement, sur l'espace de Hilbert. Dans ma thèse, j'ai étudié certains sous-espaces particuliers, non fermés mais non arbitraires - des sous-espaces très spéciaux ; ma thèse dans son ensemble traite de cette classe de sous-espaces. Julia en avait parlé mais je ne me rappelle d'aucun détail. Comme vous le savez, quand vous êtes complètement imprégné d'un sujet, ce sujet devient le vôtre. Mais je suis sûr qu'il a joué un rôle dans ce choix.

L'avez-vous consulté pendant votre travail de thèse ?

Oui. Finalement, j'ai été convoqué ; c'était probablement en avril 1947. Il était assez critique dans son appréciation. Mais le point principal était qu'il dit finalement que ça pourrait faire une thèse.

CARRIÈRE

Vous aviez déjà commencé à travailler au CNRS quand vous avez rédigé votre thèse ?

Comme je l'ai dit, en 1945-46, j'étais en même temps élève à l'Ecole Normale Supérieure et employé au CNRS. J'ai écrit la plus grosse partie de ma thèse cette année-là ; après ça, l'année suivante, j'étais seulement au CNRS. En 1947, j'ai été nommé, grâce à l'influence de Julia, j'en suis sûr, maître de conférences à Toulouse. Ce qui fait que je n'ai été étudiant en thèse que durant deux ans.

Combien de temps êtes-vous resté à Toulouse ? Et comment étaient vos

conditions de travail là-bas ?

Je suis resté à Toulouse pendant deux ans. C'était fatigant parce que j'habitais à Paris. Mon épouse était professeur de mathématiques dans les lycées de plusieurs villes de France. La question du logement était extrêmement compliquée. Nous avions un appartement d'une pièce à Paris. Nous voyagions beaucoup et voyager en train de Paris à Toulouse n'était pas aussi facile en 1947. Le pont sur la Loire à Orléans n'avait pas été complètement réparé.

Après deux années à Toulouse, il y a eu un nouveau poste à Dijon en 1949. Les choses étaient très faciles pour un jeune mathématicien à cette époque parce que le nombre d'étudiants explosait. Le gouvernement créait de nouveaux postes et du coup, je n'avais aucune difficulté à trouver un poste. Comparé à la situation des mathématiciens maintenant, j'étais très privilégié. Dijon était plus près de Paris. J'ai été là-bas pendant six ans et après ça, en 1955, j'ai été nommé sur un poste à Paris à l'Institut Henri Poincaré.

Le nombre d'étudiants était énorme. Je donnais mes cours au Conservatoire des Arts et Métiers; il y avait un grand auditorium. Pendant les 2 ou 3 premières années, j'avais 500 étudiants. Jussieu¹⁵, le dernier endroit où j'ai travaillé a été créée seulement quelques années après.

A ce moment-là, c'était juste l'Université de Paris ?

Oui. Vous devez distinguer la création de Jussieu et la création des différentes universités de Paris. Après 1968, plutôt qu'une université de Paris, quelques 13 ou 14 universités ont été fondées. Je suis resté à Jussieu.

J'ai pris ma retraite à 60 ans, pour des raisons personnelles. Une nouvelle loi venait juste de rendre cela possible.

RECHERCHE

Pouvons-nous poursuivre en parlant de votre travail de recherche ? Pouvez-vous me faire un compte-rendu des domaines de recherche dans lesquels vous avez été le plus actif ? Pour commencer par les algèbres d'opérateurs - cela venait de l'espace de Hilbert que vous connaissiez si bien ?

15. Pendant plusieurs années, les universités s'appelaient Paris-6 et Paris-7.

Etant familier avec l'espace de Hilbert, j'étais capable de lire facilement de nombreux articles mais principalement le travail de von Neumann¹⁶ - de nombreux articles de von Neumann et en particulier ses articles, certains de ces articles avec Murray¹⁷, à propos des algèbres d'opérateurs.

Qui étaient motivés par la physique quantique à ce moment-là ?

Il l'a expliqué dans l'introduction du premier article (il y a cinq ou six gros articles). Mais également par la théorie des représentations unitaires ! Pour moi, c'était le point principal parce que je n'ai jamais réellement compris la mécanique quantique. Mais j'ai compris les représentations unitaires. Ces articles étaient prophétiques, ce qui n'était pas évident en 1936, l'année de leur premier article sur les algèbres d'opérateurs. Cela devint évident dix ans après quand j'ai écrit mes premiers articles en 1946, immédiatement après ma thèse. J'ai été aidé par un ami, Godement¹⁸, qui était aussi étudiant à l'Ecole Normale. Je ne le connaissais pas à l'Ecole Normale ; il avait deux ans de plus que moi. Il m'a expliqué beaucoup de choses à propos des représentations unitaires. J'ai même eu le privilège de lire certains des papiers de Godement qu'il n'a jamais publiés ; il était réfractaire à la publication. C'est ainsi que j'ai étudié ce que j'appelais les algèbres de von Neumann.

Est-il vrai que vous avez découvert la notion d'algèbre de von Neumann ?

Non, c'était une idée de Dieudonné¹⁹ ; il a proposé cette dénomination lors d'une discussion à Bourbaki. J'ai pensé que ça coulait de source ; j'aurais dû y penser par moi-même ! J'ai alors utilisé cette notion dans mon livre sur les algèbres d'opérateurs²⁰ qui est sorti en 1957. Après ça, j'ai continué d'étudier les algèbres d'opérateurs, mais davantage du point de vue des C^* -algèbres, et en même temps, la théorie des représentations unitaires. Godement avait joué un grand rôle pour moi mais j'étais aussi influencé par tous les articles de Harish-Chandra²¹. Alors j'ai commencé à travailler sur les algèbres enveloppantes²² (bien sûr, reliées à mon travail précédent). J'ai écrit un livre à propos des C^* -algèbres en 1964 et puis mon livre au sujet des algèbres enveloppantes²³ en 1974. Puis je me suis intéressé à la théorie invariante. Il y a une connexion entre ces deux choses. C'est un peu technique, aussi je ne l'expliquerai pas

16. John von Neumann (1903-1957)

17. Francis Joseph Murray (1911-1996)

18. Roger Godement (1921-2016)

19. Jean Dieudonné (1906-1992)

20. Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (Algèbres de von Neumann), Gauthier-Villars, Paris, 1957

21. Harish-Chandra (1923-1983)

22. Les C^* -algèbres et leurs représentations, Gauthier-Villars, Paris, 1964

23. Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, Paris, 1974

ici. Après ma retraite, je suis allé à l'IHES²⁴. J'étais beaucoup plus libre dans mon travail. J'ai beaucoup travaillé sur la théorie invariante; en plus, il y a également une connexion avec la théorie des partitions. J'ai beaucoup travaillé mais j'ai réalisé que ce travail était moins bon que ce que j'avais fait précédemment. Je ne suis pas un grand mathématicien mais je suis un bon mathématicien. Mes articles de cette période sont techniquement difficiles mais moins importants que ce que j'avais fait auparavant. Je pense que cela est dû à l'âge; c'est la seule raison que je peux voir, puisque j'avais les plus grandes facilités à travailler là-dessus.

Probablement que la théorie des partitions est également un sujet très difficile ?

Oui, mais pas plus que les algèbres d'opérateurs. Il y a de nombreuses personnes qui disent : "ooh, les algèbres d'opérateurs!".

Y a-t-il certains de vos résultats dont vous êtes plus fier - si vous ne pouvez en citer que peu ?

Je dois réfléchir, on ne m'a jamais posé cette question : peut-être l'article où j'ai démontré que les groupes algébriques sont de type I; et également quelques articles à propos des algèbres enveloppantes; et aussi un article, qui n'est pas très connu parce qu'il a été complètement absorbé par Harish-Chandra ultérieurement, à propos du groupe de De Sitter; et enfin, un papier à propos des algèbres quasi-unitaires.

Quand vous pensez à la manière dont vous avez obtenu vos résultats, était-ce habituellement très systématique ou est-ce que cela arrivait parfois lorsque vous aviez une arrivée soudaine d'inspiration ?

Les deux! Au moins pour chaque article important, j'ai eu besoin de beaucoup de temps et de travail - et bien sûr, de temps en temps les idées viennent. Une idée particulière m'est venue alors que je voyageais en bus.

Oh, cela rappelle un commentaire similaire de Poincaré²⁵ !

Oui, et Serre²⁶ m'a raconté avoir eu d'importantes idées lors d'un voyage en train²⁷. Cela peut être l'une des raisons pour lesquelles les autres personnes nous considèrent

24. Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Bures-sur-Yvette

25. Henri Poincaré (1854-1912)

26. Jean-Pierre Serre (* 1926)

27. Egalement rapporté dans : M. Raussen, Chr. Skau, Interview de Jean-Pierre Serre, Newsletter de la Société Mathématique Européenne²⁸, 18-20

comme des gens abstraits. Je ne sais pas quelle tête j'ai fait quand j'ai subitement eu cette idée dans le bus. Je n'étais certainement pas intéressé par ce qui se passait autour de moi.

En revenant à von Neumann, l'avez-vous jamais rencontré personnellement ?

Oui, très peu, la première fois en 1947. Il est venu des Etats-Unis pour la première fois après la guerre. Il a séjourné à l'hôtel Lutetia, qui est un très grand hôtel parisien, et de nombreuses personnes venaient le voir. J'ai été extrêmement flatté qu'il propose que je vienne le voir.

Il connaissait vos articles ?

Je n'avais alors rien écrit à propos des algèbres d'opérateurs. J'avais seulement mes deux articles à lui donner. Il a été extrêmement gentil parce que j'ai réalisé plus tard que ce n'étaient pas de bons articles.

Vous étiez très jeune à l'époque ?

Oui, j'avais 23 ans alors. Plus tard, je lui ai écrit. Je pense que je l'ai vu une fois de plus au Congrès d'Amsterdam en 1954. J'ai appris un peu plus tard qu'il était très malade. Je lui ai écrit plusieurs fois. Il n'a pas répondu tout de suite mais il a répondu. Il ne travaillait plus sur les algèbres d'opérateurs mais il a pris la peine de me répondre.

Y a-t-il d'autres mathématiciens pour lesquels vous avez une admiration particulière ?

Je dois me limiter à ceux dont je comprends le travail : certainement Gelfand²⁹ et Harish-Chandra que j'ai déjà mentionné. Je n'ai pas collaboré avec eux mais je les ai rencontrés. Je les ai également reçus chez moi. Je les ai rencontrés à quelques congrès, Gelfand au Congrès international des mathématiciens (ICM) à Moscou en 1966 et plus tard en Hongrie et dans différents autres endroits. J'ai rencontré Harish-Chandra également à Moscou où il était conférencier invité et plusieurs fois à Paris. Mais je pense que je ne l'ai jamais rencontré aux Etats-Unis où il a vécu jusqu'à sa mort. Comme vous le savez, il est mort relativement jeune.

29. I. Gelfand (1913-2009)

Voyagiez-vous beaucoup en général ?

Je n'ai pas voyagé beaucoup - bien sûr davantage qu'un Français moyen mais moins qu'un mathématicien ordinaire. La raison était que je ne voulais pas laisser ma famille. Pourtant, depuis que j'étais membre de Bourbaki, j'étais absent pour ma famille un mois par an, et je trouvais que c'était déjà énorme. Je refusais la plupart des invitations à une exception : j'ai vécu avec ma famille une année académique à la Nouvelle Orléans. En fait, j'allais souvent au congrès d'été de Bourbaki accompagné de ma famille. Ainsi nous n'avons pas été toujours séparés lors de ces congrès.

BOURBAKI

Vous avez été impliqué dans le travail du groupe Bourbaki déjà lorsque vous étiez jeune homme ?

Oui, mais pas plus jeune que les autres de cette génération : Godement, Koszul³⁰, Samuel³¹, Serre et un peu plus tard Borel³², Cartier³³, Bruhat³⁴, Douady³⁵. Nous étions tous très jeunes quand nous sommes devenus membres.

Tous plus ou moins du même âge ?

Oui, plus ou moins âgés de 25 ans.

Vous a-t-on demandé de vous joindre au groupe ?

Cela a été à l'initiative de Serre et Samuel. Serre vous a probablement expliqué qu'il est entré dans le groupe Bourbaki en forçant la porte. Il y avait un congrès Bourbaki à l'Ecole Normale Supérieure. Pendant les premières années après la guerre, il était difficile de se rencontrer dans un hôtel, aussi Bourbaki tenait ses meetings à l'ENS. Serre était élève là-bas et il a juste demandé d'écouter. Voyant ses questions, ils ont vite compris qu'il serait un membre de grande valeur.

Pierre Samuel était juif. Il était élève à l'Ecole Normale Supérieure mais il a dû se cacher pendant la guerre. Lui et Cartan se connaissaient, probablement depuis les concours d'entrée à l'ENS. Juste après la guerre, il est allé en Amérique, où il a été

30. Jean-Louis Koszul (1921-2018)

31. Pierre Samuel (1921-2009)

32. Armand Borel (1923-2003)

33. Pierre Cartier (* 1932)

34. François Bruhat (1929-2007)

35. Adrien Douady (1935-2006)

l'élève de Chevalley³⁶. En tous cas, il est devenu un très jeune membre de Bourbaki, un ou deux ans après la guerre. Un jour en 1949, Serre et Samuel, qui me connaissaient tous les deux, m'ont approché et m'ont demandé si j'accepterais de devenir un membre de Bourbaki. A cette époque, c'était extrêmement flatteur ; j'en aurais sauté au plafond ! C'est devenu très important pour moi parce que sinon, j'aurais probablement travaillé toute ma vie sur l'espace de Hilbert. Bourbaki m'a forcé à apprendre beaucoup sur d'autres sujets.

Comment était la collaboration à Bourbaki ? Comment progressiez-vous à partir d'un échange d'idées vers des brouillons puis vers les volumes finaux des *Eléments de Mathématiques* ?

Eh bien, tout ceci est bien connu maintenant³⁷. Habituellement, il y avait cinq ou six brouillons sur le même sujet, écrits consécutivement par différentes personnes.

Le premier brouillon du volume *Algèbres de Lie* a été écrit par Koszul alors que j'étais déjà membre de Bourbaki. J'ai écrit le second et le troisième brouillon sur ce sujet et, je pense, également le volume final. En théorie, une version n'était pas acceptée par Bourbaki à moins que tout le monde ne soit d'accord. En réalité, après avoir discuté de cinq ou six brouillons consécutifs, quelques personnes pouvaient ne toujours pas être complètement satisfaites mais elles étaient devenues trop fatiguées pour montrer leur désaccord. Bien, pour les *Algèbres de Lie*, il n'y avait pas de désaccords sérieux.

Je pense que ce livre a été la source standard attendue depuis longtemps !

Si vous ne tenez compte que du premier chapitre, qui est à propos de la théorie générale des algèbres de Lie, mais également le chapitre à propos des systèmes de racines comme partie du sujet, et ensuite le chapitre à propos des algèbres semi-simple de Lie qui fut écrit un peu après. Je pense que l'idée d'une théorie indépendante des systèmes de racines est due à Cartier, qui a expliqué cela à Bourbaki, je m'en souviens, au tableau. Nous avons été convaincus et nous avons décidé de faire une étude séparée des systèmes de racines, en général. Cartier a trouvé l'axiomatique et il a aussi écrit quelques-uns des premiers brouillons sur le sujet. J'ai été impliqué dans les second et troisième brouillons ; à ce moment-là, j'ai dû utiliser le livre de Coxeter sur les polytopes³⁸ ; sur certains points, ce n'était pas très satisfaisant. Le livre est très beau mais il utilise parfois des méthodes ad-hoc en s'appuyant sur l'intuition géométrique - ce qui n'est pas vraiment du goût de Bourbaki. C'est seulement plus

36. Claude Chevalley (1909-1984)

37. Voir davantage à ce sujet dans A. Borel, *Vingt-cinq années avec Nikolas Bourbaki* (1949-1973), *Notices Amer. Math. Soc.* 45 (3) : 373-380 ; M. Mashaal, *Bourbaki : une société secrète de mathématiciens*, Pour la Science, 2002 ; traduction anglaise : AMS. 2006

38. H.S.M. Coxeter, *Regular Polytopes*, Macmillan, 1963

tard que Borel a trouvé les preuves algébriques de tout ça et c'était beau, aussi. J'ai écrit quelques-uns des derniers brouillons. J'étais bon pour la rédaction ; je n'avais pratiquement pas d'idées originales pour Bourbaki mais je pense que j'étais un instrument dans le processus de rédaction.

Comment toutes les différentes personnalités pouvaient-elles travailler ensemble à Bourbaki ? J'ai souvent été intrigué en lisant les comptes-rendus des réunions et congrès. Ils semblent avoir un caractère anarchique ; mais à la fin, il en résulte ces volumes très rigides !

C'est une remarque intéressante ; vous avez probablement raison. Bourbaki était aussi une grosse machine. Et les versions finales qui étaient envoyées à l'éditeur étaient presque toujours tapées par Dieudonné, et ont de ce fait été très influencées par le style personnel de Dieudonné - mais tout le monde acceptait cela.

André Weil³⁹ était-il toujours une figure importante lors de votre époque à Bourbaki ?

Certainement, mais principalement par correspondance puisqu'il était en Amérique quand j'ai commencé à travailler pour Bourbaki en 1949. Je n'ai certainement pas vu Weil pendant ma première année à Bourbaki. Bien sûr, son influence était énorme, en particulier durant les premières années de l'entreprise Bourbaki avant la guerre. Après ça, son influence se faisait principalement sentir à travers ce qu'il écrivait. Il participait à quelques rencontres mais pas à toutes ; je dirais qu'il était présent environ à mi-temps - cela peut être vérifié dans les archives. Il aurait même pu être influent plus longtemps mais il avait décidé lui-même que l'âge limite était 50 ans.

Est-ce que cette limite d'âge était acceptée en général ?

Oui. Weil a été invité au congrès peu de temps après qu'il ait eu 50 ans. Il s'est tenu comme à l'accoutumée mais quand le dernier jour s'est terminé par une réunion finale du congrès d'alors ainsi que pour prendre les décisions à propos du congrès suivant, Serre et Borel ont demandé à Weil de ne pas participer à cette réunion. Ils pensaient que si vous n'étiez plus membre de Bourbaki, vous ne deviez plus avoir aucune influence. Weil était certainement mécontent mais il n'a rien objecté. Beaucoup des personnes présentes n'ont rien dit mais auraient préféré qu'il reste. Mais si une personne y voyait une objection, nous y voyions tous une objection. C'étaient les règles du jeu.

39. André Weil (1906-1998)

Et à propos de Dieudonné ; est-il resté après ses 50 ans ?

Non, mais il était encore invité aux congrès. Je ne me rappelle pas s'il écrivait toujours les versions terminales des livres de Bourbaki.

Il y a quelques jours, nous avons fêté les 60 ans du Séminaire Bourbaki⁴⁰ à l'Institut Henri Poincaré ; Jean-Pierre Serre a donné le 1000^{ème} exposé. Vous avez donné quelques exposés pour ce célèbre séminaire ?

Pas beaucoup, cinq ou six peut-être ; beaucoup moins que Grothendieck⁴¹ ou Serre. Je ne suis pas en colère mais je pense que Bourbaki n'est plus Bourbaki. Le séminaire est très bien mais la raison d'être de Bourbaki était la publication de livres.

Le groupe n'a plus l'influence qu'il avait dans les années 50 et 60 ?

Je suppose qu'il y a encore des réunions de Bourbaki mais qu'est-ce qu'ils font ? Ils sont parfaitement capables d'écrire des livres ! Pour certains des sujets, nous avons écrit des brouillons qui n'ont jamais été publiés et c'est vraiment dommage, je pense. Ces brouillons étaient bien sûr juste un début ; ils auraient dû travailler davantage sur les sujets en question. Pendant longtemps, rien n'est apparu et il y a environ 10 ans, un seul neuvième chapitre est apparu dans le volume sur l'algèbre commutative, je pense. C'est dommage que rien n'ait eu lieu depuis.

Je me souviens que Demazure⁴², qui avait travaillé très activement avec Bourbaki, avait exprimé que vous pouvez souvent avoir le sentiment que si vous vous asseyez, et que vous pensez à un sujet suffisamment longtemps, et qu'alors vous écrivez ce que vous avez trouvé, au bout d'un certain temps, vous aurez trouvé tout ce qui était intéressant ; il disait que cette impression est fautive. Il avait raison parce que les mathématiques changent tout le temps. Peut-être est-il vrai que l'histoire doit s'arrêter un jour. Mais pas de sitôt, je pense ! Dans les manuscrits, il y a des brouillons pour des chapitres sur, par exemple, les groupes de Lie complexes semi-simples, ou sur la théorie des corps de classes. Il y a aussi quelques chapitres en plus sur la théorie spectrale qui ont été écrits.

EDUCATION À LA RECHERCHE, ÉTUDIANTS EN THÈSE

Mes questions suivantes concernent vos étudiants en thèse. Vous en avez

40. Séminaire Bourbaki qui se tient trois fois par an, avec cinq exposés désormais.

41. Alexandre Grothendieck (1928-2014)

42. Michel Demazure

eu plusieurs ?

Oui. J'ai été le directeur de thèse de vingt étudiants. De plus, il y a un certain nombre d'étudiants qui ont écrit leur thèse de 3^{ème} cycle avec moi. Le meilleur de mes thésards a certainement été Alain Connes⁴³. Il est apparu dans mon séminaire. Habituellement, je connaissais les participants de mon séminaire à l'avance parce qu'ils avaient suivi l'un de mes cours. J'ai été surpris - qui est cet homme ? Quelques mois après ça, il m'a offert un papier de quatre pages. J'ai immédiatement compris que son résultat était très important et qu'il en avait donné une preuve simple - absolument incroyable !

Connes a dit plusieurs fois que Choquet⁴⁴ avait été très important pour lui ; il m'a aussi mentionné très généreusement.

Je suppose que vous avez davantage collaboré avec lui et vos autres étudiants que vous ne l'aviez fait vous-même avec votre superviseur Julia ?

Oui, mais après tout, c'est difficile de comparer. Pour mes 20 étudiants, la supervision était très différente de l'un à l'autre. En fait, Connes travaillait principalement tout seul. Pour le dire brutalement, après quelques années, il m'a apporté sa thèse. Je l'ai lue et je lui ai demandé de changer quelques virgules. Ainsi avec lui, dans un certain sens, il a travaillé de la même façon que je l'ai fait avec Julia.

Laissez-moi mentionner également Michel Duflo et Michèle Vergne. Avec Duflo, c'était essentiellement la même chose qu'avec Connes ; il travaillait indépendamment. Michèle Vergne a écrit quelques articles. Nous avons aussi écrit des articles en collaboration, après sa thèse. Durant son travail de thèse, je lisais tout ce qu'elle écrivait et je lui donnais quelques conseils mais ça n'était pas très important. Avec d'autres étudiants, je devais participer d'une façon plus substantielle. J'ai collaboré avec certains de mes étudiants sur des articles en commun : avec Bernat, Duflo, Vergne, Maréchal, Berline et Brion.

Etes-vous toujours en contact avec vos premiers étudiants thésards ?

Avec certains d'entre eux ; mon premier thésard, Alain Guichardet et son épouse sont de très bons amis. Je vois aussi quelques autres de fois en fois - et Connes est un ami ; je le rencontre avec son épouse de façon occasionnelle.

43. Alain Connes (*1947)

44. Gustave Choquet (1915-2006)

LIVRES. ENSEIGNEMENT.

Vous êtes l'auteur d'une série de livres.

Pas vraiment nombreux. J'ai écrit deux livres pour les deux premières années à l'Université⁴⁵, appelés premier cycle à l'époque. Ils étaient en fait assez importants pour moi, puisqu'ils se sont vendus si bien qu'ils sont alors devenus une source de revenus - pas très conséquente, bien sûr ! Sinon, j'ai écrit un livre de topologie générale⁴⁶, qui n'a pas été un très grand succès. Ensuite, il y a eu un livre à propos de l'intégration de Lebesgue⁴⁷. Et ensuite, j'ai écrit mes livres de recherche mais c'est une autre histoire.

Aviez-vous une philosophie particulière sur la manière d'enseigner et la manière d'écrire ? Vos manières d'enseigner ou rédiger étaient-elle proches du style de Bourbaki ?

Ce serait probablement vrai pour les rédactions écrites. Pour les exposés oraux, j'ai vraiment une philosophie qui diffère de celle de la plupart de mes collègues. Pour faire de bons exposés, je les prépare mot à mot. La plupart de mes collègues pensent que c'est une attitude bien trop formelle, que vous devez vous appuyer sur votre inspiration. Je ne crois pas cela du tout. J'ai souvent entendu exprimer l'opinion que c'est bien de se retrouver parfois coincé ; que sans cela, les étudiants ne comprennent pas qu'il y a une réelle difficulté. Je dois dire que je ne suis pas du tout d'accord avec cela. Je faisais en général très attention d'écrire des lettres assez grandes, d'éviter de parler au tableau, etc.

Je voulais vraiment être différent de Denjoy ; on disait que, lors d'un exposé, il pensait a , il disait b , il écrivait c et c'est d qui aurait été correct ! En fait, quand j'étais étudiant à l'ENS, pendant ma seconde année, j'ai essayé de suivre un cours de Denjoy. Après le deuxième cours, j'ai laissé tomber ; c'était sans espoir pour moi. Bon, pas pour tout le monde ; Choquet était un élève de Denjoy. Je sais que le travail écrit de Denjoy est très bon. Mais comme enseignant, il était terrible. Pour les textes écrits, je dois admettre que j'aime le style Bourbaki !

Cela dépend probablement de la manière dont on l'utilise ?

Oui, bien sûr. Vous pouvez être très Bourbaki ou pas du tout ; je me placerai quelque part au milieu. Mais j'aime la structure des preuves de théorèmes. Cela est probablement un effet de ce que j'ai enduré pendant mes études à l'ENS. Pendant ces années,

45. J. Dixmier, Cours de mathématiques, 1ère année, 2ème année, Dunod

46. J. Dixmier, Topologie générale, PUF, 1981

47. J. Dixmier, L' intégrale de Lebesgue, Les Cours de Sorbonne, 1962

mes étudiants et moi lisions les livres de Goursat⁴⁸, Picard⁴⁹ et Darboux⁵⁰. Pour comprendre ce dont il était question, parfois vous deviez devinez et repartir 40 pages en arrière et en avant. Je n'aimais pas ça et, probablement en réaction, j'ai aimé une présentation très formelle, qui de plus, peut être en même temps très efficace. J'aime la brièveté, même si je peux également en voir les inconvénients. Pour les exposés, il est probablement bon d'alterner parties formelles et motivations, applications et etc. Mais je ne sais pas comment faire cela de la meilleure façon qui soit.

Et bien sûr, cela dépend de qui écoute ; les étudiants sont différents !

Eh bien, je pense qu'on ne peut pas parler d'un "étudiant de base".

Certains aiment l'intuition géométrique ; d'autres sont dégoûtés par elle...

Par exemple, Grothendieck nous avait raconté à Bourbaki des souvenirs de l'époque où il était étudiant à Montpellier. Il disait qu'il ne comprenait pas du tout la théorie des fonctions d'une variable complexe. Le professeur n'arrêtait pas de dessiner des boucles et tout ça ; pour Grothendieck, ce n'étaient pas des mathématiques. J'avais eu un tel cours avec Valiron⁵¹, qui était un enseignant très ennuyeux mais son cours était très bon. Il faisait des dessins et j'acceptais ça. Je n'insistais pas sur la rigueur alors.

LES MATHÉMATIQUES APRÈS AVOIR PRIS SA RETRAITE

Permettez que je vous interroge sur les mathématiques après que vous ayez pris votre retraite. Vous avez expliqué que vous êtes resté à l'IHES pendant cinq ans ?

Oui, de façon informelle. Je n'étais pas invité mais je suis venu vivre à Bures-sur-Yvette. Quelques amis de l'Institut m'ont gentiment offert un bureau. Je venais à l'IHES sur une base quotidienne ; c'était un environnement extraordinaire. Je n'avais jamais eu une telle stimulation excepté à Bourbaki.

Et vous avez participé à de nombreuses discussions et collaborations à ce moment-là ?

48. E. Goursat, Cours d'analyse mathématique

49. E. Picard, Traité d'Analyse

50. G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces et applications géométriques du calcul infinitésimal

51. Georges Valiron (1884-1955)

Pas à de nombreuses mais davantage qu'à Jussieu. A la fin de ma carrière, je faisais essentiellement des tâches administratives, des réunions, des conseils, etc. J'ai réussi tout de même à échapper à beaucoup de tâches administratives. A l'IHES, rien de tout ça. Et je pouvais demander à Connes, Jones⁵² et aux autres.

Avez-vous suivi le développement qui est venu du travail de Jones, l'interaction avec la théorie des nœuds par exemple ?

Un peu, certainement ! Le peu de choses que je connais au sujet de la théorie des nœuds vient de ma fréquentation de Vaughan Jones à l'IHES mais je ne les ai jamais utilisées dans mon propre travail. D'un autre côté, Jones m'a posé des questions au sujet des algèbres enveloppantes et j'ai été capable une fois de fournir un contre-exemple.

Continuez-vous d'écrire des articles de recherche ?

J'ai arrêté de travailler régulièrement à l'âge de 68 ans. J'étais à l'IHES de 60 à 65 ans. J'ai alors écrit au directeur, Marcel Berger, qu'il n'était pas correct que j'occupe un bureau parce que j'étais trop vieux et que je venais trop peu souvent. Après que j'étais à la retraite, à deux occasions, je n'ai pas pu résister à l'idée de poursuivre quelques idées. Ce travail a donné lieu à deux articles. J'ai écrit le dernier à 82 ans ; il concerne la géométrie du triangle⁵³. Bon, pas la géométrie des triangles ordinaires. Nous associons à un triangle un certain point et nous définissons de cette façon une fonction de deux variables différentiable nulle part ; nous n'avons utilisé que des méthodes d'analyse classique. Je pense que je serais incapable de travailler sur un sujet vraiment moderne. Par exemple, j'ai eu beaucoup de mal à essayer de lire le nouveau livre d'Alain Connes⁵⁴ qu'il m'a présenté.

Continuez-vous de venir à des séminaires ?

Quelquefois ! Par exemple, je ne suis pas venu au dernier Séminaire Bourbaki parce que je craignais de ne pas comprendre les exposés. J'avais un peu de doutes parce que Serre est un si bon exposant.

Utilisez-vous un ordinateur ? Lisez-vous et écrivez-vous des emails ?

52. Vaughan Jones (*1952)

53. J. Dixmier, J.-P. Kahane, J.-L. Nicolas, Un exemple de non dérivabilité en géométrie du triangle, Enseign. Math. (2) 53, no. 3-4, 369-428

54. A. Connes, M. Marcolli, Noncommutative Geometry, Quantum Fields and Motives, Colloquium Publications 55, AMS, 2008

Non, je n'ai pas d'ordinateur et je n'utilise pas le courrier électronique. Si j'avais dix ans, je serais forcé de les utiliser. Les ordinateurs ont commencé à devenir utiles aux mathématiciens quand j'avais à peu près 65 ans ; trop tard pour moi ! Et partout des gens de mon âge m'ont dit et me disent qu'ils ont des difficultés avec leurs ordinateurs. Je ne veux pas m'embêter avec ça !

Une vie secrète a des avantages ? !

Par essence, oui.

AUTRES CENTRES D'INTÉRÊT

Pouvez-vous m'en dire plus à propos de vos intérêts autres que les mathématiques ?

J'ai écrit deux livres de science-fiction - bon, des histoires courtes, pas de longs romans.

Etait-ce il y a longtemps ?

Pas si longtemps. J'avais entre 60 et 65 ans pour le premier et un peu plus pour le second. Ce sont de petits ensembles de nouvelles.

Ils ont été publiés ?

Le premier s'est vendu à 600 exemplaires. Pour le second, je ne sais même pas. Après ça, j'ai écrit une nouvelle policière et je l'ai envoyée au même éditeur mais il a dit que mes livres étaient trop difficiles à vendre.

Mais vous avez bien aimé les écrire ?

Oui. Mais je ne le fais plus. Je manque de nouvelles idées !

Vous semblez être un grand lecteur, on dirait !

Vous voyez seulement une petite partie de ma bibliothèque. Mais vous avez raison, une de mes occupations principales est la lecture.

Je voudrais vous remercier chaleureusement pour cette interview !

Martin Raussen [raussen@math.aau.dk] est professeur associé de mathématiques à l'Université Aalborg du Danemark. Dans les années 1980, il a suivi un cours sur les algèbres de Lie donné par Jacques Dixmier à Paris. De 2003 à 2008, il a été éditeur en chef de la Newsletter. En ce moment, il est éditeur associé de la Newsletter et membre du comité exécutif de l'EMS. Son domaine de recherche est la "topologie algébrique orientée", un champ de recherche principalement motivé par certains modèles de théorie du parallélisme en informatique théorique.

ANALYSE FONCTIONNELLE. — *Existence de traces non normales.*

Note (*) de M. JACQUES DIXMIER, présentée par M. Gaston Julia.

Soit H un espace hilbertien. Sur l'ensemble des opérateurs positifs de H , une fonction positive, additive, homogène, unitairement invariante, s'appelle une trace. Toute trace normale (c'est-à-dire complètement additive) est proportionnelle à la trace usuelle. Un problème assez ancien est de savoir si toute trace f est proportionnelle à la trace usuelle sur l'ensemble où f est finie. On résoudra ici ce problème par la négative.

1. Soient R l'ensemble des nombres réels, B_1 l'espace vectoriel des fonctions réelles bornées sur R . Soit G le groupe des transformations affines $x \mapsto ax + b$ de R ($a, b \in R, a \neq 0$). Le groupe G opère sur B_1 par transport de structure. Il existe ⁽¹⁾ une forme linéaire positive m sur B_1 , invariante par G , telle que $m(1) = 1$. La positivité de m et son invariance par translation entraînent que $m(f) = 0$ si f est à support compact.

2. LEMME. — Soit B l'espace vectoriel des suites infinies bornées $s = (s_1, s_2, \dots)$ de nombres réels. Il existe une forme linéaire $s \mapsto \text{Lims}$ sur B possédant les propriétés suivantes :

$$(1) \text{Lims} \geq 0 \text{ pour } s \geq 0;$$

$$(2) \text{Lim}(1, 1, \dots) = 1;$$

$$(3) \text{Lim}(s_1, s_2, s_3, \dots) = \text{Lim}(s_1, s_1, s_2, s_2, s_3, s_3, \dots);$$

$$(4) \text{ si } s, t \in B \text{ et si } s_n - t_n \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty, \text{ on a } \text{Lims} = \text{Lim}t.$$

Adoptons les notations de 1. Pour $s = (s_1, s_2, \dots) \in B$, définissons $f_s \in B_1$ de la manière suivante :

$$f_s(x) = s_i \quad \text{pour } x \in [i-1, i[\cup]-i, -i+1].$$

Posons $\text{Lims} = m(f_s)$. Les propriétés (1) et (2) sont immédiates. La fonction f_s se déduit par homothétie de $f_{(s_1, s_1, s_2, s_2, \dots)}$, d'où la propriété (3). La positivité de Lim entraîne que Lim est continue pour la norme de la convergence uniforme. Comme $\text{Lim} s = 0$ si s est à support fini, on a $\text{Lim} s = 0$ si $s_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, d'où la propriété (4).

3. Soit H un espace hilbertien séparable de dimension infinie. Soit C l'ensemble des opérateurs compacts positifs dans H . Pour tout $A \in C$, soit $\lambda_1(A), \lambda_2(A), \dots$ la suite des valeurs propres > 0 décroissantes de A , chacune écrite un nombre de fois égal à sa multiplicité (cette suite étant complétée par une infinité de zéros si A est de rang fini).

4. Fixons une suite croissante (a_1, a_2, \dots) de nombres > 0 , tels que

$$a_n \rightarrow +\infty, \quad a_1 \geq a_2 - a_1 \quad \text{et} \quad a_{n+1} - a_n \geq a_{n+2} - a_{n+1} \quad \text{pour } n \geq 1,$$

et tels que $a_n^{-1} a_{2n} \rightarrow 1$ quand $n \rightarrow +\infty$. Soit P l'ensemble des $A \in C$ tels que

$$\lambda_1(A) + \lambda_2(A) + \dots + \lambda_n(A) = O(a_n) \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

Si $A \in P$ et si U est un opérateur unitaire dans H , on a $UAU^{-1} \in P$. Si $A \in P$ et si B est un opérateur ≥ 0 dans H majoré par A , alors $B \in P$ [car on sait que $B \in C$ et que $\lambda_n(B) \leq \lambda_n(A)$ pour tout n]. Si $A, B \in C$, on a

$$(1) \quad \lambda_1(A+B) + \dots + \lambda_n(A+B) \leq \lambda_1(A) + \dots + \lambda_n(A) + \lambda_1(B) + \dots + \lambda_n(B)$$

(inégalités de Rayleigh-Ritz), donc $A+B \in P$ si $A, B \in P$.

5. Pour $A \in P$, on pose

$$s_n(A) = a_n^{-1} (\lambda_1(A) + \dots + \lambda_n(A)),$$

et

$$f(A) = \text{Lim}(s_n(A)) \in [0, +\infty[.$$

Si $A \in P$ et si U est un opérateur unitaire dans H , on a $f(UAU^{-1}) = f(A)$. Prenant A de telle sorte que $\lambda_1(A) = a_1$ et $\lambda_i(A) = a_i - a_{i-1}$ pour $i > 1$, on a $f(A) = 1$, donc f n'est pas identiquement nulle. Si $\lambda \geq 0$ et $A \in P$, $f(\lambda A) = \lambda f(A)$. L'inégalité (1) entraîne que $f(A+B) \leq f(A) + f(B)$ pour $A, B \in P$. On a $f(A) = 0$ pour A de rang fini.

6. Comme $a_n^{-1} a_{n+1} \rightarrow 1$, on a, pour tout $A \in P$,

$$s_n(A) - s_{n+1}(A) = (a_n^{-1} a_{n+1} - 1) s_{n+1}(A) - a_n^{-1} \lambda_{n+1}(A) \rightarrow 0,$$

donc

$$f(A) = \text{Lim}(s_2(A), s_2(A), s_4(A), s_4(A), s_6(A), s_6(A), \dots),$$

donc, d'après le lemme 2,

$$(2) \quad f(A) = \text{Lim}(s_2(A), s_4(A), s_6(A), \dots).$$

Pour $A, B \in C$, on sait ⁽²⁾ que

$$(3) \quad \lambda_1(A) + \dots + \lambda_n(A) + \lambda_1(B) + \dots + \lambda_n(B) \leq \lambda_1(A+B) + \dots + \lambda_{2n}(A+B),$$

donc, si $A, B \in P$,

$$\begin{aligned} f(A) + f(B) &\leq \text{Lim}(a_n^{-1} (\lambda_1(A+B) + \dots + \lambda_{2n}(A+B))) \\ &= \text{Lim}(a_{2n}^{-1} (\lambda_1(A+B) + \dots + \lambda_{2n}(A+B))), \end{aligned}$$

donc, d'après (2), $f(A) + f(B) \leq f(A+B)$. Ainsi, f est additive.

Posant $f(A) = +\infty$ pour $A \geq 0$ et $A \notin P$, f est une trace non proportionnelle à la trace usuelle sur l'ensemble P où f est finie ⁽³⁾.

(*) Séance du 9 mai 1966.

(1) J. VON NEUMANN, *Fundamenta Mathematicae*, 3, 1929, p. 73-116 (et plus spécialement p. 90 et 95).

(2) J. HERSCH, *Comptes rendus*, 252, 1961, p. 1714 et 2496. Soit E_n l'ensemble des projecteurs orthogonaux de rang n dans H . Les méthodes maximinales montrent facilement que $\lambda_1(A) + \dots + \lambda_n(A) = \sup_{P \in E_n} \text{Tr}(PAP)$, ce qui entraîne aussitôt les inégalités (1) et (3) (ceci est l'idée de Hersch).

(3) M. N. ARONSZAJN, alors que j'étudiais $\text{Lim}(n\lambda_n(A))$, m'a suggéré d'étudier $\text{Lim}((\log n)^{-1} (\lambda_1(A) + \dots + \lambda_n(A)))$.