# Les processus mentaux de la création

**Gustave Choquet** [1]

A 30 ans, on cherche et on trouve ; un peu plus tard on forme des chercheurs, et plus tard encore on parle des processus mentaux de la création : c'est ce que je me propose de faire ici.

Je ne donnerai pas de recette pour devenir un découvreur, cela s'apprend en découvrant. Mais plusieurs fois j'ai constaté qu'une réflexion sur les raisons d'un succès, améliorait mes recherches ultérieures ; mon expérience peut donc être utile.

Il semble d'ailleurs que de plus en plus de chercheurs comprennent qu'il n'est pas possible de dissocier la science de l'activité humaine qui la crée ; et qu'ainsi les millions de théorèmes qui reposent sur les rayons des bibliothèques ne sont que la cendre refroidie, d'ailleurs précieuse, du feu créateur qui les a fait naître ; d'où chez les chercheurs un intérêt grandissant pour l'histoire des sciences et techniques.

Les témoignages de chercheurs, sans être encore nombreux, constituent néanmoins une bonne base d'étude ; j'en citerai quelques uns : celui de René Descartes qui, le 10 Novembre 1619, à 23 ans, dans une nuit d'enthousiasme fait trois rêves exaltants et découvre les fondements "d'une science admirable" (voir Bell, "Men of mathematics"). Le récit d'Henri Poincaré concernant sa découverte des groupes fuchsiens et de leur lien avec certaines formes quadratiques, est célèbre à juste titre.

Jacques Hadamard a réuni en 1959 ses analyses commencées en 1937 sur la psychologie de l'invention (134 pages).

Paul Levy, en 1970, s'est longuement exprimé dans "Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien" (Albert Blanchard, épuisé).

---

1. Séminaire de philosophie et mathématiques, 1994, fascicule 4, p.1-21, http://www.numdam.org/item?id=SPHM$_1$994$_{4A1_0}$, ©ENS, IREM Paris Nord, Ecole centrale des arts et manufactures, 1994.
Synthèse de trois conférences : Séminaire Loi (1993), à Clermont-Ferrand (1994) et à Koxty ( ?) (République Tchèque, 1994).

En 1976 j'ai, dans le Séminaire Loi, parlé de "La naissance de la théorie des capacités" (publié dans "La vie des Sciences" de l'Académie des Sciences, 1986).

Laurent Schwartz, après avoir en 1982 raconté à l'Université de Patras (Grèce) l'histoire de sa théorie des distributions, a fait en 1987 une conférence sur la découverte en Mathématiques.

André Weil et Alain Connes, plus récemment, se sont aussi exprimés brièvement à ce sujet dans la revue "Pour la Science".

Dans les sciences expérimentales, les témoignages abondent : Ceux de Newton, Pasteur, Darwin, Einstein, Fleming, Watson ("La double hélice", 1968). En chimie le demi-rêve de Kekule qui, d'après lui, l'aurait conduit à la structure hexagonal du benzène (un serpent se mordant la queue) est notable car il est exceptionnel que les rêves conduisent à des découvertes importantes.

## Le cerveau, organe de notre pensée

Bien que l'introspection ait été longtemps un outil essentiel d'étude des processus mentaux, et qu'elle joue encore un rôle important (le livre d'Hebb de 1949 reste un ouvrage de référence), des outils performants tels que l'imagerie médicale permettront certainement de progresser dans l'étude de ces processus. Le terrain aujourd'hui est encore peu sûr ; on sait toutefois que toutes les parties du cerveau sont interdépendantes et que son fonctionnement est extrêmement complexe ; ce que j'en dirai aura surtout pour but de souligner cette complexité, et de justifier en partie certaines affirmations.

Une vue fort schématique du cerveau lui attribue une structure ternaire :

- Le cerveau postérieur, dit parfois reptilien, regroupe la moelle épinière, le bulbe rachidien, le mésencéphale. Il est responsable de la vie inconsciente des organes et de pulsions primitives.
- Le système limbique regroupe des structures très diverses, telles que l'hippocampe, l'hypothalamus. Il joue un rôle important dans la mémoire et la genèse des états de motivation. Ses lésions modifient les comportements alimentaires, sexuels, sociaux.

- Le néo-cortex (ou cortex, ou matière grise).

Ces trois parties sont interconnectées et jouent donc un rôle dans le processus de la recherche, ce qui après coup justifie la phrase célèbre de Pascal "L'homme n'est ni ange ni bête". Il est probable que leur plus ou moins grand rôle détermine le style de la recherche.

Les connections cérébrales sont redondantes, à des degrés variés, ce qui explique peut-être que la folie ou la dépression n'empêche pas toujours le travail mathématique, artistique ou littéraire : rappelons le cas d'André Bloch qui, après avoir tué à coups de hache plusieurs membres de sa famille entra en relation, de son asile-d'aliénés, avec Georges Valiron et découvrit plusieurs beaux théorèmes ; et celui plus célèbre encore de Cantor, victime dès l'âge de 46 ans de graves crises de dépression, mais qui après ces crises se sentait l'esprit très clair et faisait d'excellent travail.

**Neurones**

Notre cerveau comporte de 50 à 100 milliards de neurones. Chacun d'eux est constitué d'un corps cellulaire contenant le noyau, d'où émergent d'une part de nombreuses dendrites munies de protubérances appelées épines, d'autre part un long axone muni à son extrémité de nombreuses terminaisons axonales.

Chaque neurone est en relation avec d'autres neurones par des synapses, les unes électriques, d'autres chimiques, qui unissent épines et terminaisons axonales. Certains neurones peuvent avoir jusqu'à 30 000 synapses avec d'autres neurones ; il peut exister aussi certaines relations de neurone à neurone à travers leurs axones.

Bien qu'élevé, le nombre des neurones et des synapses n'expliquerait sans doute pas la multitude de possibilités de notre cerveau : pensons par exemple à la vision d'un paysage en mouvement et à son enregistrement ne serait-il que partiel. La solution de cette énigme semble résider dans une observation mathématique élémentaire : Un ensemble fini de $N$ éléments contient $2^N$ sous-ensembles distincts, nombre gigantesque dès que $N$ dépasse 1000 ; si donc neurones et synapses s'organisent en groupements fonctionnels, le nombre de ces groupements peut être d'un ordre de grandeur incomparablement supérieur au nombre de ces neurones et synapses.

Les plus petits de ces groupements ont une structure en réseaux vaguement rectangulaires ; ce sont des sous-unités de traitement (recevant par exemple des informations visuelles, auditives, tactiles) qui peuvent elles-mêmes s'organiser en assemblées plus importantes que j'appellerai ici faisceaux.

## Associations d'idées et facilitation

Les connections de neurones dans les réseaux et faisceaux expliquent les précieuses associations d'idées qui sont une base essentielle du fonctionnement, conscient ou non, du cerveau.

C'est elles qui se manifestent dans les calembours et coq-à-l'âne ; mais les personnes âgées en prennent conscience de façon encore plus tangible lorsqu'elles perdent la mémoire des noms propres ou de certains noms communs ; elles peuvent souvent les retrouver par un long cheminement conscient, de proche en proche, utilisant analogie ou chronologie. Le fait qu'elles conservent plus longtemps leur maniement de notions complexes, leur possibilité de discourir longuement, s'explique par le fait, justement, de cette complexité : ces activités peuvent s'effectuer de nombreuses façons différentes, grâce à des chaînes variées d'associations d'idées, et leur but n'est pas un point précis, mais une zone assez floue mais étendue.

Les associations d'idées sont aussi une des explications des rêves, de leur motivation - liée tantôt à notre vie active, tantôt à un passé lointain - , mais aussi de leur mélange de fantaisie et de cohérence : car si les associations d'idées obéissent au même déterminisme physico-chimique que les neurones, elles dépendent aussi comme eux d'un chaos déterministe qui nous apparaît comme le fruit du hasard, de la fantaisie.

Mais surtout c'est leur vie souterraine, cachée, qui nous donne l'explication du subconscient (ou préconscient de Freud) et sans doute de l'inconscient, dans la mesure du moins où celui-ci a une réalité définissable et n'est pas simplement un subconscient profond et refoulé depuis longtemps.

Je vois dans le subconscient la source de ce que j'appellerai illumination (pour les mystiques on dit révélation, et pour les poètes et musiciens, inspiration) ; et aussi un des facteurs de l'intuition.

### Subconscient, illumination, hasard, intuition

Le subconscient travaille sans relâche ; les associations d'idées qui en sont la base ne se font pas arbitrairement ; leur dynamique est régie en partie par le hasard, mais surtout par le phénomène de *facilitation* (les interactions entre neurones au niveau des synapses sont plus ou moins grandes, en fonction de leur activité passée). Ce phénomène rend compte de nos habitudes, du petit robot qui semble prendre en charge certaines de nos actions ; d'où l'importance considérable, bénéfique ou néfaste, de l'éducation, qu'elle vienne du monde extérieur ou de notre activité cérébrale consciente.

L'activité subconsciente peut impliquer simultanément plusieurs aires corticales : on peut être au même instant amoureux et préoccupé d'un problème mathématique.

Chez un mathématicien qu'un problème a intéressé, récemment ou dans le passé, s'est constitué à son insu un groupement de faisceaux liés à ce problème, et dont l'activité peut s'être progressivement renforcée par des retours conscients au problème. Dans des cas favorables, par exemple grâce à des contacts mathématiques en apparence sans rapport avec le problème, ce groupe de faisceaux acquiert une vie cohérente et assez intense pour qu'un petit événement (par exemple détente après une grande fatigue, changement agréable d'activité, ou une simple tasse de café) déclenche brusquement un passage du subconscient au conscient : c'est l'*illumination*, expérience merveilleuse dont on garde précieusement le souvenir. Elle ne diffère que par la nature de son objet de l'extase mystique, ou de l'inspiration des grands artistes ou poètes qui leur permet de réaliser en un temps très bref des œuvres qui nous étonnent (Mozart, etc.).

Stendhal donnait à ce phénomène le nom de *cristallisation*, qui évoque le changement brusque d'état d'une solution saline sursaturée ou le gel brutal d'une eau en surfusion.

J'ai raconté déjà dans le Séminaire Loi les illuminations, grandes ou petites qui m'ont conduit, vers 1950, à créer la théorie des capacités ; en voici une autre : vers 1960 j'avais pris nettement conscience qu'il y avait en Analyse des cônes convexes importants sans base compacte (e.g. le cône des fonctions réelles sur $\mathbb{R}$ dont toutes les dérivées sont positives) ; je ne savais donc pas, en particulier, s'ils possédaient tous des génératrices extrémales. Je cherchais donc à construire de tels cônes sans génératrices extrémales, par un procédé de limite projective à partir de cônes ayant une base compacte. Et voici qu'un matin du printemps 1962, alors qu'avec ma femme je passais une semaine de vacances dans un petit hotel de Barbizon, nous décidons d'aller nous promener en forêt ; un seul pas séparait notre chambre du sable de la forêt ; je franchis le seuil et "Joie, pleurs de joie" : Oui, comme on coupe en biseau une branche pointue avec une lame aiguisée, il faut, de ces cônes détacher un petit copeau compact, convexe ainsi que le reste du cône. En une minute je vois la structure des opérations à effectuer sur ces copeaux, appelés plus tard "chapeaux", et comment les utiliser.

C'est une illumination du même type qui donna à Schwartz sa théorie des distributions : en 1935 nous avions tous deux organisé l'Ecole Normale Supérieure un baby-Séminaire où je parlais des travaux de Baire et de Cantor, et où lui parlait de son anxiété devant les comportements différents des équations

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0;$$

cette anxiété le poursuivit jusqu'en 1944. Il n'avait pas cessé pendant ces 10 années de s'intéresser aux équations linéaires aux dérivées partielles, sans pouvoir pénétrer le secret de leur vie cachée ; mais son subconscient travaillait lui aussi de son côté. C'est alors qu'arrive 1944 ; je venais, avec Jacques Deny, de terminer un travail sur une caractérisation des fonctions polyharmoniques dans le plan ; nous y utilisions les séries de Fourier, ce qui ne s'étendait pas à l'espace à 3 dimensions ; je demandai alors à Schwartz s'il connaissait une façon de s'en passer ; il la trouva assez rapidement en utilisant des fonctions indéfiniment dérivables à support compact, et peu de temps plus tard, une illumination lui donna au cours d'une seule nuit, en utilisant une idée analogue, la plupart des théorèmes de sa théorie.

Citons encore deux mathématiciens fort différents l'un de l'autre :

Jean Dieudonné, cité dans le livre de Pierre Dugac (Gabay 1995) : "Qu'est-ce qui se passe dans la vie d'un chercheur ? On est sur un problème ; on réussit quelquefois et il y a même ce qu'on appelle des illuminations... Moi je peux dire que cela m'est arrivé trois ou quatre fois dans ma vie en tout".

Alain Connes : "En revenant de conduire ma femme au lycée, alors que je pensais à tout autre chose, j'eus la certitude absolue, devant un feu rouge, que les calculs longs et pénibles que je faisais depuis 6 mois, s'éclairaient à la lueur d'une astuce mathématique. Tout s'était passé comme si mon inconscient s'était brutalement exprimé".

Certes de grandes illuminations de ce type restent des instants mémorables de notre vie, mais toute activité mathématique qui ne soit pas de pure routine est parsemée de mini-illuminations. C'est par exemple celle de l'élève lent mais obstiné qui, après bien du travail et quelques aides extérieures dit brusquement "J'ai compris" et toute sa journée en est éclairée, et parfois sa vie changée : il vient de subir une mutation mentale.

J'ai souvent constaté que des mini-illuminations pouvaient être déclenchées par des modifications physiologiques : se lever ; faire quelques pas après une longue station assise ; se livrer à une activité très différente, lecture, musique, marche ; sortir d'un engourdissement qu'on finirait par confondre avec du travail.

*Le hasard.* Il est temps de dire clairement ici qu'un chercheur débutant qui attendrait d'une illumination ou d'un hasard heureux la solution d'un problème difficile irait vers des désillusions. On souligne parfois le rôle du hasard dans une découverte scientifique, et on cite le cas de Fleming qui, arrivant un matin dans son laboratoire découvre sur la gélatine d'une boîte de Petri abandonnée un rond, vide de bactéries ; une analyse lui montre que le responsable de ce rond - qui fait penser aux "ronds de sorcière" dans certains prés - est une moisissure du genre pénicillum : il vient de découvrir la pénicilline, le premier d'une longue série de nos antibiotiques.

Mais Fleming était déjà un bactériologiste compétent ; depuis plusieurs années il avait mis en évidence dans la salive et dans les larmes des substances antibiotiques ; et c'était un esprit curieux, exigeant, qui, mis en présence d'un petit fait inattendu, en cherchait l'explication. Un autre chercheur, moins motivé par une longue recherche préalable, et aussi moins exigeant, aurait rageusement jeté à la poubelle cette boîte de Petri gâchée, ce que ne fit pas Fleming.

L'anthropologue qui, tête baissée marche lentement sous le soleil dans la vallée de l'Omo, à la recherche du "chaînon manquant" et qui heurte du pied une mâchoire d'homme fossile, a-t-il mérité sa chance ?

Il y a des hasards qui peuvent devenir heureux, mais seulement pour les chercheurs qui l'ont mérité par un long travail préalable, de l'intelligence et une curiosité qui ont développé en eux sens critique et intuition. "Tu ne me chercherais pas si tu ne m'avais déjà trouvé" ; cette phrase de Pascal pourrait conclure ma réflexion sur le hasard, mais je préfère la conclure par une anecdote : voici quelques années j'accompagnais mon ami Jacques Deny dans un petit bois, à la recherche d'un petit champignon curieux qui ne pousse que dans le chrysalide d'un papillon précis ; il en trouva de nombreux spécimens ; je n'en trouvai pas un seul, mais il était mycologue et je ne l'étais pas.

*L'intuition.* Comme les illuminations, elle dépend des associations d'idées ; mais contrairement aux illuminations, c'est un état acquis, stable et qui peut s'enrichir par un travail soutenu, bien que son acquisition dépende beaucoup de dons innés.

Elle apparaît comme une connaisance globale et presque immédiate d'un vaste domaine, mais c'est une connaisance non déductive et parfois assez floue ; l'intuitif est semblable au jeune bébé qui, d'un seul coup d'œil, reconnaît sa mère ; il est plus un stratège qu'un tacticien qui, lui, a besoin de connaître les détails et leurs relations mutuelles.

- Pour un géomètre intuitif, la division du plan en deux régions par toute courbe fermée est une évidence, même s'il n'en a pas de preuve.
- Le Saint Curé d'Ars avait une telle intuition des problèmes moraux de ses pénitents que son confessionnal ne désemplissait pas.

Au début de mes recherches j'avais l'ambition de bien connaître tous les ensembles fermés plans, ambition irréaliste certes, mais j'avais néanmoins réussi à me sentir proche d'eux et à deviner, souvent avec succès, leurs propriétés topologiques : j'en avais l'intuition ; c'est qu'en effet l'intuition se développe *par le travail*, beaucoup de travail conscient ; c'est un ensemble déjà bien organisé d'associations d'idées liées à la mémoire parfois ancienne et dont on n'a conservé que celles qu'un jugement subconscient ou partiellement conscient juge bonnes.

Glaeser qui s'est beaucoup occupé de la formation des géomètres différentiels, leur conseillait de se constituer un florilège personnel d'êtres différentiels remarquables, éventuellement pathologiques, dont l'ensemble constituerait une bonne approximation du domaine étudié. On pourrait presque dire que l'intuition, qui doit être une des qualités d'un stratège se construit par un patient travail préparatoire de tacticien. Un tel travail préalable éviterait à certains débutants des échecs cuisants lorsque par exemple ils se lancent dans l'étude d'une structure axiomatique sans avoir vérifié l'existence d'êtres intéressants vérifiant les axiomes.

L'exemple des géomètres algébristes italiens montre clairement tout ce qu'une bonne intuition peut apporter, et aussi ses limites. Ces géomètres avaient étudié tant de courbes et surfaces qu'ils avaient énoncé sans démonstrations des théorèmes généraux d'une grande beauté ; mais il fallut attendre pour leur preuve la naissance d'outils nouveaux (A. Weil, etc.).

L'exemple d'Euclide est également éclairant ; parmi ses axiomes figure celui-ci "Une ligne droite est une ligne (i.e. "qui a une longueur sans largeur") qui repose également avec les points sur elle même". Euclide avait certainement une grande intuition géométrique et cet axiome devait avoir pour lui un sens précis, mais aucun commentateur, pas même Proclus n'a bien réussi à le comprendre.

Tous les bons chercheurs ont de l'intuition, qu'elle soit géométrique, algébrique ou combinatoire ; sinon leur démarche s'apparenterait à une reptation plutôt qu'au survol indispensable pour attaquer les problèmes aux points sensibles, et planifier leur recherche. Mais il faut, impérativement, vérifier les théorèmes suggérés par l'intuition, par de véritables démonstrations ; celui qui se contente de lancer des idées sans prouver des théorèmes n'est pas un mathématicien ; il est ce que les Américains appellent un "theoretical mathematician", ce que je traduirai plutôt par "mathématicien flou".

Je possède une intuition géométrique et celà, je crois, depuis la classe de 1$^{\text{ère}}$ ; j'aimais la géométrie et j'avais pris l'habitude de résoudre de tête, dans l'obscurité, des problèmes assez complexes de géométrie plane ou spatiale. Je pense que mes contributions en Analyse et en Topologie sont toutes nées d'une vision géométrique, souvent très simple, des problèmes : par exemple en Théorie du potentiel, c'est la géométrie du triangle qui m'a donné une des clefs de l'étude des grands principes de cette théorie.

Je me sens très proche d'Henri Lebesgue ; lorsqu'il était jeune normalien et qu'on lui enseignait que les surfaces applicables sur le plan sont réglées, il sortait de sa poche un mouchoir ou un papier bien chiffonné et demandait à ses camarades "Cette surface est-elle réglée ?". Ce mouchoir fut le point de départ de sa thèse et de sa théorie de l'intégration. Plus tard, c'est la vue d'un mur de briques en construction, où il observa que ce mur comportait toujours des points de contact de 4 briques, qui le conduisit à la meilleure définition existante de la dimension topologique d'un continu.

Citons Lebesgue "Je veux dire ici que toutes mes recherches ont ce caractère commun de procéder d'une vue directe, et en quelque sorte géométrique, des problèmes étudiés". Et ailleurs "J'ai toujours été guidé dans mes recherches par des considérations géométriques ; il me semble que j'ai fait constamment des applications de la géométrie à l'Analyse".

Mais Lebesgue a fait aussi une autre remarque intéressante : "Non, ce n'est pas l'intuition qui trompe, c'est le fait de ne pas avoir assez d'intuition". Certes, mais on pourrait dire aussi : c'est le fait de ne pas vérifier pas à pas les suggestions de l'intuition ; ce qui me conduit à rappeler une erreur célèbre de Lebesgue : dans un de ses mémoires célèbres, il énonce que la projection de tout ensemble borélien est aussi un ensemble borélien, en utilisant la relation visiblement fausse $p(\cap_n X_n) = \cap_n p(X_n)$ ; son théorème était faux et l'erreur, relevée par Lusin, conduisit Lusin et Souslin à la belle théorie des ensembles dits analytiques. Erreur fructueuse donc, mais erreur quand même, née d'une insuffisance de vérification.

Les intuitions des bons chercheurs ne sont pas toutes géométriques, même lorsque comme André Lichnerovicz ils sont géomètres différentiels. Michel Talagrand a une intuition combinatoire qui s'est confirmée au cours de sa carrière ; ses succès récents dans l'étude des processus gaussiens et des produits infinis de mesures sont dus à cette intuition.

Laurent Schwartz a un type d'intuition difficile à classer ; elle n'est certainement pas géométrique ; il ne "voit" pas géométriquement dans l'espace et prétend qu'il ne voit que par le calcul, même s'il ne s'agit, par exemple, que de troncatures de polyèdres convexes réguliers. On pourrait qualifier son intuition de culturelle ; il a en effet une vaste culture mathématique, qui figure dans sa conscience comme un ensemble de fils tendus entre de nombreuses théories (concrétisées par ses dossiers). Quand il cherche, il se réjouit de "sécher" en se disant que si ça résiste, c'est que c'est intéressant puisque ce qu'il connaît ne lui apporte pas de réponse.

On oppose parfois abstraction et intuition, en sous-entendant sans doute que l'intuition concerne le concret. Ce n'était certainement pas l'avis de Jean Dieudonné qui déjà, à propos de sa thèse, déclarait : "Dans les démonstrations de beaucoup de propositions de ce travail, je n'ai pas craint de faire appel à l'intuition géométrique". Mais surtout, dans un intéressant article de Dialectica, Vol.29, 1975, il étudie les liens entre abstraction et intuition :

"La qualité essentielle d'un mathématicien est l'imagination ; la logique ne sert qu'à mettre les démonstrations sous une forme irréfutable, elle est incapable de les suggérer. L'imagination se fonde sur une sorte d'"intuition" des objets mathématiques étudiés, mais cela n'a que très peu de contact avec ce qu'on appelle d'ordinaire l'intuition sensible, les objets mathématiques considérés étant le plus souvent l'aboutissement d'un long processus d'abstraction qui leur ôte toute possibilité de représentation concrète. Cette "intuition" mathématique est avant tout le résultat d'une longue familiarité avec le sujet étudié ; mais en outre il peut s'opérer des "transferts" d'intuition d'une théorie dans une autre... La première conclusion que j'en tirerai, c'est qu'il n'y a certainement pas une intuition en mathématiques ; il y en a toute une série de fort diverses, avec des liens inattendus. La deuxième, c'est que les intuitions mathématiques ne sont pas du tout stables, elles se modifient sans cesse par de nouveaux apports, de nouveaux résultats, de nouvelles idées... Je crois que les progrès de l'intuition mathématique... , sont toujours allés de pair avec les progrès de l'abstraction mathématique".

Cette analyse de Jean Dieudonné est remarquable, et surprend aujourd'hui sous la plume de celui qui, onze ans plus tôt, dans l'introduction de son livre "Algèbre linéaire et géométrie élémentaire" (Hermann 1964) soutenait que l'enseignement de la géométrie élémentaire doit être basé sur l'algèbre linéaire. Il n'avait pas encore compris que l'intuition des objets de cette algèbre ne s'obtient que par un "transfert" progressif à partir de l'intuition géométrique, essentiellement visuelle, acquise par le maniement préalable de concepts issus du monde sensible, droites et parallélisme, distance, cercles, orthogonalité.

Les transferts d'intuition et de savoir-faire sont importants et même essentiels pour le progrès dans tout genre d'activité humaine ; le psychologue Henri Pieron l'a bien souligné dans le "Traité de psychologie appliquée" ; mais ils supposent toujours, bien sûr, une bonne maîtrise d'une activité initiale.

Le physicien Anatole Abragam en souligne l'importance, sans utiliser d'ailleurs le mot de "transfert" : on sait bien que le renouvellement de la science se fait souvent aux points de contact de deux disciplines jusque-là étrangères ; comment alors un chercheur va-t-il utiliser dans une discipline l'intuition acquise dans l'autre ; voici ce qu'en dit Abragam :

"Un chercheur qui s'est confirmé dans une discipline et qui en aborde une autre, peut retrouver l'enthousiasme de ses débuts. Il n'y arrive pas les mains vides. Il apporte avec lui des concepts, des habitudes de pensée, des méthodes et des techniques qui lui permettent d'aborder des problèmes d'une façon nouvelle pour le laboratoire qui l'accueille. Il y a là une cross-fertilisation".

J'ai pu vérifier moi-même cette observation lorsque, en 1980, je commençai à me passionner pour un problème à la frontière de l'Analyse et de la Théorie des nombres, à savoir l'étude de la distribution des points $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ modulo 1 sur le cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, et plus généralement les suites $(k\theta^n)$ modulo 1, où $k, \theta$ sont réels et $\theta > 1$.

### Stratèges, tacticiens et les deux hémisphères du cortex

Notre cortex est divisé en deux parties appelés hémisphères et réunies par le corps calleux de couleur blanche. Ce corps calleux a une importance considérable ; si on le sectionne, les deux hémisphères deviennent presque indépendants ; son importance est telle que si à la naissance il est peu développé, d'autres voies se créent entre les deux hémisphères. C'est son existence qui explique les correspondances notées par des écrivains et des poètes : Baudelaire dans son sonnet "Correspondances".

> "Les parfums, les couleurs et les sons se répondent
> ........................................................
> Il est des parfums frais comme des chairs d'enfant,
> Doux comme les hautbois, verts comme les prairies"

Rimbaud, jeune poète inspiré, dans le sonnet "Voyelles" écrit à 16 ans

> "A noir, E blanc, I rouge, U vert, O blanc, voyelles,
> Je dirai quelque jour vos naissances latentes".

Est-il utile aussi de rappeler les pages célèbres de Marcel Proust sur le flot de souvenirs que réveille le goût d'une madeleine ?

Bien qu'il n'y ait pas de certitude absolue sur les rôles respectifs des deux hémisphères, de nombreux neurologues sont assez d'accord sur les faits suivants (chez les droitiers) révélés par l'observation des blessés et par la tomographie.

Relèvent de *l'hémisphère gauche* les processus déductifs linéaires ; la pensée logique et analytique ; les capacités linguistiques ; apprentissage, production et compréhension du langage : ceux, en gros où excellent les *tacticiens.* Cet hémisphère est bien adapté à la vie quotidienne, mais il est trop critique et sans grande intuition ni créativité. Ce que mesurent les tests de QI sont essentiellement les performances de cet hémisphère.

Relèvent de *l'hémisphère droit* l'imagination, la reconnaissance des formes, la créativité, les associations d'idées multiples, les fonctions intellectuelles non verbales et un traitement global des informations. C'est l'hémisphère des *stratèges.* Il jouerait peut-être un rôle dans l'élaboration des rêves. Cet hémisphère voit le monde sous des couleurs parfois déplaisantes et hostiles.

Le droit invente, le gauche enseigne ces découvertes, en parle rationnelle-ment, les met en forme. Mais cette dichotomie ne doit pas être exagérée ; en particulier, il peut y avoir substitution de leurs activités en cas de besoin, par exemple lors de la lésion d'un hémisphère. Et surtout le progrès scientifique exige la collaboration de deux tels hémisphères, qu'ils appartiennent tous deux à un même individu, ou à deux individus qu'on pourrait appeler complémentaires : c'est peut-être là l'explication du succès de la collaboration de certains couples de chercheurs, dont le plus fameux fut sans doute le couple Einstein, Mileva Mariċ, en 1903-1905, avant même leur mariage ; Einstein ayant les idées, Mileva les discutant apportant sa virtuosité mathématique.

Certes les caractéristiques respectives des deux hémisphères que je viens d'évoquer font un peu trop penser aux affirmations graves des voyantes extralucides. Toutefois pour chacun d'eux le faisceau de ces caractéristiques semble assez cohérent et suggère l'intérêt d'une étude expérimentale des corrélations entre les compétences supposées d'un même hémisphère et des corrélations croisées entre les deux hémisphères.

Il semblerait en tout cas que chez les bébés et les jeunes enfants ce soit l'hémisphère droit qui domine.

Il est probable aussi que le style des recherches d'un mathématicien révèle la prédominance d'un de ses hémisphères ; c'est ainsi que je déciderais volontiers que mon hémisphère dominant est le droit : goût de la poésie, de la rêverie, difficultés linguistiques (je conçois facilement, mais souffre pour mettre en forme mes pensées). Il semble que, l'âge venant, mon intuition géométrique s'exerce encore sur de nombreux îlots assez représentatifs d'un champ assez vaste, mais que la mise en ordre, puis en forme, de ces observations intérieures demanderait des dons de tacticien qui me font défaut. C'est pourquoi la plupart de mes travaux ont concerné des structures si simples à mes yeux que j'ai de chacun d'eux une vision immédiate et facilement communicable : "C'est trivial" ai-je envie de dire quand j'en parle ; par contre les deux seuls articles assez techniques que j'ai publiés m'ont coûté de pénibles efforts de rédaction, bien que leur conception ne m'ait pris que quelques heures.

Je souffre assez peu pour préparer une conférence, mais incomparablement plus pour la rédiger !

## Facteurs propices à la création

### Jeunesse

Neurones et faisceaux de neurones sont encore presque intacts, énergie nerveuse et sexuelle à son summun (pensons à Einstein et Mileva), aptitude à une concentration prolongée, curiosité encore fraîche, un cerveau peu encombré par les préjugés du passé : Newton à 23 ans, en 1666, fait les trois découvertes qui lui assureront l'immortalité.

Einstein à 26 ans, en 1905, fait lui aussi trois de ses plus belles découvertes.

### Motivation

La motivation, née d'une pulsion intérieure, soutenue d'abord par l'approbation d'un maître et l'estime des pairs mais soutenue ensuite par les défis, intérieurs ou extérieurs, par le plaisir de faire fonctionner son cerveau et, pourquoi pas, par l'espoir de laisser un nom célèbre, ainsi que nous le confie André Weil "Dès mon jeune âge, j'ai espéré que mon travail aurait une certaine place dans l'histoire des mathématiques. N'est-ce pas une motivation aussi noble que de prétendre au Prix Nobel ?".

En ce qui me concerne je voudrais dire que ma motivation a toujours été le plaisir de créer de belles mathématiques, utiles ou simplement élégantes, et d'avoir l'approbation de mes pairs. Puis-je ajouter que j'ai souvent été étonné que la société me donne un salaire convenable pour une activité qui me procure tant de plaisir, alors que nombre de mes contemporains reçoivent un salaire très inférieur pour un travail répétitif et ennuyeux.

L'enthousiasme, la joie de la création, les instants brefs mais inoubliables des illuminations, sont le véritable aiguillon du chercheur. Que Dieu a dû bien s'amuser pendant les six jours de la création, mais quel ennui après le jour de repos !

En Mai 68, j'ai entendu des étudiants, mécontents de leur passivité dans les salles de cours, dire à leur professeur : "Nous avons tous le droit de faire de la recherche ; dites-nous ce qu'il faut faire et nous le ferons". Je vois dans cette déclaration à la fois une critique des cours magistraux, et aussi une méconnaisance des facteurs qui soutiennent l'activité du chercheur, en particulier succès et enthousiasme qui s'engendrent mutuellement. Comme le dit le physicien George Charpak "Si la vie d'un chercheur se résume à exécuter des tâches qu'il ne trouve pas intéressantes, autant entrer dans l'industrie". (C'est dur pour l'industriel).

### Facteurs sociaux, émulation

Je voudrais revenir un instant sur le rôle des facteurs sociaux, de l'émulation et des challenges. Que la recherche en sciences expérimentales, avec ses laboratoires et ses équipes ait besoin d'une société bien organisée est une évidence. Mais c'est vrai aussi de la recherche mathématique, et pas seulement à cause de l'utilisation accrue des ordinateurs et du développement du travail en équipe ; c'était vrai déjà du temps d'Euclide et d'Archimède où les Académies, le soutien de princes éclairés, l'échange de lettres, constituaient une stimulation indispensable ; c'était vrai au XVII$^{\text{ème}}$ siècle où le Père Mersenne, conscient de ce besoin, se fit la boîte-aux-lettres mathématique de l'Europe. La recherche mathématique a commencé avec la naissance des grandes villes ! Un Robinson Crusoe, mathématicien avant son naufrage, et encore productif sur son île, est-il crédible ?

Jusqu'à quand notre République étouffera-t-elle l'éclosion des talents dans nos écoles de tous niveaux en luttant, par la loi et par des mesures de fausse démocratisation contre émulation et compétition ; ce n'est pas seulement sur les stades que la compétition est indispensable !

### Les excitants

J'ai mentionné déjà l'importance pour Einstein au début de ses travaux, de ses liens amoureux avec Mileva. Il y eut alors une conjonction heureuse de cet amour mutuel et de l'excitation cérébrale apportée par leur collaboration.

Une relation amoureuse peut donc être un facteur favorable à la recherche, mais elle est rarement neutre et peut au contraire avoir un effet déstabilisant.

Puis-je rappeler enfin l'importance du thé et du café ? Lorsque mon ami

Marcel Brelot, après une période de dure recherche sans succès sentait que cependant il avait en mains tous les atouts, il s'enfermait dans son vaste bureau de l'Institut Fourier de Grenoble et se faisait une tasse de thé fort pour provoquer le déclic, l'illumination cherchée car, disait-il, les découvertes se font lors de pointes de l'activité cérébrale, après un long travail de défrichement. (Mais aucune tasse de thé ne transformere un champion du 100 m en marathonien).

Est-il nécessaire de souligner ici l'illusion de l'efficacité de "drogues" pour réussir en recherche ? Je ne connais aucun chercheur scientifique dont les découvertes aient été faites sous l'emprise de la drogue.

## Facteurs défavorables

### Age

Les soucis, la fatigue physique ou nerveuse, et l'âge : à 30 ans le travail vous tire en avant, à 70 il faut le tirer, et c'est difficile ! Mais si un âge avancé n'est jamais favorable à la découverte, une meilleure hygiène alimentaire, de meilleures relations scientifiques allongent la période de productivité des mathématiciens. Sans donner de chiffres précis, disons seulement qu'à 60 ans ou même un peu plus, ils peuvent encore faire des travaux de qualité honnête et rendre des services à la communauté mathématique s'ils acceptent de ne pas utiliser leur notorieté pour soutenir abusivement des recherches qui prolongent les leurs.

Et puis parfois, une bonne surprise, telle celle d'Apery qui à 61 ans démontra l'irrationalité de $\zeta(3)$.

Les pertes de performance ont des causes exactement opposées à celles qui favorisent la jeunesse :
Détérioration des neurones, perte de mémoire et baisse de l'intuition ; moins bonne irrigation sanguine, pulsions amoureuses diminuées. Impression de "déjà vu", d'où motivation moins grande ; et après tout, on a déjà une certaine célébrité qu'on ne peut espérer accroître ! Mais surtout, tous les fils-à-la patte : comités de rédaction, assemblées générales, lettres de recommandation, ... qui grignotent temps et l'énergie. Voyons sur un exemple célèbre

comment vieillissait un mathématicien au début de ce siècle ; dans une des lettres de Lebesgue à Borel, retrouvées dans les sous-sols de l'Institut H. Poincaré, Lebesgue écrit ceci, alors qu'il n'avait encore que 35 ans :

"Mon cher ami, ce n'est pas par coquetterie que je dis que je baisse. Je sais fort bien que depuis 5 ans je n'ai rien fait de nouveau... C'est à une place de Recteur que j'aurais dû être candidat."

Il avait fait sa théorie de l'intégration à 27 ans, et son travail sur les fonctions représentables analytiquement à 30 ans.

Mais il faut savoir aussi quelle était sa vie : mauvaise santé familiale, préoccupations de carrière, gêne financière, début de sa polémique avec Borel.

**Blocages, collectifs ou individuels**

Il y a des blocages *collectifs* : celui lié au postulatum d'Euclide n'a commencé à céder que le jour où on a commencé à en douter ; il avait duré plus de 2000 ans. Ceux liés à la notion d'infini, actuel et potentiel ; les vaines disputes de caractère parfois métaphysique concernant l'infini ne furent balayés que par les premières définitions de Cantor, en particulier celle de bijection.

Tout déblocage est comme l'ouverture d'une vanne, qui laisse couler l'eau à grands flots, l'eau qui apporte une vie nouvelle : Géométrie non-euclidienne et les travaux de Poincaré ; la théorie des ensembles et tout un pan des mathématiques modernes.

Les blocages collectifs, et surtout ceux qui durent des siècles sont dus au conservatisme de l'esprit humain : l'homme a tendance à prendre pour des vérités intangibles ce qu'il a appris dans son enfance et qu'il transmet à ses enfants. Pour sortir du sillon de la tradition, il a besoin de l'aiguillon de la nécessité, les impasses d'une science, la rencontre d'un petit fait qu'aucune théorie admise ne peut expliquer.

Il faut se méfier des modes, des grands gourous, rechercher les fleurs vénéneuses, ... et changer nos méthodes d'enseignement. On peut rêver à ce que serait l'évolution de la science si n'existaient pas ces longs blocages collectifs ;

mais peut-être Dieu après le 7$^{\text{ème}}$ jour fut-il un peu machiavélique et a-t-il, depuis l'épisode de la pomme, prévu des blocages comme garde-fous contre une évolution trop rapide de l'humanité !

Mais il y a aussi des blocages *individuels*, même chez les créateurs authentiques ; nous retrouvons ici Lebesgue :
L'observation d'un petit fait, son mouchoir chiffonné l'avait conduit, après avoir précisé la théorie de la mesure de Borel, à définir la notion d'intégrale de certaines fonctions mesurables, mais l'histoire serait trop simple s'il avait, du premier coup, défini les fonctions intégrables quelconques. Lui aussi est resté pendant des années esclave de la tradition : l'intégrale de Riemann supposait les fonctions bornées ; Lebesgue conserve cette restriction dans sa thèse de 1902 ; en 1905, à propos des fonctions non bornées il écrit encore à Borel "Il est si difficile d'attaquer ces maudites fonctions" ; et alors qu'en 1908 l'obstacle semble tout à fait surmonté, il en reste encore des traces dans ses "Leçons sur l'intégration" de 1928, comme si dans son esprit les fonctions intégrables non bornées étaient un luxe, une curiosité ; et pourtant le théorème de Riesz-Fischer qui s'exprime en termes de fonctions non-bornées avait été publié en 1907.

*Comment éviter les blocages ?* L'humanité va-t-elle répéter l'erreur catastrophique qu'elle a faite pendant 15 siècles en acceptant comme canonique l'enseignement d'Aristote, erreur qui n'a cessé qu'après le choc, psychologique, technique ou scientifique qu'a constitué la rencontre avec d'autres civilisations, par les croisades, Marco Polo, Christophe Colomb ?

Aujourd'hui deux faits nous protègent peut-être des blocages : communication et information rapides, et l'accroissement considérable du nombre des chercheurs.

La probabilité de blocage existe encore, mais elle restera minime si l'on sait se méfier des modes et des gourous. Le grand gourou mathématicien de notre temps est Bourbaki ; son porte-parole le plus connu, Jean Dieudonné, a laissé croire, en insistant sur "Le choix bourbakiste", que c'était l'unique choix, et que les disciplines naissantes ne méritaient pas l'attention tant qu'elles n'étaient pas structurées en un bel échafaudage formalisable.

Or les clefs de l'avenir, celles qui vont peut-être nous donner une nouvelle façon de regarder le monde existent peut-être dès aujourd'hui à l'état de germes ; laissons-les germer. Ce sont ces concepts nouveaux qui constituent les mutations humaines de notre temps.

### Citations

Vérités établies et gourous. Il faut parfois déboulonner les statues trop imposantes, y compris notre statue intérieure. On peut s'aider, un temps, des épaules des plus grands, mais il faut être soi-même dès qu'on se sent assez fort. Plusieurs penseurs, venus d'horizons différents l'ont excellemment dit :

Krishnamurti : “Toute autorité aveugle et tue.”. Il rejette les gourous et refuse d'en être un ; il dit d'un de ses visiteurs “Il avait tant lu qu'il lui était difficile de savoir où commençait sa propre pensée”.

Machado : “Marcheur, le chemin, ce sont tes traces et rien de plus. Marcheur, il n'y a pas de chemin ; c'est toi qui le traces en marchant.”

Gide : “Nathanael, jette mon livre, ne t'y satisfais point. Ne crois pas que ta vérité puisse être trouvée par quelqu'autre”.

Lavelle, lui aussi s'élève contre les dogmes : “Il n'y a rien que nous ayons pensé une fois pour toutes et qui soit tel qu'il suffirait d'en garder la mémoire et de le convertir en règles”.

C'est dire qu'il n'y a pas de vérité ; c'est sa recherche qui importe. L'architecte et le maçon sont plus précieux que le monument qu'ils ont édifié !

## Les dons

### Unicité des hommes, dons et génie

Chaque homme est unique, irremplaçable. Nous classons trop souvent nos contemporains suivant des critères utilisant un très petit nombre de paramètres, les maigres et les gros, les honnêtes et les malhonnêtes, les bons en gymnastique, les forts en thème, etc. : classement certes facile mais qui occulte, de chaque individu sa richesse, sa diversité, son unicité en un mot ; car on sait maintenant, après la mise en évidence et le comptage des gènes, des groupes sanguins (dont le système HL-A) et des mutations des acides aminés, qu'au sens biologique il n'y a pas deux hommes identiques, même si ce sont de vrais jumeaux, et que ce serait vrai encore si l'humanité était mille fois plus nombreuse. Mais c'est autre chose d'en prendre une pleine conscience.

Combien apparaît misérable, dans cette lumière, le racisme, linguistique, social, religieux, ethnique ou tribal. Il y a racisme parce que l'Autre dérange nos habitudes, et nous obligerait pour le comprendre à sortir de notre cocon, aussi inconfortable soit-il. Si nous en prenons une pleine conscience, nous devons en assumer toutes les conséquences : une ouverture totale envers tous les êtres, mais aussi puisque chacun de nous constitue une synthèse unique ne serait-ce que par notre sensibilité et notre vision du monde, comprendre que notre devoir envers nous-mêmes doit être de faire fructifier au mieux notre unicité.

Puisque chaque homme est unique, il mériterait que tous les chercheurs du monde se penchent sur lui pour l'étudier ; mais de cette synthèse unique, ne nous frappent souvent que les facettes les plus brillantes et les plus rares, qu'on appelle des dons. Il s'agit de caractéristiques humaines, physiques, intellectuelles ou morales considérées comme souhaitables : beauté, force, adresse, grâce, amabilité, dévouement, résistance physique, persévérance, mémoire, etc. ... Ce sont ces dons que les bonnes fées des contes apportent dans le berceau des jeunes princesses ; mais on sait aussi que de vieilles sorcières jalouses apportent de leur côté des anti-dons, que l'on appelle des mauvais sorts : paresse, jalousie, esprit brouillon, laideur, etc. ...

Lorsqu'un don se manifeste avec une intensité exceptionnelle, et surtout chez un jeune sujet, il frappe d'étonnement ceux qui en sont les témoins et on use, et abuse, du mot génie. Quant à moi, je serais tenté de n'appliquer ce qualificatif qu'à ceux dont l'action a déterminé une mutation de l'humanité : des savants, philosophes, artistes, musiciens, poètes, mais aussi des fondateurs des grandes religions.

Mais où s'arrête l'échelle des génies ? William James disait : “Le génie n’est guère plus que la faculté de percevoir sur un mode inhabituel” ; à ce compte, tout mathématicien ou scientifique, créateur d’une nouvelle notion féconde serait génial, ce qui certainement ne lui déplairait pas ! Je préfère donc parler de dons exceptionnels ; ces dons se manifestent presque toujours dans la jeunesse.

Certains enfants manifestent une précocité exceptionnelle pour parler, lire, écrire, mais ce don ne préjuge d’ailleurs nullement de leurs aptitudes d’adultes. D’autres, très jeunes encore telle Anne Frank, tiennent un journal intime qui nous émeut encore. J’ai un collègue qui, dans sa jeunesse, avait un tel besoin de s’exprimer qu’il payait sa sœur cadette pour qu’elle l’écoute parler. La plupart des mongoliens ont reçu, par leurs gènes, le don d’une affection débordante. Certains enfants autistes gardent en mémoire, avec leurs dates, le détail des jours passés. Mais les calculateurs prodiges n’ont presque tous (si l’on excepte Gauss et quelques autres) en dehors du calcul que des capacités intellectuelles moyennes.

Mais revenons aux très grands, dont il est agréable et réconfortant d’égrener quelques noms ; ce furent toujours des êtres d’une grande intelligence, en dehors même de leur orientation maîtresse.

Un grand conquérant, Alexandre, élève d’Aristote, meurt à 33 ans après avoir en 12 ans conquis un immense empire, de la Macédoine à l’Indus.

Des musiciens dont les dons se manifestent très tôt : Mozart à 4 ans, Beethoven, Chopin à 7 ans, Prokofiev avant 9 ans. Des peintres, sculpteurs, architectes : Bruegel l’Ancien, Michel-Ange, Léonard de Vinci, Van Gogh, Picasso, etc. ...

Des philosophes comme Pic de la Mirandole, proclamé à 10 ans “Prince des orateurs et des poètes”, mort à 31 ans, laissant une œuvre immense.

Pascal, mathématicien, physicien et philosophe, célèbre dès l’âge de 16 ans, créateur du calcul des probabilités avec Fermat, et de la machine arithmétique.

Descartes, créateur du lien entre géométrie et algèbre, et auteur du “Discours de la Méthode”.

Newton, mathématicien et physicien crée entre 22 et 23 ans la théorie moderne des couleurs et le calcul des fluxions pour développer la théorie de l'attraction universelle et poser les bases de la mécanique rationnelle.

Leibniz, créateur universel, qui partage avec Newton la gloire de la création du calcul différentiel et qui, à 15 ans formule ses premières idées sur la logique.

Einstein que l'on cite souvent comme l'exemple d'un génie de première grandeur qui n'a pas manifesté précocement ses dons, publia pourtant, à 26 ans, trois mémoires fondamentaux qui changèrent la physique : Relativité restreinte, effet photo-électrique, mouvement brownien.

En mathématiques, la liste est longue de ceux que nous admirons :

Les Bernoulli, exemple remarquable d'hérédité (8 en 3 générations) dont certains allaient vers les mathématiques comme les alcooliques vers leur drogue.

Euler, élève de Jean Bernoulli qui sera à 16 ans professeur à l'Ecole d'Artillerie de Turin et décidera à 17 ans, malgré son père, de se consacrer aux mathématiques.

Laplace qui, très jeune avait déjà une mémoire prodigieuse.

Monge, géomètre né, professeur de physique à 16 ans.

Gauss, mathématicien, physicien, astronome et calculateur prodige, dont le génie exceptionnel se manifeste très tôt.

Galois mort à 21 ans, et Abel mort à 27 ans, les deux cadets des mathématiques, à la trajectoire courte mais fulgurante.

Poincaré, esprit universel, issu d'une famille distinguée, doué d'une mémoire puissante, et dont la passion mathématique débuta à 15 ans.

Cantor, créateur de la théorie des ensembles, dont les dons se manifestèrent vers 15 ans.

Ramanujan, fils de l'Inde, autodidacte, énonça sans preuve de nombreuses identités remarquables entre séries, si cachées que toutes n'ont pas encore été démontrées.

Cette courte liste ne contient aucun nom de femme parce qu'elle concerne une période où il était encore malséant pour une femme de consacrer son énergie à une œuvre scientifique ou même artistique, et où de plus l'éducation était le privilège de classes aisées ; on ne peut cependant pas oublier la lutte que dut mener la jeune Sophie Germain pour étudier les travaux de Gauss et lui adresser ses propres résultats en théorie des nombres et sur les surfaces élastiques ; ni les travaux plus connus encore de Sophie Kovalevskaia, lauréate à 28 ans de l'Académie des Sciences.

**Hérédité et génétique des dons**

J'entends par hérédité la transmission de certaines caractéristiques d'un couple, animal ou humain, à sa descendance ; et par génétique la détermination des caractéristiques d'un individu par le génome de l'œuf fécondé d'où il provient. L'hérédité ne détermine qu'en partie ce génome, puisque la loterie génétique intervient au moins à deux étapes de sa formation.

Cependant n'existerait pas de sélection des animaux domestiques si l'hérédité ne déterminait pas fortement chez ces animaux leurs traits physiques et certains traits du comportement ; n'existeraient pas la race des percherons et celle des pur-sang, les teckels ni les Saint-Bernard.

Il n'y a aucune raison pour qu'il en soit autrement dans l'espèce humaine ; de fait il est rare que les fils de deux parents longilignes soient petits et trapus, ou inversement ; ou, de façon plus frappante encore, qu'une fille de paysans chinois soit une blonde aux yeux bleus. J'ai eu au lycée un camarade qui était petit, rond, de caractère aimable et s'appelait Triboulet ; son père, son frère et sa sœur étaient petits, ronds et souriants !

La transmission par hérédité de caractères physiques dans l'espèce humaine ne fait donc pas de doute ; c'est là l'origine de la notion de race, basée sur un tout petit nombre de traits physiques.

Il en va tout autrement de la transmission des traits de caractère et surtout de ce que l'on peut appeler les dons intellectuels.

S'il est vrai que pendant les deux derniers siècles s'est produite en Chine une stagnation des innovations scientifiques et techniques, la cause en est culturelle et sociale, mais non raciale ; pendant des millénaires sa civilisation avait ébloui les explorateurs, tel Marco Polo, et ses apports à la science et à la technique étaient fondamentaux. Et depuis son récent réveil, elle commence à produire des chercheurs de très haut niveau international, annonciateurs peut-être d'un avenir culturel et scientifique de premier plan.

Il est donc possible, bien qu'une preuve scientifique n'existe pas encore, que tout don intellectuel soit la résultante d'une coexistence harmonieuse d'un petit nombre de gènes, ou encore une synergie non contrariée par l'existence d'anti-dons ; on chercherait donc en vain à localiser sur un gène, un don pour les mathématiques ou même un penchant pour les sciences.

Il existe cependant des lignées célèbres de peintres, de musiciens (les Bach, Strauss). En mathématiques, les Bernoulli sont un exemple éclatant et assez mystérieux d'une telle lignée ; je ne vois pour l'expliquer sans faire intervenir la vertu de l'exemple, de l'émulation, de l'environnement, que l'existence dans le génome du premier grand Bernoulli, d'une assemblée de gènes dominants, responsable de ses dons mathématiques, et si fortement soudés que la probabilité de sa transmission sur trois générations n'était pas négligeable.

Certes la probabilité pour qu'un couple ait un enfant doué est plus grande si ce couple est lui même doué que s'il ne l'est pas ; mais cette condition n'est ni nécessaire, ni suffisante ; il existe des exemples fameux de très grands hommes issus de parents ne brillant par aucun don :
Le père de Newton était "sauvage, extravagant et faible" ; sa mère était simplement économe, travailleuse et bien organisée.
Laplace était le fils de pauvres paysans normands.
Le père de Gauss était un homme tout ordinaire ; toutefois sa mère était une femme remarquable.
La première épouse et collaboratrice d'Einstein, Mileva Mariȁ était une femme

exceptionnelle par son énergie, son enthousiasme et ses dons mathématiques ; et cependant, de leurs deux fils, le premier Hans Albert (né en 1904) devint simplement ingénieur, puis professeur d'hydraulique ; et le second, Edward (né en 1910), très doué dans son enfance, devint schizophrène à 19 ans ; sa ressemblance *physique* avec son père était frappante ; il mourut à 55 ans.

Le développement du cerveau est différent chez l'homme et chez les animaux ; chez ceux-ci les premières semaines et même parfois les premières minutes de la vie ont une importance considérable. Les travaux sur les oiseaux de Heinroth (1910) puis de K. Lorenz (1935) ont montré que le premier objet mobile aperçu pendant une période critique de quelques heures ou même de quelques minutes chez certaines espèces peut devenir définitivement un objet-parent ou même un objet sexuel.

Chez les chatons dont on empêche les paupières de s'ouvrir pendant quelques semaines, les connections des neurones optiques dégénèrent ou ne s'établissent pas, et le chaton devient définitivement aveugle.

Ces conclusions ne s'étendent pas sans précautions aux jeunes humains, sans doute parce que dans leur cerveau le nombre de synapses potentielles ou déjà établies est si grand que, par des voies indirectes peuvent s'établir, même tardivement, des faisceaux supplétifs de neurones. Toutefois l'observation des "enfants sauvages" au cours des derniers siècles montre que contrairement au Mowgli de Kipling, ces enfants ont été incapables d'acquérir un développement physique et mental normal.

Il est donc clair que l'éducation familiale d'abord, puis l'école et la société jouent un rôle essentiel dans la formation du cerveau et la maturation d'un don d'origine génétique : "Lorsqu'une semence tombe sur un terrain pierreux, elle lève mais dès que le soleil paraît, elle est brûlée et sèche faute de racines".

Mais comment reconnaître les enfants doués puis, les ayant reconnus, quelle éducation leur donner ? C'est la grande responsabilité à la fois de leur famille et de l'école.

Les Américains, souvent excessifs, ont créé à côté de leurs écoles publiques assez médiocres, des écoles pour surdoués, dont la réussite est fort controversée.

En France des gouvernements successifs, mus par un faux esprit démocratique ou par démagogie, ont prétendu vouloir donner à tous, les mêmes chances de succès, et ont pour cela rendu obligatoires les classes indifférenciées, néfastes pour les enfants au rythme lent, et désastreuses pour les enfants doués. Il faut se réjouir que la pression conjuguée de certains enseignants et des familles ait conduit à certains palliatifs, mais la loi, même absurde, reste la loi : l'erreur a la vie dure. Alors que le but de l'école devrait être de développer au mieux les possibilités, parfois très différentes, des enfants, la loi slogan actuelle pourrait s'énoncer “Tous les enfants doivent recevoir la même éducation”.

Je ne saurais mieux conclure mon éloge de la “différence” que par cette citation de Lavelle :

“Si l'on veut que tous les hommes soient semblables, ils ne cesseront de se heurter et de se haïr ; sinon chacun d'eux sera pour tous les autres une révélation et un soutien”.

**Epanouissement d'un don**

Il ne suffit pas d'avoir un don à la naissance ; encore faut-il qu'il puisse se développer, fructifier et ne soit pas “laissé sous le boisseau”. Que de dons perdus chez les bébés chinois pendant les deux derniers siècles de décadence de l'empire chinois !
Un minimum de mémoire est indispensable ; Einstein se plaignait de la sienne, mais apparemment elle était suffisante ; et inversement une mémoire non sélective peut encombrer l'esprit, comme le soulignait Krishnamurti parlant d'un de ses visiteurs.

Il faut certes, de la curiosité et de l'imagination, mais aussi de la suite dans les idées, de la persévérance et un travail soutenu - avant et après l'illumination espérée ; celle-ci lorsqu'elle se produit doit être une “ivresse maîtrisée”.

Une certaine forme de culture est indispensable, acquise non de façon passive, mais avec appétit, avec l'objectif plus ou moins proche de l'utiliser dans la recherche en cours. En un siècle où les mathématiques accèdent à l'unité, où les sciences expérimentales ont à se préserver de certains effets néfastes d'un réductionnisme pourtant nécessaire, une telle façon active d'acquérir de la culture semble être la plus efficace. Topologie et géométrie algébriques, variétés différentiables et groupes de Lie, ont tissé des liens féconds avec la physique et chacune de leurs facettes est vitalisée par les autres ; ces liens doivent être présents dans le subconscient et dans la mémoire consciente de tout chercheur, ne fut-ce qu'à l'état d'ébauches.

Certes il n'est ni possible ni souhaitable de définir des règles précises pour développer un don, car l'originalité du chercheur doit aussi consister à découvrir son propre cheminement ; "Marcheur ; il n'y a pas de chemin ; c'est toi qui le traces en marchant".

### Poisons de la création

A côté des dons il y a les anti-dons, dont les enseignants et les chercheurs doivent se méfier.

- Soit internes tels que manque de vitalité, manque de confiance en son étoile, fragilité psychologique par trop de sensibilité aux coups inévitables de l'environnement : un créateur doit avoir une âme robuste et savoir, quand il le désire, protéger du monde extérieur son activité de recherche.
- Soit externes comme les pressions familiales pour imposer à un jeune doué une profession qui lui déplaît. Que de savants illustres n'ont échappé que par miracle ou par leur force de caractère à de telles pressions ; mais nous ne connaîtrons jamais ceux qui n'ont pas eu cette chance.
- Poison aussi, bien que plus subtil, l'effet que j'ai déjà souligné, néfaste après avoir été fécond, d'une grande synthèse de concepts présentés comme des vérités immuables. Les gourous, quelle que soit leur valeur personnelle, ne doivent être écoutés que d'une oreille mais bien sûr, les plus dangereux sont les "petits gourous" et ceux qui se complaisent dans ce rôle.

Il faut savoir *donner congé au dogmes.*

En présence d'un jeune doué, le devoir d'un maître à quelque niveau que ce soit, doit être seulement de l'aider à se mieux connaître, et à trouver seul sa voie.

### La lumière sous le boisseau

Nous avons pris l'habitude de publier dès que possible tout résultat scientifique, avant même parfois d'en avoir une preuve écrite, détaillée et convaincante ; la compétition internationale, accentuée par la rapidité des communications électroniques, ainsi que par les règlements des jurys d'évaluation, en sont en grande partie responsables.

Il n'en a pas toujours été ainsi : sans avoir le goût du secret aussi poussé que l'école Pythagoricienne, les mathématiciens du XVII$^{\text{ème}}$ siècle n'annonçaient souvent leurs découvertes que sous forme de cryptogrammes ou de problèmes signés d'un pseudonyme. Souvent aussi, leur amour-propre d'auteur se contentait de l'estime de quelques amis ou correspondants au courant de leurs recherches. Il faut dire que les revues scientifiques n'existaient pas encore, d'où le rôle important d'un altruiste éclairé comme le Père Mersenne.

C'est peut-être là qu'il faut voir la raison principale du retard de la publication par Newton de sa "Méthode des fluxions" et surtout de ses "Principes mathématiques de la philosophie naturelle" qu'il ne se décida à rédiger que sous l'amicale insistance de Halley, pour paraître en 1686, donc 20 ans après leur création.

Plus de 130 ans plus tard, Gauss allait récidiver. Plusieurs de ses découvertes, telles que les propriétés des fonctions elliptiques ou le critère d'analyticité des fonctions continues, restèrent enfouies, souvent à l'état d'esquisse ou sous forme cryptique dans son journal personnel publié seulement 62 ans après sa mort. Pourquoi tant de richesses cachées ? Certes, avant l'âge de 20 ans il avait tant d'idées que le temps lui manquait pour les développer ; mais il semble établi qu'il considérait comme secondaire la publication de résultats que seule une motivation intérieure puissante l'avait conduit à formuler et à démontrer. Pareil désintéressement ne semble pas menacer aujourd'hui le monde mathématique et on peut s'en réjouir si l'on désire que continue l'actuel développement explosif des mathématiques. Encore faudra-t-il veiller à ce que la qualité ne soit pas étouffée par la quantité, et à préserver l'unité féconde de l'édifice mathématique en développant un réseau de diffusion et de synthèse accessible à tout bon chercheur.

## Amour et idée intérieure

Me voici bientôt parvenu au terme de ma trop longue réflexion sur les processus mentaux de la création : trop longue mais cependant très incomplète puisque l' "homo creator" est un être complexe et qu'ainsi la seule création mathématique, par exemple, ne peut être bien comprise, à la fois dans un seul cerveau ou dans le mégacerveau de l'humanité tout entière, que par ses interactions avec les autres modes de création, musicale, artistique, poétique, etc. ...

Si l'on définit l'amour d'un être humain comme un élan mental de cet être vers un objet, inerte, animé ou purement conceptuel, on pourrait dire que toute création est mue par un amour. Mais je préfère, lorsque cet objet est purement conceptuel, reprendre pour cet amour le nom d'"idée intérieure" : Cette notion a été formulée par Nietzsche, après le peintre allemand Caspard David Friedrich, et reprise récemment par J. Harthong pour l'appliquer à G. Reeb dans son article "Comment j'ai connu et compris Georges Reeb". Friedrich affirmait : "Il existe un sentiment esthétique spontané qui permet à l'artiste de sentir en lui-même ce qu'est le beau et ce qu'il doit représenter". C'est donc un sentiment personnel, une pulsion subjective qui dicte la voie à suivre ; c'est donc lui qui aide le marcheur de Machado déjà cité, à trouver son chemin en marchant.

Le beau conte de Paulo Coelho "L'alchimiste" est une belle illustration du développement d'une idée intérieure : les suggestions voilées que son jeune berger reçoit de mystérieux vieillards, y apparaissent comme les pulsions d'une voix intérieure :
"Tu dois essayer de vivre ta légende personnelle."
"Quand tu veux quelque chose, tout l'univers conspire à te permettre de réaliser ton désir."
"On a toujours la possibilité de faire ce que l'on rêve."

Une idée intérieure puissante est en général liée à un don - par exemple une mémoire exceptionnelle dans le cas de calculateurs prodiges. Elle peut exister et se manifester très précocement, comme chez Mozart ; mais souvent elle est d'abord imprécise et même multiforme, puis elle se précise et se nourrit par l'expérience, pour se manifester enfin dans une trajectoire éblouissante.

Une étude approfondie de la formation de l'idée intérieure chez les grands hommes du passé permettrait de comprendre mieux les rôles respectifs des dons d'origine génétique et de l'environnement ; les matériaux pour une telle étude ne manquent pas ; ils illustrent de façon convaincante la puissance et l'efficacité des idées intérieures, par exemple celles des fondateurs de grandes religions, Bouddha, Jésus, Mahomet, ou d'hommes dont le charisme était si puissant qu'il pouvait entraîner tout un peuple.

Aussi les exégètes et les Pères de l'Eglise, surtout préoccupés par l'aspect messianique de Jésus, me semblent-ils avoir trop négligé les facteurs de formation de son idée intérieure : équilibre, dons de synthèse, vision de plus en plus claire de sa mission, contacts encore mal connus avec les Esséniens, mais surtout l'importance, non plus seulement de l'Ancien Testament, mais d'un amour pour tous les hommes qui ira lorsque l'affrontement avec les prêtres du Temple lui apparaîtra comme inévitable, jusqu'à lui faire préférer sa mort à la violence.

Une étude comparative de la formation des idées intérieures des fondateurs des grandes religions permettrait de mieux comprendre l'évolution de ces religions et leurs facettes actuelles, comme si le présent était la fleur épanouie du bouton qu'elle fut voici plus d'un millénaire.

Les exemples fameux d'idées intérieures puissantes ne manquent pas :
Celles des grands mystiques, des martyrs et des grands saints, mais aussi sous une forme pervertie, celles des fanatiques politiques ou religieux.
Celle de Mahatma Gandhi qui, à mains nues, mais avec une volonté inflexible, a fait céder le puissant Empire anglais.
L'idée intérieure d'Alexandre le Grand, dont il prit progressivement conscience, au fur et à mesure de sa progression vers l'Est, était le rêve d'une synthèse des cultures grecques et orientales.
Celle de Newton, qu'il a résumée dans cette courte phrase : "Je ne forme pas d'hypothèses", exprimant ainsi sa réaction contre la tendance de nombreux savants de son temps, à vouloir expliquer le monde par des explications a priori et des théories non basées sur l'expérience, telle la théorie des tour-

billons de Descartes.
Celle d'Einstein qui, vers 15 ans, cesse d'être simplement un bon élève un peu lent : trouver des explications *simples* et *belles* aux problèmes du Temps, de la lumière et de la gravitation. Il disait souvent que ses grandes idées lui étaient dictées par une voix intérieure.
Plus proche de nous, Lebesgue, dont l'idée intérieure était une vision géométrique des objets mathématiques. Il affirmait "Pour ma part, j'ai toujours été guidé dans mes recherches par des considérations géométriques et, si je ne puis donner aucun de mes mémoires comme une application certaine de l'Analyse à la Géométrie, il me semble que j'ai fait constamment des applications de la Géométrie à l'Analyse".

L'auteur d'une œuvre scientifique ne prend parfois conscience de ce qu'est l'idée intérieure qui oriente son activité créatrice qu'après plusieurs années de recherche. Ce fut mon cas ; je pourrais reprendre en partie à mon compte ce que dit Lebesgue ; dès le début de mes recherches, j'ai toujours cherché à voir simplement les choses simples, à en avoir une vision directe, géométrique et quasiment visuelle. Mais en outre, il s'est greffé sur cette approche stratégique des mathématiques, après plusieurs années de recherche où mon seul plaisir était de résoudre les problèmes variés qui se présentaient à moi, une préoccupation qui est vite devenue comme une seconde nature, à savoir de ne m'intéresser qu'à des problèmes difficiles mais d'énoncé simple, et d'adopter pour les résoudre un cheminement propre à faire de la solution trouvée un outil commode et utile dans un cadre général.

*La morale de cette histoire !*

Il n'existe aucune recette que l'on puisse donner à un jeune chercheur pour l'aider à trouver sa voie. On peut lui dire seulement - et c'est aussi un message pour tous les éducateurs
"Sois toi-même. Développe et fortifie ton idée intérieure. Crois en toi et tu pourras soulever le monde".

# Qu'est-ce que les mathématiques modernes ?

Gustave CHOQUET

Première publication en 1962

# Table des matières

## Préface

### Bourbaki et l'analyse

Malgré le sous-titre, je n'ai pas l'intention dans ce court texte de m'embarquer dans le projet fou d'essayer de lire l'esprit de Bourbaki, ce génie à plusieurs têtes.

Pourtant, puisque je suis concerné par la totalité de l'analyse, le traité de Bourbaki contenant des concepts si clairs et étant si étroitement lié au développement des mathématiques de notre temps, nous pouvons espérer que l'étude de "sa" philosophie et de "son" travail mathématique nous amènera à l'essence des tendances modernes en analyse.

Une telle étude peut servir à développer pour tous les niveaux de l'éducation un enseignement des mathématiques mieux adapté aux besoins de notre époque et au niveau de conscience de notre génération.

# Chapitre 1

# La méthode axiomatique

L'étude de l'histoire des mathématiques montre assez clairement que chaque période de recherche et d'extension est suivie d'une période de révision et de synthèse durant laquelle les méthodes plus générales évoluent et les fondations sont consolidées. C'est ainsi que la contribution de Descartes peut être regardée comme le point culminant d'une longue période de recherches apparemment diverses qui ont rendu possible la relégation dans les musées d'un grand nombre de procédures différentes pour l'étude des courbes et fonctions particulières et ont permis de les remplacer par une procédure plus universelle. Aujourd'hui, le nombre de chercheurs en mathématiques est si grand que les deux processus, recherche et synthèse, peuvent être menés simultanément. De plus, le travail de synthèse des cinquante dernières années, rendu possible par la théorie des ensembles et la terminologie proprement dite, a été particulièrement remarquable. On peut trouver cela clairement établi dans Bourbaki, et c'est ce que je voudrais étudier.

Pour Bourbaki n'existe qu'une MATHEMATIQUE, et l'instrument principal de son évolution vers l'unité était la méthode axiomatique. Pour appliquer cette méthode à l'étude d'une théorie, le mathématicien "sépare les lignes principales de raisonnement qui figure dans la théorie, puis, prenant chacune d'elle isolément, il la considère comme un principe abstrait et il déduit d'elle ses conséquences naturelles ; alors, revenant à la théorie étudiée, il "recombine" les éléments précédemment considérés séparément et il voit comme ils interagissent les uns avec les autres." (Bourbaki trouve dans cette assertion une présentation plus structurelle de l'un des principes de base de la méthode de Descartes : diviser chaque difficulté en autant d'éléments que nécessaire pour la comprendre.

## 1.1 Structures

Les "lignes principales de raisonnement" sont les structures. Par exemple, l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels possède des structures variées : celle de groupe, celle de corps, celle d'espace vectoriel, celle d'ensemble ordonné et celle d'espace topologique. Inversement, une structure identique peut être retrouvée dans un certain nombre de théories distinctes. Par exemple, la structure de groupe trouvé dans l'étude de $\mathbb{R}$ est la structure de l'ensemble des entiers modulo $p$ ou celle de l'ensemble de certains déplacements spatiaux.

Pour que l'étude d'une structure soit applicable à différentes théories, les ensembles considérés doivent nécessairement être généraux ; en particulier, la *nature* de leurs éléments ne doit pas intervenir, seules les *relations* entre eux importent. Ces relations sont clairement établies par les *axiomes* définissant la structure.

Ainsi la structure d'ordre d'un ensemble arbitraire est une relation binaire sur $S$, dénotée $\prec$, qui satisfait les axiomes suivants ou postulats.

Pour tout $x, y, z$ appartenant à $S$, on a

1) $x \prec x$
2) $(x \prec y \; et \; y \prec x) \implies (x = y)$
3) $(x \prec y \; et \; y \prec z) \implies (x \prec z)$

Quelques-unes de ces structures ont une signification plus fondamentale parce qu'on les rencontre dans toutes les théories. On les appelle des structures mères et elles incluent les structures associées à une relation d'équivalence, les structures d'ordre, les structures algébriques, les structures topologiques, etc.

Quand nous comparons les structures les unes aux autres, nous pouvons voir que certaines sont "plus riches" que d'autres. Ainsi les structures appelées groupes finis abéliens ou corps, sont plus riches que toute structure qui serait seulement une structure de groupe.

Certaines structures sont plus complexes parce qu'elles présentent plusieurs structures mères liées ensemble par des conditions de compatibilité. On les appelle structures multiples. Par exemple, un groupe topologique est un ensemble qui présente simultanément une structure de groupe et une structure topologique rendue compatible en stipulant que les opérations $(x, y) \longrightarrow x.y$ and $x \longrightarrow x^{-1}$ doivent être continues.

L'algèbre topologique et la topologie algébrique traitent des structures multiples ; la géométrie différentielle et l'algèbre différentielle considèrent des structures qui sont encore plus riches. Au sommet de l'édifice, on trouve les "structures carrefours" qui contiennent de très nombreuses structures. La théorie du potentiel est un exemple particulièrement représentatif d'une telle structure. C'est la multiplicité des structures mères trouvées dans de telles théories qui expliquent pourquoi des mathématiciens si différents les uns des autres leur trouvent autant d'intérêt : chaque pas en avant dans l'étude des structures constituantes a des répercussions sur la théorie dans son ensemble. Il est facile d'établir que le progrès dans la théorie du potentiel correspond aux progrès dans les autres théories comme l'intégration de Lebesgue, les espaces topologiques, les espaces vectoriels topologiques, la mesure de Radon, les groupes abéliens localement compacts, les distributions, etc., etc.

De telles structures sont le champ d'étude véritable de l'analyse et nous allons définir l'analyse comme l'ensemble complet des structures carrefours. Mais comme celles-ci n'ont pas été définies de façon rigide, notre définition de l'analyse ne fait qu'établir une hiérarchie.

Une théorie $A$ sera classée comme appartenant davantage à l'analyse qu'une théorie $B$ si les structures étudiées dans $A$ sont plus riches que celles étudiées dans $B$.

L'analyse apparaît comme un univers dont la complexité rappelle celle de la vie elle-même. Alors que l'algèbre est un monde de minéraux dont les beautés sont celles de cristaux avec leurs formes pures, l'analyse est habitée d'êtres dont les formes sont aussi incertaines que celles des algues, des hydres ou des éponges ; c'est un monde exubérant plein d'opportunités où les explorations peuvent suivre l'un quelconque de multiples cours et où chacun peut laisser l'empreinte de sa personnalité dans la partie qu'il explore.

## 1.2 Caractéristiques de la méthode axiomatique

(a) *Economie de la pensée*

Les développements récents dans les mathématiques ou l'industrie montrent des analogies intéressantes ; la méthode axiomatique est analogue à une chaîne de production automatique ; les structures mères correspondent aux machines-outils.

La méthode axiomatique permet une économie de la pensée et de la notation, car les théorèmes importants nécessités sous différentes formes, dans différents contextes, sont établis une fois pour toutes dans un système d'axiomes suffisamment général de manière à leur faire inclure toutes les applications utiles. Dans ce système général de référence, la terminologie et la notation sont choisies pour s'adapter aux cas particuliers variés, et la préférence est toujours donnée aux mots les plus suggestifs qui provoquent des résonances et stimulent l'intuition. Ce soin dans le choix des termes va de pair avec un souci de clarté dans la présentation ; les mathématiciens modernes ont développé un style précis et austère, et ne sont satisfaits que lorsque leurs articles consistent en un ensemble d'os nus de définitions, lemmes, théorèmes, corollaires et signes pour attirer l'attention (☡).

(b) *La multivalence* : une garantie d'unité et d'universalité

Les premiers systèmes axiomatiques étaient catégoriques ou *univalents*, comme l'axiomatisation de la géométrie élémentaire par Euclide et par Hilbert, ou la définition des entiers par Peano. En contraste avec cela, les structures sont *multivalentes*, c'est-à-dire que les axiomes qui les définissent peuvent être appliqués à de vastes classes d'ensembles portant des structures non isomorphes.

C'est la multivalence qui est une garantie de l'adaptabilité aux situations les plus variées. Il s'ensuit de cela qu'il est parfois difficile de dire si une assertion appartient plutôt au domaine de l'algèbre, de la géométrie ou de l'analyse.

Ainsi, nous pouvons dire que la géométrie élémentaire de l'espace n'est rien d'autre que l'algèbre linéaire dans un espace vectoriel de dimension 3 sur lequel un produit scalaire est défini, et que l'étude des formes quadratiques dans cet espace est équivalent à l'étude des coniques du plan.

De façon similaire, étudier l'espace de Hilbert est, bien sûr, faire de la géométrie (puisqu'on parle là de sphères, d'angles, de perpendiculaires) mais il est égal de faire cela en algèbre ou en analyse.

Par exemple pour Henri Cartan, balayer en théorie du potentiel, c'est la même chose que projeter orthogonalement sur un cône convexe de l'espace de Hilbert. Plus généralement, bien que les ensembles convexes appartiennent à la géométrie, ils deviennent un des outils de base de l'analyse pour celui qui étudie les espaces.

Cette multivalence des grandes structures est donc un facteur unifiant qui permet un élargissement mutuel des différentes théories mathématiques. Un tel phénomène n'est pas nouveau. Nous avions déjà des exemples dans la représentation géométrique des nombres complexes ; la synthèse de l'algèbre et de la géométrie effectuée par Descartes ; l'utilisation que Monge avait fait de la géométrie dans sa recherche en analyse. Mais il a été permis à l'algèbre des ensembles et à son langage universel d'amplifier ce phénomène. Voici quelques exemples :

- la topologie de Zariski en géométrie algébrique.
- l'interprétation topologique et les démonstrations de nombreux théorèmes importants en logique.
- la théorie de Leray des paquets de fibres d'abord étudiés en géométrie algébrique mais qui envahissent maintenant l'algèbre et l'analyse.

(c) *Illumination mutuelle des entités mathématiques : dynamisme*

Il s'ensuit de cette multivalence que les entités isolées ne sont plus étudiées ; ce qui est étudié, ce sont les familles d'entités liées par des relations mutuelles. Non seulement les théorèmes acquièrent une plus grande généralité ce faisant, mais en même temps, chaque entité est individuellement mieux connue, puisque ces relations avec les autres entités font ressortir ses propres aspects variés. Ici aussi, ce qui est nouveau ce n'est pas l'utilisation d'un "contexte" mais la conscience du phénomène et de sa généralité.

Il est bien connu que la tangente d'une courbe en un point a été définie par une famille de sécantes ; que les fonctions analytiques d'une variable réelle deviennent mieux connues quand on les étudie dans le plan complexe, et que parfois les "familles normales" des fonctions analytiques ont été un outil puissant. Les mathématiques modernes sont "relationnelles " et cela leur donne leur dynamisme interne, celui-ci se réfléchissant dans un vocabulaire spécial et dans des signes typographiques spéciaux : fonctions, injections, jets, flèches, et schémas fléchés.

Une notation pratique et très suggestive a été produite pour indiquer les relations et les transformations.

$$x \longrightarrow f(x); A \longrightarrow \bar{A}; x \sim y; x < y; A \times B; \prod A_i; E/R; \text{ etc.}$$

Entre les mains des mathématiciens, les entités sont façonnées comme les pierres précieuses entre les mains du joaillier et chacune des transformations qui est amenée révèle une nouvelle facette, un aspect inattendu.

Cet aspect relationnel des mathématiques est en accord avec le principe bien connu qui est que pour bien connaître une notion, on doit étudier ses formes et ses contraires. Il y a aussi accord sur le principe qui semble dominer toutes les investigations scientifiques modernes, i.e. que nous ne pouvons pas atteindre à l'"essence" des entités étudiées, mais seulement aux relations qu'elles entretiennent entre elles. Une expérience en physique ne révèle seulement que la relation entre l'univers et le système expérimental. Ce qui est essentiel dans un réseau téléphonique, ce n'est pas la nature des fils ou leur forme mais l'ensemble de ses connexions. Pour le mathématicien, deux ensembles structurés isomorphiquement sont équivalents.

La virtuosité avec laquelle les jeunes générations de mathématiciens se sont nourries aux nouvelles méthodes, utilisent le dynamisme des relations, et le plaisir qu'ils tirent de cela, semble prouver que ce dynamisme est bien adapté à la structure du cerveau humain.

(d) *Adaptabilité à l'univers physique*

Cette multivalence des théories est une garantie qu'elles aient de grandes possibilités d'être utilisées en physique. Ainsi, l'espace de Hilbert a servi à mieux interpréter les théories de champ quantique ; la géométrie des espaces de Riemann et le calcul différentiel extérieur ont formé le cadre de la relativité générale. La physique théorique moderne elle-même développe maintenant ses propres structures : des faits fondamentaux sont pris comme postulats et de ces postulats sont déduites des conséquences dont on cherche alors les vérifications expérimentales. Naturellement, on comprend que les axiomes choisis correspondent à un seul aspect de l'univers physique.

(e) *Validation des notions qui sont devenues métaphysiques*

Un bon système axiomatique est assez souvent le seul moyen de se sortir de difficultés métaphysiques. Ainsi les nombres complexes ont perdu leur mystère et leur "absurdité" quand leur ensemble a été identifié à $\mathbb{R}^2$ auquel deux opérations adéquatement définies étaient associées. Plus récemment, les fondations de la théorie des probabilités étaient très brumeuses quand cette théorie était basée sur la théorie des jeux, la théorie des erreurs et la théorie stochastique. La théorie des probabilités a seulement ancré son unité et ses fondations fermes quand Kolmogorov lui a donné une présentation axiomatique. De ces axiomes, la théorie des probabilités apparaît comme une branche de la théorie de la mesure, mais une branche spéciale qui montre une grande vigueur, a son langage et ses problèmes propres et pourrait s'enrichir de nouveaux résultats de la théorie de la mesure tout en fertilisant l'analyse classique. Une brillante illustration de ce dernier fait peut être trouvée dans la relation étroite démontrée récemment qui existe entre les processus de Markov et la théorie du potentiel.

## 1.3 Dangers de la méthode axiomatique

Bien que les systèmes axiomatiques soient les machines-outils des mathématiques, on comprendra facilement qu'ils ne présentent un intérêt que si leur résultat est correct. Il est assez facile de construire des systèmes axiomatiques, en modifiant légèrement des systèmes connus ; on constatera malheureusement qu'on en produit trop dans des thèses ou des articles. Leurs auteurs peuvent se régaler à les formuler et cela les amène à exagérer leur importance. Un grand nombre de ces vastes théories ont peu d'applications voire pas du tout. Une question urgente se pose alors : quels sont les systèmes axiomatiques utiles ?

Il n'y a probablement pas de critère absolu qui permettrait à quelqu'un de prendre une décision à ce sujet. Cependant, on sera d'accord sur le fait qu'on n'a pas besoin d'un tank pour tuer une mouche. Une théorie générale sera justifiée si elle révèle des liens insoupçonnés et fructueux entre des théories jusque-là considérées comme éloignées, ou si elle résoud un défi qui restait ouvert. Ce fait qu'une théorie soit générale n'entraîne pas forcément qu'elle sera utile, particulièrement si la lumière qu'elle projette est trop faible. Nous verrons plus loin avec quelles restrictions Bourbaki permettait à des théories d'avoir le droit d'exister. Mais il est intéressant de regarder les garde-fous qui auront protégé Bourbaki de succomber à la tentation de développer des systèmes axiomatiques comme des fins en soi.

Pour André Weil, “si la logique représente les règles d’hygiène pour un mathématicien, le pain quotidien qui assure sa subsistance est constitué par les grands problèmes”. C’est une autre façon de dire ce qu’Hilbert avait l’habitude de dire, “Une branche de la science est pleine de vie tant qu’elle a des problèmes en abondance ; l’absence ou le manque de problèmes est un signe de mort.”.

Hilbert est pour Bourbaki un modèle et presque une figure du père. Le fils recherche le père pour la simplicité élégante de ses articles “due au fait qu’il a tiré de rien, alors que personne n’avait été capable de le faire jusque-là, les principes fondamentaux qui ont rendu possible le fait de tracer la voie royale qui avait été jusqu’alors été cherchée en vain”. Il est le Maître de la méthode axiomatique, que l’on considère les structures univalentes (comme en géométrie élémentaire) ou les théories multivalentes, et il a appris aux mathématiciens à penser axiomatiquement. “Il ne tombe jamais dans le piège de certains de ses disciples de créer et élaborer une théorie pour quelques maigres résultats et il ne généralise jamais pour le plaisir de généraliser.” (Dieudonné). Il aime le problème particulier, précis et concret. C’est dans le but de résoudre de tels problèmes qu’il a créé des outils dont l’importance n’a pas diminué : la méthode directe dans le calcul des variations basée sur la semi-continuité pour résoudre le problème de Dirichlet ; la définition et l’utilisation des “espaces de Hilbert” pour résoudre les équations intégrales, etc., etc.

Les grands problèmes sur lesquels il a attiré l'attention des mathématiciens au congrès de 1900 ont continué à stimuler la recherche de façon très fertile. Aujourd'hui, par exemple, le problème de Riemann des zéros de la fonction $\zeta$ continue de provoquer un nombre très grand de tentatives d'en trouver une démonstration, même si la nature véritable du problème semble échapper à tout le monde.

# Chapitre 2

# Quelques outils de l'axiomatique

Un mathématicien moderne étudiant une structure est contraint d'utiliser des structures auxiliaires. Pour les construire, il a besoin d'un guide qui l'amène aux bonnes définitions. Nous allons maintenant examiner quelques-unes des procédures qui se sont montrées particulièrement efficaces et se sont avérées être de bons guides.

## 2.1 Morphismes

Une structure sur un ensemble $S$ est définie par plusieurs axiomes exprimés en fonction des éléments de $S$ et potentiellement des ensembles auxiliaires. La forme de ces axiomes définit ce qu'on appelle une *catégorie de structure* dont nous allons donner quelques exemples.

Les postulats pour la notion de groupe définissent une *catégorie*, les groupes commutatifs en forment une sous-espèce. Autres exemples : la catégorie des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, celle des espaces topologiques compacts et celle des variétés différentielles.

Soient deux ensembles $S$ et $S'$ doté de structures de la même catégorie, alors une *bijection* (c'est-à-dire une correspondance un-pour-un) $f$ de $S$ dans $S'$ est appelée un *isomorphisme* s'il échange les structures de $S$ et $S'$ d'une manière simple à établir dans chaque cas.

De façon plus générale, un morphisme de $A$ dans $B$ est une application de $A$ dans $B$ qui a des propriétés qui sont reliées à la structure. La définition des morphismes est telle que le produit de deux morphismes est aussi un morphisme et que si une bijection $f$ de $A$ dans $B$ est un morphisme, ainsi que $f^{-1}$, alors $f$ est un isomorphisme. Par exemple, pour les catégories de structures formées des espaces topologiques, la classe des applications continues forme une classe de morphismes ; les applications ouvertes (i.e. qui changent tout ensemble ouvert en un ensemble ouvert) forment aussi une autre classe de morphismes qui est non moins utile que celle des morphismes du premier type.

Soit $A$ un ensemble, $(B_i)$ une famille d'ensembles dotés d'une structure d'une catégorie donnée, et pour chaque $i$ appelons $f_i$ une application de $A$ dans $B_i$. Une question qui se pose est : pouvons-nous doter $A$ d'une structure de la même catégorie de telle manière que $f_i$ soit un morphisme ? Sous certaines conditions, c'est possible et parmi toutes les solutions possibles, il y en a une qui est privilégiée et qui est appelée la *structure ini-*

*tiale* associée à $(B_i, f_i)$. C'est la manière dont cela est utilisé, par exemple, pour la catégorie des espaces topologiques pour définir l'image réciproque d'une topologie, la topologie induite, sur un sous-ensemble d'un espace donné ; le produit d'une famille d'espaces topologiques.

Quand $f_i$ est une application de $B_i$ dans $A$, la solution du problème, si elle existe, est appelée la *structure finale* associée au $(B_i, f_i)$ ; ceci est la manière dont on définit une topologie sur l'ensemble-quotient $A$ d'un espace topologique $B$ par une relation d'équivalence $R$.

## 2.2 Ensembles et applications universelles

Soit $S$ et $T$ deux catégories de structures, soit $A$ un ensemble de catégories $S$ ; donnons-nous une famille d'applications appelées $(ST)$-applications de $A$ dans les ensembles de catégories $T$ et une famille d'applications appelées $T$-applications des ensembles de catégories $T$ dans les ensembles de mêmes catégories ; supposons aussi que ces familles sont transitives au sens où le produit d'une $(ST)$-application par une $T$-application est encore une $(ST)$-application et que le produit de deux $T$-applications est encore une $T$-application. La question alors est de trouver s'il existe un ensemble $\mathscr{B}$ de catégories $T$ et une $(ST)$-application $\Phi$ de $A$ dans $B$ telle que toute $(ST)$-application (de $A$ dans un $B$) peut être écrite comme $\psi = f \circ \Phi$ où $f$ est une $T$-application de $\mathscr{B}$ dans $B$. Sous des conditions suffisantes très générales, ce problème a une solution et même une infinité de solutions non isomorphes.

Pour déterminer une solution unique, la condition suivante doit être ajoutée : l'image $\Phi(A)$ de $A$ dans $\mathscr{B}$ est telle que deux $T$-applications de $B$ dans un $B$ qui coïncident dans $\Phi(A)$ coïncident aussi dans $\mathscr{B}$. L'espace $B$ ainsi obtenu est appelé l'*espace universel* associé à $A$ et $\Phi$ est appelé l'*application universelle* associée à $A$.

*Exemples.*

a) *Groupes compacts associés à un groupe topologique.*
$A$ est un groupe topologique, $T$ est la catégorie des groupes topologiques, les $(ST)$-applications et les $T$-applications sont formées par les homomorphismes arbitraires continus. On peut montrer qu'il y a identité entre les fonctions presque-périodiques définies sur $A$ et les fonctions $\psi \circ \Phi$ où $g$ est n'importe quelle fonction continue sur $\mathscr{B}$.
Cet exemple montre quel intérêt peuvent présenter les ensembles universaux pour l'analyse.

b) *Produit tensoriel de deux espaces vectoriels.*
$A$ ici est le produit (cartésien) de deux espaces vectoriels $S_1$ et $S_2$ (sur le corps $\mathbb{R}_1$), $T$ est la catégorie des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ ; les $(ST)$-applications sont les applications bilinéaires définies dans $S_1 \times S_2$ ; les $T$-applications sont les applications linéaires. L'espace vectoriel universel $\mathscr{B}$ est appelé le produit tensoriel des espaces $S_1, S_2$ ; à travers lui, l'étude des applications bilinéaires définies dans $S_1 \times S_2$ est réduit aux applications linéaires définies dans $\mathscr{B}$.

Voici quelques autres ensembles universaux ;
- les structures algébriques libres,
- les anneaux et les corps de fractions,
- la complétion d'un espace uniforme,
- la compactification de Stone-Cech,
- les groupes topologiques libres,
- les variétés d'Albanese (en géométrie algébrique).

## 2.3 Catégories et foncteurs

Des vastes outils des mathématiques, la théorie des "catégories" est la plus récemment développée. C'est une plongée de plus dans l'abstraction, car les relations qu'elle considère ne sont plus des relations entre éléments d'un ensemble, mais des relations entre des entités d'une "catégorie" ou même de différentes catégories.

C'est presque miraculeux qu'une telle généralité ne soit pas synonyme de vide et de facilité. Mais en fait, la théorie est devenue un guide indispensable pour les jeunes générations de mathématiciens dans différents domaines.

Dans ce texte, nous nous contenterons de quelques exemples et de quelques définitions pour donner une idée de ce dont il est question.

Tous les groupes forment une catégorie.
Il en est de même de tous les espaces vectoriels,
tous les espaces topologiques,

tous les espaces ordonnés,
et plus généralement il y a la catégorie de tous les ensembles dotés d'une catégorie de structure sur lesquels existent des morphismes.

Ainsi une catégorie n'est pas un ensemble ; il est pratique de penser à elle comme à une classe d'objets qui est plus grande qu'un ensemble. Maintenant, appelons $\mathscr{C}$ une classe d'objets. A chaque $X, Y \in \mathscr{C}$, nous associons un *ensemble* dénoté $Hom(X, Y)$ dont les éléments sont appelés *homomorphismes* ou morphismes de $X$ dans $Y$, et pour tout $X, Y, Z \in \mathscr{C}$, nous supposons l'existence d'une application $(f, g) \longrightarrow g \circ f$ (appelée la composition) de $Hom(X, Y) \times Hom(Y, Z)$ dans $Hom(X, Z)$. Nous dirons que $\mathscr{C}$ équipé de ses homomorphismes est une catégorie si les axiomes suivants sont remplis :

- $K_1$ : la composition est associative : $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
- $K_2$ : pour chaque $X \in \mathscr{C}$, il existe un élément $e_x$ de $Hom(X, X)$ appelé l'unité de $X$ et tel que $e_x \circ f = f$ et $f \circ e_x = f$ pour tous les homomorphismes $f$ (quand ces expressions ont un sens).

Nous appellerons isomorphismes de $X$ dans $Y (X, Y \in \mathscr{C})$ tout $u \in Hom(X, Y)$ tel qu'il existe $v \in Hom(Y, X)$ pour lequel $u \circ v = e_x$ and $v \circ u = e_y$.

Les relations entre les différentes catégories sont établies via les *foncteurs*. Soit $\mathscr{C}, \mathscr{C}'$ deux catégories et soit $F$ une loi qui associe à tout $X \in \mathscr{C}$ un élément $X' \in \mathscr{C}'$, dénotée par $F(X)$ et supposons que, à tout $X, Y \in \mathscr{C}$ et à tout $u \in Hom(X, Y)$, $F$

associe $u' \in Hom(X', Y')$ ($u'$ est dénoté $F(u)$).

$F$ est un foncteur si

a) quand $u$ est une unité alors $F(u)$ est une unité également,
b) pour tout $u, v$ tel que $u \circ v$ a un sens $F(u \circ v) = F(u) \circ F(v)$.

De ces deux notions de catégories et foncteurs, il est possible de construire une algèbre qui devient plus riche lorsque les catégories sont spécialisées.

Montrons sur un exemple simple comment les catégories servent de guide.

De l'étude des catégories classiques "concrètes" dans lesquelles la notion de produit existe (ensembles ordonnés, groupes, espaces topologiques), on abstrait un schéma exprimable en terme de catégories générales, et ainsi la notion d'une *catégorie avec produit*. Si nous rencontrons une nouvelle catégorie concrète non encore dotée d'un produit, le schéma général indique non seulement si l'on peut définir ce produit mais également, il formule sa définition.

Pour résumer : nous avons juste considéré quelques outils de caractère très général ; d'autres existent tels que, par exemple, les séquences exactes et les diagrammes, qui sont constamment utilisés en algèbre et en topologie algébrique. L'utilisation de ces outils est inséparable d'un ensemble très précis de notations dont le champ d'application est en constant élargissement. C'est un nouveau langage, proche du profane, mais clair et évocatif à l'initié. Bien sûr, ces outils ne sont pas des baguettes magiques et ne valent que ce que leur utilisateur vaut.

# Chapitre 3

# Les méthodes de découverte liées à la méthode axiomatique

Bien qu'aucun outil ne puisse engendrer des cadeaux s'il n'y en a pas, les outils peuvent considérablement augmenter l'efficacité quand ils existent. Nous avons étudié quelques-uns des outils de la méthode axiomatique, nous allons maintenant considérer quelques-unes des méthodes de découverte qui ne prennent leur plein sens que dans l'étude des structures multivalentes. Tout chercheur sérieux les découvre de lui-même mais il n'est pas sans intérêt de les rendre explicite.

## 3.1 Le relâchement des axiomes

Un certain analyste croit qu'une assertion $s$ concernant une structure carrefour $S$ définie par un certain nombre d'axiomes est correcte. L'assertion $s$ a été formulée en termes simples qui continueront d'avoir un sens dans un autre système axiomatique $S'$ moins riche en axiomes que $S$ (cela ne signifie pas que l'assertion sera forcément vraie dans $S'$). L'analyste peut alors utiliser la méthode suivante qui se réduit au “relâchement” de certains axiomes. Il essaiera de prouver $s$ dans $S'$ ; il y a très peu de combinaisons d'axiomes dans $S'$ et cela peut aider à trouver la démonstration ; s'il a de la chance, soit il aura prouvé $s$ dans $S'$, et également dans $S$ par conséquent, ou bien il aura trouvé dans $S'$ un contre-exemple $C$ réfutant $s$. Une étude attentive de $C$ peut l'amener à formuler une propriété supplémentaire $P$ qui ajoutée aux axiomes de $S'$ lui permettra de prouver $s$. La seule chose qui restera à faire sera de revenir à $S'$ pour voir si $P$ pourrait être démontrée à partir de là. La preuve de $s$ en découlera.

## 3.2 La contraction des axiomes

La méthode 1, a consisté à supprimer quelques axiomes du système $S$ ; une autre méthode de recherche consiste à en ajouter de nouveaux, i.e. à étudier les cas particuliers.

Les axiomes supplémentaires permettront d'utiliser des outils qui n'étaient pas présents dans $S$ ; de cette façon, nous obtenons des assertions inattendues et des preuves ; en retournant dans $S$, on essaie d'adapter les résultats obtenus à $S$.

Un cas particulier bien connu de cette méthode consiste à utiliser des modèles discrets ou finis. En théorie des probabilités par exemple, les processus de Markov doivent beaucoup à l'étude des processus sur les ensembles discrets ou finis. Dans la théorie du potentiel, l'étude des noyaux sur un ensemble fini révèle des phénomènes inexpliqués dans le cas général.

## 3.3 Etude de structures qui ne sont pas très différentes

Si l'on ne sait pas comment prouver un théorème $T$ concernant une structure carrefour $S$, mais qu'il est possible de le prouver pour une structure $S'$ avec des axiomes différant très peu de ceux de $S$, une grande partie des lemmes, grâce auxquels la preuve de $T$ dans $S'$ peut être établie, peuvent être également valides dans $S$. L'examen des autres peut amener à leur reformulation de façon à obtenir des assertions également valides dans $S$.

Ainsi, par exemple, puisqu'il n'est pas encore possible de prouver l'hypothèse de Riemann, on étudie les problèmes liées aux corps finis, en espérant être capable de transposer les résultats ainsi obtenus à la question classique, ou même de faire apparaître de tels cas comme des cas particuliers de l'un d'eux et du même problème arithmético-algébrique. Ainsi, un problème plus général peut être plus facilement démontré. L'histoire des mathématiques regorge d'exemples montrant qu'en se déplaçant au niveau de généralité adéquat, on gagne souvent en flexibilité et qu'ainsi, les sources secrètes des preuves sont rendues plus évidentes.

Il est cependant important quand nous ne pouvons pas résoudre un problème, de ne pas tomber dans le piège d'en résoudre des plus faciles et de croire qu'un progrès sur la question originale a été fait. De telles tentatives peuvent être d'excellents moyens de s'approcher du but, mais il est souvent préférable de ne pas les publier.

## 3.4 Génération de structures respectant certaines contraintes

La technologie de nos jours peut produire à la demande des machines-outils répondant à des exigences complexes. Nous ne sommes pas si loin de jours futurs où les chimistes seront capable de produire synthétiquement des fibres qui satisferont toutes les exigences du public. En mathématiques, la théorie des catégories nous montre comment il est maintenant possible de produire des structures qui auront toutes les propriétés requises pour telle ou telle question.

L'état d'esprit d'un jeune mathématicien n'est plus celui d'un constructeur en contact avec la matière ; il ne construit plus étape après étape, et brique après brique, les entités complexes dont il a besoin ; il demande seulement que ces entités entretiennent entre elles des relations mutuelles (et non contradictoires) ; elles forment ainsi une catégorie que l'on peut étudier par les méthodes ordinaires. La concrétisation des éléments d'une catégorie comme celle des ensembles dotée d'une certaine structure est l'une des dernières étapes d'une recherche.

# Chapitre 4

# Quelques caractéristiques de la contribution de Bourbaki à l'analyse

Nous avons examiné ci-dessus les outils et les principes ; considérons maintenant comment le groupe Bourbaki, ainsi que ses membres chacun individuellement, les ont utilisés pour effectuer leur travail.

## 4.1 Axiomatique et multivalence

En accord avec ses principes, Bourbaki montre une prédilection pour les structures multivalentes. Bourbaki aime les assertions générales. Il dit “quand ça ne coûte pas davantage, toute théorie produira le cadre le plus général possible”. Ceci, même si cela permet de préserver de nombreuses idées, nécessite un gros effort de la part du lecteur.

Ainsi, non seulement les espaces vectoriels sont étudiés en relation à un corps arbitraire, mais à chaque fois que c'est possible, leur étude est remplacée par celle des modules sur un anneau doté d'une unité (cela, bien sûr, force à adopter des définitions qui sont valides dans le cas général, par exemple, celle de produit tensoriel). De la même manière, des équations comme $x' = f(x, t)$ sont étudiées non pas dans les espaces de dimension finie mais dans des espaces normés et $f(x, t)$ est supposé être seulement Lipschitzien en $x$ et réglé en $t$.[1]

## 4.2 Bourbaki est essentiellement un algébriste

Les initiateurs de Bourbaki avaient découvert l'algèbre en travaillant avec les grands algébristes allemands à une époque où l'algèbre moderne n'était pas connue en France. De ce fait, leur analyse est imprégnée d'algèbre et de notations algébriques : algèbres d'ensembles, bien sûr, mais également groupes, algèbres linéaires et multi-linéaires, dualité. Ils aiment les transformations et les propriétés qui sont décrites comme des relations algébriques. Quand une théorie considérée de façon classique comme appartenant à l'analyse peut être transformée en théorie algébrique en partie ou en totalité, Bourbaki n'oublie pas le plaisir de le faire.

Dans le passé, l'analyse était essentiellement l'étude des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$ dont les valeurs appartenaient à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$ ainsi que l'étude des opérateurs de différentiation et d'intégration. A présent, pour les Bourbakistes, $\mathbb{R}$ est principalement un corps commutatif de caractéristique zéro et cela semble assez souvent suffire. Quand Bourbaki travaille dans le corps des réels, il sait

1. Une fonction est dite réglée en $t$ si elle est la limite uniforme de fonctions étagées.

que la seule chose à ajouter est qu'il est ordonné et localement compact.

Dans les mains de Claude Chevalley, l'étude des groupes de Lie ou des algèbres de Lie est libérée de tout élément extérieur : l'analyse joue là un rôle très restreint ; elle ne sert qu'à prouver l'existence d'entités dotées de telle ou telle propriété ou dans la définition de telle ou telle opération. Par exemple, pour la différentiation, on retient seulement le fait qu'elle soit une application d'une algèbre dans elle-même, satisfaisant identiquement la relation $D(x, y) = xD(y) + D(x)y$.

Dans les mains d'Henri Cartan, la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes est purifiée : l'intégration reste l'outil fondamental mais Bourbaki l'étudie localement, dessinant à partir de lui les propriétés algébriques qui dorénavant sont les seules qui doivent être utilisées. Dans son excellente "*Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*", il préfère le point de vue de Weierstrass à celui de Cauchy et dans son chapitre I, il extrait de l'étude algébrique des séries formelles le maximum d'information à partir de leur composition, de leur inversion et de leur différentiabilité. Quand il étudie la théorie du potentiel, il préfère les outils algébriques : la formule de composition des noyaux ; l'interprétation de l'"opération de balayage" comme une projection orthogonale dans un espace de Hilbert.

## 4.3 Le renouvellement constant de l'Œuvre

Le monument de Bourbaki n'est pas un bilan du passé mais une construction vivante en constante évolution et tournée vers le futur. Bourbaki intègre dans son travail les développements récents qui se sont avérés démontrés, et à cause des nouvelles tendances, il est prêt à refondre complètement des branches même si elles sont d'une importance majeure (souvent découvrant, ce faisant, de nouveaux résultats inattendus et fascinants). Par exemple, les vieux livres du traité vont être refondus en utilisant les catégories, implicitement ou explicitement : des champs non séparés ont acquis droit de cité depuis que leur importance dans différentes théories (et en particulier en géométrie algébrique) a été découverte ; les équations différentielles partielles linéaires sont traitées en termes de distributions, convolutions et de transformations de Fourier et de Laplace.

D'un autre côté, Bourbaki montre sur certaines questions des phobies irrationnelles. Par exemple, il a une conception intéressante de la théorie de la mesure mais il est trop rigide en termes d'espaces localement compacts de convergence vague ; il relègue les mesures abstraites à la Chambre des horreurs, fermant par là la porte pour que ses disciples puissent aller du côté de la théorie des probabilités qui, même si elle n'a pas encore trouvé ses outils optimaux, fait vraiment la preuve d'une vitalité étonnante.

## 4.4 Choix des définitions

Une partie essentielle des efforts de Bourbaki consiste à trouver de bonnes définitions. Voici ce que les gens objectent au caractère excessivement déductif et formel de ce travail : Bourbaki établit les postulats et dessine les conséquences mais n'explique ni ses choix des axiomes, ni les théorèmes qu'il prouve. La raison est que l'histoire de ces choix serait trop longue. Quiconque a essayé de fournir l'axiomatique d'une théorie jusqu'ici confuse sait que les bonnes définitions sont seulement trouvées après un certain nombre de tentatives infructueuses et que ces tentatives devraient être jetées à la poubelle, de peur que l'on affaiblisse son esprit en retenant un certain nombre de théories axiomatiques similaires. La justification réelle pour une bonne théorie axiomatique est son succès.

Observons Bourbaki au travail sur un choix de définitions. Tandis que l'analyste classique commencerait à partir de définitions “naturelles” dans un certain contexte historique et déduirait des théories clefs de ces définitions, en les gardant comme elles étaient à l'origine et en allant de l'avant dans la théorie, Bourbaki changerait les définitions sous l'influence des théorèmes clefs. Il utiliserait les théorèmes clefs comme définitions si je peux utiliser une phrase imprécise mais expressive. Ceci est un des plus importants aspects de la *Bourbakization* des théories.

De façon plus précise, quand un théorème établit que les entités $E$ définies par une définition $D$ ont une propriété $P$ qui se révèle au cours du développement comme plus adaptable que $D$, ou qui reste valide sur un domaine plus grand que $D$ et permet ainsi une plus large généralisation, Bourbaki donne à $P$ le rôle dévolu précédemment à $D$ en obtenant ainsi une définition de $E$ équivalente à la première, mais plus gérable, ou un élargissement de la classe de $E$ à laquelle la théorie est applicable.

Voici quelques illustrations de cette méthode fructueuse.

a) *Mesures de Radon.*

Un théorème dû à F. Riesz a prouvé que, sur $\mathbb{R}$, il y a identité entre les intégrales de Stieltjes (définies pour une fonction de variation localement limitée) et les formes linéaires continues de l'espace $\mathscr{H}(\mathbb{R})$ des fonctions numériques continues s'évanouissant à l'extérieur d'un compact.

Pris comme définition, cela fournit quelques avantages de la mesure de Radon sur la mesure ordinaire : l'extension immédiate non seulement à $\mathbb{R}$ mais également à tout espace localement compact ; une plus grande flexibilité dans l'étude des opérations sur les mesures (produit de mesures, images de mesures, etc.) ; les adaptations parfaites à la définition de la topologie faible de l'espace de mesures, qui s'est avérée être la plus adaptée de toutes les topologies de cet espace.

Il s'ensuit que la définition des mesures de Radon est maintenant bien connue.

Les définitions qui précèdent ont montré que cette définition n'était pas adaptée au seul cas de l'intégration. Une mesure de Radon n'est rien d'autre qu'une forme linéaire continue sur un certain espace vectoriel topologique ; les nouvelles entités peuvent maintenant aisément être définies par le processus suivant. Soit $V$ un espace topologique ; les formes linéaires continues sur $V$ sont de nouvelles entités qui forment un espace vectoriel $V'$ dual de $V$ ; la théorie de la dualité, maintenant bien établie, fournira des topologies variées sur $V'$ qui rendront plus facile l'étude de $V$. Cela donne un monde de possibilités. Mentionnons, comme exemples, les distributions de L. Schwartz, les courants de de Rham, les surfaces généralisées de L. C. Young.

b) *Mesures invariantes sur un groupe*

L'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ peut être définie par tout processus de continuation de l'intégrale de fonctions continues avec support compact ; sur l'espace $\mathscr{H}(\mathbb{R})$ de ces fonctions, c'est une forme linéaire $J$ qui est positive au sens où $I(f) > 0$ pour tout $f > 0$ et est invariante par translation, au sens où $I(f) = I(g)$ quand $g$ est obtenue de $f$ par translation.

On peut montrer que toute fonction qui a ces propriétés ne diffère de l'intégrale de Lebesgue que par un coefficient constant. Par conséquent, la définition axiomatique de l'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ (à facteur constant près) est : c'est une forme linéaire positive sur $\mathscr{H}(\mathbb{R})$ qui est invariante par rapport aux translations sur $\mathbb{R}$. Cette nouvelle définition est non seulement plus gérable parce qu'elle amène les propriétés de l'intégrale qui sont directement utilisables mais également parce qu'elle peut être immédiatement adaptée au cas des groupes arbitraires localement compacts.

c) *Fonctions mesurables*

En analyse classique, les applications mesurables de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ sont définies comme suit :

$f$ est dite mesurable si pour tout nombre $\lambda$, l'ensemble des $x$ tels que $f(x) < \lambda$ est mesurable (selon la mesure de Lebesgue).

Le théorème de Lusin démontre l'équivalence de cette définition avec la suivante : $f$ est mesurable si, pour tout compact $K$ de $\mathbb{R}$, et pour tout nombre $\epsilon > 0$, il existe un sous-compact $K'$ de $K$ tel que

(1) la mesure de $(K - K')$ est plus petit qu'$\epsilon$ ;
(2) la restriction de $f$ à $K'$ est continue.

La propriété impliquée dans cette seconde définition est à la fois suggestive et plus pratique dans un certain nombre d'applications. D'un autre côté, elle continue à avoir une signification intéressante quand on substitue pour la mesure une fonction sur l'ensemble plus générale, comme par exemple la capacité en théorie du potentiel. Finalement, elle est immédiatement utilisable dans la définition des applications mesurables d'un espace localement compact (doté d'une mesure de Radon positive) dans un espace topologique arbitraire.

Cette seconde définition est donc préférable à la définition classique et devrait être adoptée.

## 4.5 Choix des contenus et théorèmes

Dans l'écriture de son traité, Bourbaki est forcé de faire des choix à tout moment. Nous avons juste vu comment il choisit ses définitions. Il est également très attentif quand il choisit le contenu de ses chapitres.

Son intérêt principal est dans les outils et seulement dans ceux qui ont particulièrement montré leur utilité. Les résultats élégants ou même les résultats profonds ne retiennent pas son attention s'ils sont des fins de théories ou s'ils conduisent à des impasses. Il abandonne, non concerné par des soucis de complétude, les notions qui sont proches de celles qu'il a jugées comme étant les plus fondamentales. S'il pense qu'une théorie n'est pas suffisamment mûre pour qu'un choix soit fait parmi ses différentes possibilités de fondations axiomatiques, il préfère attendre pour l'inclure que la théorie ait suffisamment mûri. Il n'a que peu de goût pour les hors-d'œuvres, pour l'embellissement ou pour les développements accidentels sans grande connexion avec le reste des mathématiques.

Il construit comme les Romains, solidement. Si la construction est par chance, élégante, c'est dû à la beauté de sa propre structure ; par-dessus tout, il cherche la simplicité, la force, l'utilité, l'efficacité.

En topologie générale, suivant Haussdorf, il a fait un choix sobre parmi un labyrinthe de notions. Choix de postulats pratiques pour les espaces topologiques compacts ; choix d'une bonne notation pour la compacité ; l'introduction des filtres (H. Cartan) a simplifié la notion de convergence ; celle des espaces uniformes (A. Weil) a amené un certain nombre de notions qui jusque-là étaient considérées comme non reliées. Cette introduction des espaces uniformes a été plus tard justifiée quand les relations entre les espaces compacts et les espaces uniformes ont été découvertes.

En analyse fonctionnelle, il a été capable de mettre dans la bonne perspective les notions et les techniques consacrées par la dualité ; le théorème du graphe fermé ; le théorème de la séparation d'ensembles convexes ; les théorèmes de Krein et Milman et de Stone-Weierstrass.

Nous avons déjà mentionné son choix exclusif, dans la théorie de l'intégration, des mesures de Radon sur les espaces localement compacts, qui entre ses mains, sont devenus un outil remarquable. Dans les "volumes élémentaires", les questions classiques sont traitées avec un économie de moyens inhabituelle et une grande généralité. Le théorème des accroissements finis est donné pour les fonctions dont les valeurs appartiennent à un espace normé ; les fonctions convexes sont traitées de façon élémentaire mais dans un style suffisamment complet pour satisfaire la plupart des besoins de l'analyse ; les primitives sont définies en référence aux fonctions réglées ; pour finir, nous avons déjà noté la généralité de son étude "élémentaire" des équations différentielles.

# Chapitre 5

# L'analyse moderne dans le monde d'aujourd'hui

J'ai exprimé au début de ce texte que l'étude des travaux de Bourbaki et des travaux de ses disciples donnerait une idée bonne et fidèle des tendances modernes en analyse.

Après un examen bref des caractères saillants de ces travaux, nous pouvons essayer de vérifier cette assertion en regardant ce qui est fait en analyse dans le monde entier. Dans ce but, ouvrons les "Mathematical Reviews". Environ deux tiers de ce qui est écrit pourrait encore l'être avec des outils qui existaient déjà il y a une trentaine d'années ; un bon nombre de ces articles ont de la valeur, certains contiennent des raisonnements profonds et ingénieux ;ils ont introduit des notions importantes et des outils ont été créés et testés dans un domaine spécialisé. Mais l'on peut se lamenter du fait que trop peu de rédacteurs ne semblent être au courant de l'existence d'outils basiques qui ont été complètement testés et qu'ils redécouvrent, avec ingénuité mais laborieusement, et dans un domaine restreint des cas particuliers de théorèmes déjà connus.

Dans le tiers restant, les rédacteurs utilisent les outils modernes. Là, à nouveau, on trouve le gaspillage inévitable qui va de pair avec toute production scientifique ; trop d'articles sont peu profonds ou creux et n'ajoutent rien à la construction du "temple mathématique". Mais dans les meilleurs articles, les théories modernes montrent un rendement extraordinaire. Chaque année amène la solution d'un ou de plusieurs problèmes considérés comme inatteignables et voit des ponts créés entre des théories qui semblaient n'avoir rien en commun.

Voici une liste des branches les plus florissantes de l'analyse :

- Groupes topologiques et Théorie de Lie.
- Algèbre topologique.
- Mesure et intégration.
- Fonctions de plusieurs variables complexes et variétés analytiques (qui contiennent beaucoup de techniques algébriques, faisceaux de fibres, espaces filtrés).
- Equations différentielles partielles (dans lesquelles on utilise des distributions et d'autres fonctions généralisées ; étude du cas non linéaire).
- Théorie du potentiel (noyaux généraux, étude des principes et des relations avec la théorie des probabilités).
- Analyse harmonique sur les groupes généraux, fonctions de type positif.
- Analyse fcnctionnelle (espaces vectoriels topologiques locale-

ment convexes ; convexité ; théorie spectrale des opérateurs.)

- Topologie générale.
- Géométrie différentielle.
- Topologie différentielle.
- Théorie des probabilités.

Ces branches ont développé leur pleine vigueur en suivant les mêmes principes que Bourbaki ; le langage utilisé est le même. Dans les colloques spécialisés qui leur sont consacrés, les meilleurs des spécialistes utilisent les mêmes méthodes, le même langage, ont les mêmes préoccupations. Dans ses parties les plus actives, l'analyse moderne manifeste donc une grande unité.

# Chapitre 6

# L'impact sur l'enseignement des mathématiques modernes

Depuis des temps immémoriaux, l'enseignement a été adapté à l'évolution des connaissances. Mais cette adaptation a parfois été à la traîne, au grand détriment et de la science et de l'enseignement. Durant les cinquante dernières années environ, le progrès a été si rapide qu'un délai pour l'adaptation est devenu inévitable. En mathématiques, le "nouveau visage" résultant de l'utilisation de la théorie des ensembles et de la méthode axiomatique a été une révolution qui rend urgente une rénovation de l'enseignement à tous les niveaux : primaire, secondaire et universitaire.

La rénovation est nécessaire.

D'abord pour la santé des mathématiques elle-même. En effet, ce ne sont pas les vieilles personnes ou même celles d'un âge moyen qui produisent le meilleur travail ; il est impératif que nous clarifiions le chemin pour la jeune génération. De façon à ce qu'ils assimilent les mathématiques plus facilement, nous devons leur montrer clairement les grandes idées simplificatrices, leur enseigner comment gérer les situations complexes en leur parlant des théories unificatrices, qui lancent des ponts entre différents domaines. Cela requerra un sacrifice et d'accepter d'abandonner cette théorie élégante ou cette autre, qui, polies par des siècles de travail, sont vues maintenant comme des branches isolées.

Secundo, pour les utilisateurs des mathématiques (qui sont chaque jour de plus en plus nombreux), d'un côté, un certain nombre de techniques mathématiques sont devenues indispensables ou utiles en physique et ingénierie : les matrices ; les transformées de Fourier et Laplace ; les équations différentielles partielles ; les distributions ; les espaces de Hilbert ; etc. D'un autre côté, les nouvelles mathématiques ont amené des simplifications et une économie de pensée à tous les domaines, dont le physicien et l'ingénieur peuvent bénéficier autant que le futur mathématicien.

Il est évident que les livres pour un tel renouvellement sont encore désirés. Complètement absorbés par leurs recherches, les mathématiciens professionnels ont laissé une faille profonde entre la recherche et l'enseignement. Mais dans les dix dernières années, effrayés par la vue du goufre grandissant, ils ont réagi. Ils ont commencé par changer leur manière d'enseigner, puis ils se sont tournés vers leurs collègues de l'enseignement secondaire et ils ont engagé des dialogues profitables avec eux. Ils ont encore besoin de rassembler leur courage pour une tâche urgente et essentielle. Le temps des simples critiques et des vagues indications est révolu. Ils doivent maintenant s'asseoir et écrire les livres nécessaires ou aider leurs collègues, les techniciens, ou les enseignants du secondaire à les écrire. Le but n'est pas de recopier la production de Bourbaki qui a été conçue pour des étudiants avancés, mais d'adapter à chaque niveau d'âge les méthodes et les techniques des mathématiques d'aujourd'hui.

Tertio, pour ceux qui ne deviendront ni mathématiciens, ni utilisateurs de mathématiques, il est universellement reconnu que de l'étude de cette discipline, ils peuvent tirer une flexibilité intellectuelle qui ne peut être acquise autrement. Les mathématiques modernes donneront peut-être davantage à ceux-là qu'aux autres. Parce qu'elles n'utilisent pas trop de technique, ils peuvent apprendre la théorie des ensembles comme reliée à la logique et trouver cela attractif et utile. La simplicité des systèmes axiomatiques multivalents les rend accessibles à tous et comme elles ont un certain nombre d'applications variées, elles n'apparaîtront pas comme un simple jeu.

Il est hors de question de tenter ici de décrire un programme. Tout ce qui peut être fait est d'indiquer quelques principes qui découlent de l'examen que nous avons mené dans ce texte.

Habituons nos élèves à penser dès que possible en termes d'ensembles et d'opérations. A un très jeune âge, on pourra leur apprendre à utiliser le langage et l'algèbre des ensembles, car son symbolisme est simple et précis. Des expériences d'enseignement ont montré que les élèves aiment l'utiliser.

Conjointement avec l'algèbre des ensembles, les éléments de logique peuvent leur être enseignés en connexion avec l'analyse grammaticale de leur propre langue naturelle. Il a été observé que des étudiants seniors de 19 ans sont incapables de raisonner, ne peuvent donner la négation d'une proposition, ni énoncer correctement une définition ou un théorème ; nous pensons que ceci est dû à un entraînement trop tardif à ce genre d'exercice.

Très tôt également, nos élèves doivent saisir la notion de fonction. Dans ce but, ils doivent avoir étudié et construit divers exemples provenant de la vie courante, de l'algèbre, de l'arithmétique, de la géométrie, de la physique, etc. Ils devraient savoir comment composer des fonctions, prendre la fonction réciproque d'une fonction mono-valuée, reconnaître une transformation ou un groupe de transformations. Progressivement, ils seront amenés aux structures plus vastes d'équivalence, d'ordre, et aux structures topologiques et algébriques. Ces structures peuvent être étudiées, à différents niveaux, dès le début de l'enseignement secondaire (à environ 12 ans).

Le but est de donner à nos élèves quelques outils et de leur apprendre à les utiliser. Nous devons éviter de nous perdre dans des généralités ; au contraire, nous devons nous diriger droit vers les théorèmes clefs qui incluent un grand nombre de théorèmes spécialisés avec des applications immédiates.

Par exemple, on trouvera très tôt en géométrie élémentaire la structure affine du plan ou de l'espace, et on utilisera l'algèbre des vecteurs. Après cela, d'une manière ou d'une autre, le produit scalaire peut être introduit et cela réduira les parties essentielles de la géométrie selon une mesure ordinaire à quelques calculs simples et peu nombreux.

De façon similaire, au niveau universitaire, les outils les plus puissants seront mis en lumière : les théorèmes sur les espaces compacts ; la mesure de convergence uniforme ; le théorème de Stone-Weierstrass ; la méthode des approximations successives, etc. : les étudiants devraient être entraînés à reconnaître quelles structures sont impliquées dans les assertions rencontrées ; cela présuppose que les définitions et les assertions utilisées mettent toujours l'accent sur les structures. Par exemple, l'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ peut leur apparaître à une certaine étape comme une forme linéaire positive sur $\mathscr{H}(\mathbb{R}^n)$, invariante par rapport aux translations ; le Laplacien doit apparaître comme le seul opérateur différentiel du second ordre invariant par rapport aux déplacements, etc.

Dans ce texte, beaucoup a été dit à propos des mathématiques en général, et peu à propos de l'analyse en particulier. La raison en est qu'il n'est plus possible de diviser l'enseignement des mathématiques en ses parties classiques que sont l'algèbre, la géométrie et l'analyse.

Les bases effectives pour l'enseignement de l'analyse même à un niveau scolaire sont l'algèbre (algèbres d'ensembles, étude du corps $\mathbb{R}$, algèbre linéaire, groupes) et la topologie. Les mêmes bases algébriques sont nécessaires à l'étude de la géométrie (qui signifie dans le secondaire aujourd'hui l'étude d'un espace vectoriel de dimension deux ou trois muni d'un produit scalaire).

Il devient donc essentiel de penser à un enseignement dont les éléments principaux seront les structures fondamentales. L'algèbre et la géométrie s'étaieront mutuellement, l'algèbre amenant son symbolisme et ses opérations, la géométrie amenant son langage chargé d'intuitions. La géométrie fournira à l'analyse son cadre topologique, l'outil de la convexité et une interprétation adéquate de l'intégration et de la différentiation ; l'analyse à son tour produira pour l'algèbre une collection riche de groupes et d'espaces vectoriels.

*L'activité mathématique comme un tout*

Peu a été dit ici à propos des méthodes de recherche et un peu plus a été dit à propos de la théorie mathématique déjà existante. Pour conclure cet examen des mathématiques entrepris dans le but d'aider à comprendre les problèmes rencontrés dans l'enseignement des mathématiques, ajoutons un mot supplémentaire à propos d'un aspect de l'activité mathématique dont on n'a pas parlé du tout.

Toute activité mathématique est formée de cycles, plus larges, dans lesquels on peut reconnaître essentiellement les quatre étapes suivantes : observation, mathématisation, déduction, applications.

Ces quatre étapes sont essentielles, en particulier un enseignement purement déductif serait traumatisant et stérile.

Chacune de ces larges étapes correspond à la conquête d'une nouvelle notion ; ces quatre étapes sont les étapes nécessaires qui permettent au cerveau de se restructurer et de s'élever d'un niveau de pensée à un autre. Ceci est aussi valable pour le chercheur que pour l'élève dont l'activité créatrice ne peut fonctionner à moins que nous ne le laissions suivre le chemin qui mène à la connaissance, et peut-être que nous l'aidions à suivre ce chemin.