La musique des sphères
Pierre Cartier et Edwige Kertès

Pierre Cartier : 1, 2, 3, commençons le jeu, 4, 5, 6... Continuons la litanie. Compter, c'est cela. Égrainer, les nombres, les uns derrière les autres. Ces nombres que le mathématicien appelle entiers, exacts. Et pourtant, ils ne suffisent pas. La nature nous a joué des tours.

Edwige Kertès : Oui, certaines grandeurs et tout le problème est là, n'ont pas de mesure commune. Leur rapport ne peut pas être calculé exactement.

Pierre Cartier : Prenons le calendrier : la Nature nous a fourni deux horloges naturelles, la Lune et le Soleil. Mais elles ne sont pas exactement en concordance.

Edwige Kertès : Ce manque de concordance interroge le mathématicien, qui rêve d'harmonie. Pas de concordance entre la succession du jour et de la nuit, la réapparition des lunes, le cycle des marées, le retour des saisons. La mécanique céleste obéit à des lois complexes.

Pierre Cartier : Une année, tout le monde le sait, c'est 365 jours. Non, pas tout à fait : 365 jours un quart. Et même là, pas un quart, 1 divisé par quatre, plus quelque chose comme un dixième. Et encore, cela demanderait à être précisé. Mais de la même manière que les petits ruisseaux font les grandes rivières, les petits riens peuvent semer de grandes perturbations.

Edwige Kertès : En effet, il suffit d'une petite imprécision, dans l'évaluation d'une année, pour entraîner un décalage progressif des saisons. Jules César avait instauré une année de 365 jours un quart, soit trois années de 365 jours et une année de 366 jours. Mais ce jour en plus, tous les quatre ans pesait trop lourd dans la balance du temps puisque l'année solaire est légèrement inférieure à 365 jours un quart. Ce n'est qu'à la fin du XVI^{e} siècle que sera décrétée la suppression de trois jours bissextiles tous les quatre cents ans.

Pierre Cartier : En musique aussi, nous rencontrons les mêmes phénomènes. La quinte, l'octave, qui sont les intervalles de base sur lesquels tout est construit en musique, ne collent pas exactement. On ne peut pas faire un nombre exact de quintes qui corresponde à un nombre exact d'octaves, quelle que soit la manière dont on s'y prend, il y a toujours un petit reste. Les musiciens l'appellent le coma, à peine audible.

Edwige Kertès : À peine audible, mais si l'on mélange deux notes séparées par un coma, on perçoit nettement le battement entre les deux vibrations de fréquences voisines. La gamme musicale a une structure mathématique. Pythagore le premier, chercha le rapport entre la longueur d'une corde, et le son qu'elle émet. Il découvrit que si l'on divise une corde en deux, on obtient un son à l'octave supérieure. Si l'on divise une corde aux deux tiers, on obtient un son à la quinte supérieure. Mais en allant de quinte en quinte, donc de deux tiers en deux tiers, jamais on n'arrive au même point qu'en allant d'octave en octave, donc de moitié en moitié. Car les puissances de trois ne rencontrent jamais celle de deux, toujours paires. En parcourant le cycle des quintes dites naturelles, on voit que la dernière quinte, celle qui rejoint le cycle des octaves, est forcément plus courte. C'est la quinte du loup.

Pierre Cartier : Au fond, dans la construction, aussi bien des calendriers que des gammes, le problème est le même : il s'agit à la fois de répartir les intervalles longs et les intervalles courts, les tons, les demi-tons, par exemple, et de distribuer au mieux les petites différences qui résultent de l'incommensurabilité des deux périodes.

Edwige Kertès : Le coma est la petite différence entre la quinte du loup et la quinte naturelle. Pour construire une gamme tempérée, cette différence est distribuée régulièrement sur toutes les quintes, de façon à accorder le mieux possible quinte et octave, comme certains calendriers accordent au plus près Lune et Soleil. L'intervalle entre deux nouvelles lunes est de 29 jours et demi, environ. L'année solaire dure 12 mois lunaires, soit 354 jours plus un reste d'environ 11 jours. Pour construire un calendrier luni-solaire, où chaque mois commence par une nouvelle lune, tout en gardant le cycle des saisons, il faut tenir compte de ces 11 jours de décalage. Comment ? En rajoutant une treizième lune, donc un treizième mois, tous les deux ou trois ans. C'est au cinquième siècle avant Jésus-Christ que fut découvert en Grèce le cycle de 19 ans qui ramène les nouvelles lunes presque exactement aux mêmes dates du calendrier solaire. Il s'agit, sur dix neuf ans, de distribuer le plus régulièrement possible les années de douze mois lunaires et les années de 13 lunes.

Pierre Cartier : Dans la pensée de nombreux philosophes, l'ordre qui régit le mouvement des astres n'est pas d'une nature différente de l'harmonie qui préside aux intervalles en musique. Ce désir d'harmonie musicale qui, pour les Pythagoriciens, avait son fondement dans la notion des nombres, on le retrouve au XVII^{e} siècle chez le grand astronome Kepler. Kepler est l'inventeur d'un certain nombre de formules, telles que l'harmonie des mondes, la musique des sphères. Ayant découvert dans son travail astronomique que les planètes ne se déplacent

Transcription d'une petite vidéo visionnable ici : http://webusers.imj-prg.fr/ jean-michel.kantor/MOSAIQUE/Mosaique-musique.html.

pas à vitesse constante dans leur mouvement de révolution autour du Soleil, il avait imaginé de traduire cette variation par un thème musical qui serait propre à chaque planète et ainsi les planètes joueraient autour du Soleil une symphonie.

Edwige Kertès : Kepler met toute son énergie à trouver le secret du monde pour en montrer la beauté mathématique, signe de perfection divine. Dieu, pour Kepler, est un architecte qui ne laisse rien au hasard. Ainsi Kepler découvrira selon quelle loi les planètes tournent autour du Soleil en décrivant une ellipse. Son approche, à la fois métaphysique et scientifique, rejoint celle d'astrophysiciens qui, de nos jours, construisent le modèle du Big-Bang pour essayer d'élucider les mystères du commencement.

Pierre Cartier : Les mathématiques prétendent instaurer un ordre du monde et sont mus par un désir de perfection, mais elles ne peuvent s'empêcher d'être confrontées aux phénomènes naturels. La fonction des mathématiques, c'est le plus souvent de traquer l'ordre sous le désordre, de rechercher le rapport exact là où l'on avait d'abord vu qu'une approximation. Lorsqu'il s'agit de mettre en rapport des cycles différents ou des longueurs incommensurables, on peut le faire grâce aux fractions continues. Celles-ci fournissent une représentation simple, mais qui laisse voir, aux profanes, leur caractère perpétuellement inachevé.

Edwige Kertès : Car quelle que soit la précision des calculs, il y a toujours un petit reste.

Séminaire BOURBAKI
30e année, 1977/78, no 513

513-01
Février 1978

LOGIQUE, CATÉGORIES ET FAISCEAUX
(D'après F. Lawvere et M. Tierney)

PIERRE CARTIER

À Alexander Grothendieck,
pour son 50ème anniversaire.

1. Introduction

1.1. La logique "classique"

La logique "classique" a été codifiée pour plus de deux millénaires par Aristote dans son ouvrage $\tau\grave{o}\ \ O\rho\gamma\alpha\nu o\nu$. Par une analyse de la pratique des sciences mathématiques et de l'argumentation juridique, il met en évidence le caractère *hypothétique* des jugements comportant nécessairement hypothèse et conclusion. Le rôle de la logique est d'étudier les *règles de déduction* par lesquelles, à partir de certains jugements vrais (ou acceptés comme tels par l'interlocuteur), on peut en fabriquer de nouveaux. Le modèle de ces règles resta longtemps le syllogisme qui sous sa forme la plus simple ("barbara") se traduit ainsi :

$$\begin{array}{r}
\text{Tout B est C} \\
\text{(or) Tout A est B} \\
\hline
\text{(donc) Tout A est C.}
\end{array}$$

Une fois admis le principe du tiers exclus ("toute assertion est vraie ou fausse"), on est aussi conduit à cette extraordinaire création de l'esprit chicanier des Grecs : le raisonnement par l'absurde.

L'analyse classique confond les relations des types "A appartient à B" et "A est contenu dans B". Les logiciens du 19e siècle découvrent progressivement que la logique aristotélicienne est une logique des classes, maniant les relations que nous notons $A \subset B$ et $A \cap B = \varnothing$, ainsi que leurs négations. Peu à peu, on s'enhardit à traiter de relations plus complexes entre classes, et à créer un véritable calcul logique (voir [14], chapitre 2, pour une mise au point moderne). Mais on rencontre ici une difficulté assez subtile ; en effet, dans une assertion du type

$$(A \subset B) \implies (A \subset C)$$

par exemple, on doit distinguer les notions voisines d'implication logique ($\implies$) et d'inclusion des classes ($\subset$). De même, le mode de déduction appelé "modus ponens" (de A et $A \implies B$, on a le droit de conclure B) oblige à séparer plusieurs niveaux d'implication, comme il est illustré de manière burlesque dans l'apologue "Achille et la tortue" de Lewis Carroll. Frege [13] fait la remarque

Je remercie vivement F. Lawvere et J. Bénabou pour leurs indications et les documents qu'ils m'ont communiqués lors de la préparation de cet exposé.

fondamentale qu'il ne suffit pas qu'un jugement soit formulé d'une manière grammaticalement correcte pour qu'il soit vrai ; il invente un nouveau signe à ce propos : pour lui $\vdash A$ signifie que l'on affirme A comme vrai. On doit à Gentzen [12] et à son calcul des séquents la distinction définitive entre l'affirmation $A \vdash B$ d'un jugement hypothétique d'hypothèse A et de conclusion B, et une implication "interne" conçue comme opérateur dans l'ensemble des "formules logiques". Il met aussi en évidence que le maniement des règles de déduction présuppose un résidu irréductible de logique extérieur au système formel.

1.2. Paradoxes

Frege et Peano imposent la distinction entre les relations $x \in A$ et $A \subset B$ et Peano invente les signes nécessaires. Frege [13] découvre aussi l'importance des quantificateurs. Avec Cantor et Dedekind, on s'enhardit à considérer comme un tout la classe des objets satisfaisant à une propriété donnée et à introduire cette classe comme sujet dans des jugements d'un ordre supérieur : Cantor va si loin qu'il considère tout objet mathématique comme un ensemble, au moins jusqu'à la découverte des antinomies, telles celle de Russell sur l'ensemble des x tels que $x \notin x$. Si la seule relation primitive est $\in$, il faut donc abandonner l'illusion que toute propriété définit un ensemble légitime. Deux solutions ont été offertes à cette difficulté. Russell restreint la portée de la relation $\in$ au moyen des types, de sorte que l'on n'a plus le droit d'écrire $x \notin x$. Zermelo, Fraenkel et leurs successeurs délimitent par axiomes le champ des relations "collectivisantes" qui définissent des ensembles. Un système intermédiaire (d'ailleurs équivalent à celui de Zermelo-Fraenkel) est celui de von Neumann, Gödel et Bernays qui ne retiennent que deux types : ensembles et classes.

Mais cette axiomatisation de la théorie des ensembles laisse ouverts deux énormes problèmes, concernant l'axiome du choix et l'hypothèse du continu. Gödel [45] démontre en 1940 leur non-contradiction, grâce à l'emploi du modèle interne de la théorie des ensembles fourni par les ensembles "constructibles". Il faut attendre 1963 pour apprendre de Cohen [44] que ces deux axiomes sont indépendants des axiomes non controversés. Cohen invente à ce propos la méthode du "forcing" : elle consiste à introduire un ensemble indéterminé a d'entiers (positifs), et pour chaque entier n d'étudier la classe des assertions qui sont forcées par la connaissance du segment $a \cap [0, n]$ de a. On est ainsi amené à codifier une logique qui se développe au fur et à mesure qu'on obtient des informations supplémentaires (reflétant d'ailleurs le développement réel des connaissances). Si le principe du tiers-exclus reste vrai à la limite, on dispose à chaque étape finie de relations vraies, fausses ou indéterminées : il est remarquable que les règles de déduction ainsi obtenues soient pratiquement identiques à celles qu'Heyting [19] et Kripke ont formulées en traduisant la philosophie "intuitionniste" de Brouwer.

Une variante de la méthode de Cohen est due à Scott et Solovay [48, 50]. Elle consiste à supposer qu'une relation cesse d'être vraie ou fausse, mais qu'elle est susceptible de valeurs logiques intermédiaires, appartenant à une algèbre de Boole. Cette démarche est familière dans le calcul des probabilités, où depuis Kolmogoroff on interprète cette algèbre au moyen des parties mesurables de l'espace Ω où les Dieux jouent aux dés (il est remarquable que Boole ait introduit le calcul qui porte son nom pour exprimer des raisonnements probabilistes).

1.3. Catégories

Une ligne de développements bien différente est issue des travaux de Mac Lane et Eilenberg sur les catégories. Après le succès spectaculaire des méthodes catégoriques en Algèbre, Topologie et Géométrie algébrique, il était naturel de chercher à inclure la théorie des ensembles elle-même dans ce cadre. C'est ce qu'entreprend Lawvere à partir de 1963, sur l'instigation d'Eilenberg. Lawrere propose en 1964 un nouveau système d'axiomes pour la catégorie des ensembles [1, 2] puis découvre la signification logique de la relation d'adjonction entre foncteurs [3, 4] et étend de manière importante le rôle des quantificateurs [5].

A peu près au même moment, Grothendieck [23, 24] pousse jusqu'à ses conséquences ultimes l'idée des surfaces de Riemann, et réalise que la "topologie" d'une variété algébrique X réside non seulement dans ses ouverts au sens de Zariski, mais aussi dans les variétés algébriques étalées sur X. Il étend à cette situation nouvelle la technique des faisceaux, dont l'usage était bien établi en Géométrie algébrique grâce à Cartan et Serre. Grothendieck développe une vaste théorie des "topologies" sur une catégorie, et des catégories de faisceaux qui leur sont associées. Il baptise *topos* ces dernières, et remarque qu'elles sont l'objet fondamental, ce que justifie Giraud en caractérisant axiomatiquement les topos.

Une des idées-clé de Grothendieck est celle de "famille de variétés algébriques". Lawvere [5, 6, 7] réalise progressivement la synthèse de cette idée avec celle d'ensembles variables, rencontrée dans la logique intuitionniste, le forcing ou le calcul des probabilités. Acceptant le slogan de Grothendieck selon lequel la catégorie des faisceaux sur un espace topologique a les "mêmes" propriétés que celle des ensembles "constants", il tire de son axiomatique des ensembles et de la définition des topos par Giraud une nouvelle définition des topos qui a l'avantage d'être absolue et de ne pas s'inscrire à l'intérieur d'une théorie des ensembles préétablie. Son axiomatique est progressivement simplifiée et conduit à la théorie élémentaire des topos qui se développe rapidement entre 1969 et 1975. Un des avantages de cette théorie est que chaque topos contient automatiquenent un objet Ω qui joue le rôle d'ensemble des valeurs logiques ; et qu'il n'est plus nécessaire de l'imposer de l'extérieur comme dans les modèles booléens de Scott et Solovay. Du coup, la logique intuitionniste des types apparaît comme la norme naturelle dans les topos ; ce n'est pas fortuit que l'ensemble des ouverts d'un espace topologique ait la structure d'une algèbre des propositions au sens de Brouwer-Heyting.

Ce nouveau point de vue suggère que l'on peut réaliser des modèles non orthodoxes de la théorie des ensembles en combinant l'usage des faisceaux avec la technique des ultraproduits. C'est ce que démontre Tierney [53] en donnant une nouvelle version, plus compréhensible, de la démonstration par Cohen de l'indépendance de l'hypothèse du continu. La démonstration de Tierney laissait ouverte la question des rapports entre la théorie des topos et les théories orthodoxes des ensembles, mais cette lacune est rapidement comblée par Cole [52], Mitchell [39] et Osius [52] par usage d'un artifice ancien de Mostowski [47].

1.4. Diagrammes

Eilenberg et Mac Lane ont souvent insisté sur l'importance des raisonnements par diagrammes, qui évitent le recours à la notion d'élément et gardent un sens dans toute catégorie. Malheureusement, des arguments simples se transforment souvent en de monstrueux diagrammes qui envahissent les pages imprimées. Par un étrange retour des choses, ces représentations ont été réhabilitées récemment. Dans des versions successivement affinées, Mitchell [39], Osius [40, 41] et Bénabou [36] ont proposé un “langage interne” des topos qui permet l'interprétation de toute relation de la logique des types à l'intérieur d'un topos donné. S'appuyant sur les idées de Bénabou, Coste [37] a montré que la logique intuitionniste (révisée sur un point concernant les variables libres) était la logique adéquate à ce type de modèle en démontrant un théorème de complétude. Un des avantages de cette méthode est de remplacer des constructions assez compliquées dans des faisceaux par des raisonnements “ensemblistes” élémentaires.

Il semble que la théorie des topos a maintenant atteint une certaine stabilité, comme en témoigne la parution récente du premier ouvrage [31] entièrement consacré à ce sujet. On va essayer dans la suite de cet exposé de décrire la théorie telle qu'elle apparaît aujourd'hui. Il faudra d'abord décrire la logique intuitionniste.

2. Outils de la logique

2.1 Algèbres de Heyting et de Boole [1]

Rappelons qu'un *treillis* est un ensemble ordonné T où deux éléments arbitraires a, b ont une borne supérieure $a \vee b$ et une borne inférieure $a \wedge b$. On a les relations suivantes dans T :

$$a \vee a = a, \qquad a \vee b = b \vee a, \qquad a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c \tag{1}$$
$$a \wedge a = a, \qquad a \wedge b = b \wedge a, \qquad a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c \tag{2}$$
$$a \wedge (a \vee b) = a \vee (a \wedge b) = a. \tag{3}$$

Inversement, si l'on s'est donné deux opérations $\vee$ et $\wedge$ dans un ensemble T satisfaisant aux relations (1), (2) et (3), c'est un treillis dans lequel la relation d'ordre est définie par

$$a \leq b \iff a = a \wedge b \iff a \vee b = b \tag{4}$$

Un treillis est dit *distributif* s'il satisfait aux deux relations équivalentes suivantes :

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c), \qquad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c), \tag{5}$$

Une *algèbre de Heyting* est un treillis H possédant un plus petit élément 0 et un plus grand élément 1, muni d'une opération $\to$ telle que les relations $a \wedge b \leq c$ et $a \leq (b \to c)$ soient équivalentes. Il y a unicité de 0, 1 et de l'opération $\to$, et une algèbre de Heyting est un treillis distributif. Pour tout a dans H, notons a' l'élément $a \to 0$ de H. On a alors les relations

$$a \leq a'', \qquad a \wedge a' = 0 \tag{6}$$

et l'application $a \mapsto a'$ est décroissante, d'où aussitôt $a' = a'''$.

Une *algèbre de Boole* B est une algèbre de Heyting dans laquelle on a $a = a''$, ou ce qui revient au même $a \wedge a' = 1$. Il revient au même de supposer que B est un treillis distributif, et qu'à chaque élément a de B, on peut associer un élément a' tel que $a \wedge a' = 0$ et $a \vee a' = 1$; il y a alors unicité de a'. Une structure d'algèbre de Boole sur un ensemble B équivaut à une structure d'anneau booléen, c'est-à-dire dans lequel on a l'identité $a^2 = a$. Les éléments 0 et 1 sont les mêmes pour les deux

1. cf. [17], [22]

structures, et l'on a identiquement $a \wedge b = ab$. Les autres opérations sont reliées de la manière suivante :

$$a + b = (a \wedge b') \vee (a' \wedge b) \tag{7}$$
$$a \wedge b = a + b + ab, \qquad a' = 1 + a. \tag{8}$$

Soit H une algèbre de Heyting. Un *opérateur modal* dans H est une application j de H dans H satisfaisant aux relations

$$j(1) = 1, \qquad j(j(a)) = j(a), \qquad j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b). \tag{9}$$

Si l'on a de plus $j(a)$ pour tout a dans H, l'ensemble H_j des a dans H tels que $j(a) = a$ est une algèbre de Heyting, où la borne inférieure de a et b est $a \wedge b$, et leur borne supérieure est $j(a \vee b)$, tandis que l'opération $\to$ est donnée par $j(a \to b)$. Dans toute algèbre de Heyting, l'application $a \mapsto a''$ est un opérateur modal, et l'ensemble des a tels que $a = a''$ est une algèbre de Boole.

Toute algèbre de Heyting H se plonge dans une algèbre de Boole au sens suivant : il existe une algèbre de Boole B et un opérateur modal j dans B tel que $J(a) \leq a$ et que H soit égal à l'algèbre de Heyting B_j. Si l'on suppose de plus que H engendre l'algèbre de Boole B (comme anneau par exemple), alors il y a unicité de (B, j) (voir [20]).

2.2. Représentation topologique des algèbres de Boole [2]

Soit B une algèbre de Boole, considérée comme anneau booléen. Soit S le *spectre* de B, c'est-à-dire l'ensemble des homomorphismes d'anneau de B dans le corps à deux éléments $\mathcal{F}_2$. Si u est un homomorphisme de B dans un corps K, on a $u(B) \subset \{0, 1\}$ puisque tout élément a de B satisfait à $a^2 = a$, donc K est de caractéristique 2 et u prend ses valeurs dans le sous-corps $\mathcal{F}_2$ de K. Or B est un anneau commutatif, et 0 est le seul élément nilpotent de B ; d'après des théorèmes connus d'algèbre, l'intersection des noyaux des éléments de S est réduite à 0. Pour tout a dans B, soit $[a]$ l'ensemble des u dans S tels que $u(a) = 1$. Il existe alors sur S une (unique) topologie d'espace compact totalement discontinu telle que l'application $a \mapsto [a]$ soit un isomorphisme de B sur l'agèbre de Boole formée des parties ouvertes et fermées de S (théorème de représentation de Stone).

Un treillis S est dit *complet* si toute partie de T possède une borne supérieure, donc aussi une borne inférieure. Un treillis distributif est automatiquement une algèbre de Heyting. On parlera donc d'algèbre de Heyting complète, et en particulier d'algèbre de Boole complète.

Soit X un espace topologique et soit $\mathcal{U}$, l'ensemble de ses parties ouvertes.

Pour la relation d'inclusion, $\mathcal{U}$ est une algèbre de Heyting complète, avec $a \wedge b = a \cap b, a \vee b = a \cup b$ et où a' est l'intérieur du complémentaire de a dans X. D'après la fin du n° 2.1, l'ensemble des ouverts a de X tels que $a = a''$ (c'est-à-dire égaux à l'intérieur de leur adhérence) est une algèbre de Boole complète. En particulier, si B est une algèbre de Boole, l'ensemble $\hat{B}$ des parties du spectre S de B qui sont égales à l'intérieur de leur adhérence est une algèbre de Boole complète, et B est isomorphe à une sous-algèbre de Boole de $\hat{B}$.

On dit qu'une algèbre de Boole B satisfait à la *condition de chaîne dénombrable* si toute partie I de B telle que $a \wedge b = 0$ pour a, b distincts dans I est dénombrable. C'est le cas si B est composé

2. Cf. [18], [48, chap. 2]

de parties ouvertes d'un espace compact X qui possède une mesure de Radon de support X.

2.3. Adjonction dans les ensembles ordonnés

La notion d'adjonction dans les ensembles ordonnés est un cas particulier d'une notion générale pour les catégories. L'importance de ce cas particulier a été mise en évidence par Lawvere [3, 4].

Soient T et T' deux ensembles ordonnés, $f : T \to T'$ et $g : T' \to T$ deux applications. On dit que f est *adjointe à gauche* de g, et g *adjointe à droite* de f, si la relation $f(t) \leq t'$ équivaut à $t \leq g(t')$ quels que soient t dans T et t' dans T'. Cette relation se note $f \dashv g$ ou $g \vdash f$. Une application f de T dans T' a au plus une adjointe à droite.

Sous les hypothèses précédentes, on a $t \leq gf(t)$ pour t dans T et $fg(t') \leq t'$ pour tout t' dans T' ; on en déduit $fgf = f$ et $gfg = g$, et l'application gf de T dans T est idempotente d'image $T_1 = g(T')$; de même, l'application fg de T' dans T' est idempotente, d'image $T'_1 = f(T)$. Comme les applications f et g sont croissantes, elles induisent des automorphismes réciproques d'ensembles ordonnés

$$T_1 \underset{g_1}{\overset{f_1}{\rightleftarrows}} T'_1.$$

Si deux éléments t_1 et t_2 de T ont une borne supérieure $t_1 \vee t_2$, alors $f(t_1)$ et $f(t_2)$ ont une borne supérieure dans T', et l'on a

$$f(t_1 \vee t_2) = f(t_1) \vee f(t_2) \qquad \text{pour } t_1,\ t_2 \text{ dans } T. \tag{10}$$

On établit de manière analogue la relation

$$g(t'_1 \wedge t'_2) = g(t'_1) \wedge g(t'_2) \qquad \text{pour } t'_1,\ t'_2 \text{ dans } T'. \tag{11}$$

Donnons des exemples d'adjonction :

a) Soit H une algèbre de Heyting, et posons $T = T' = H$; fixons a dans H. Si l'on pose

$$f(x) = a \wedge x, g(x') = a \to x', \qquad (12)$$

la définition de l'opération $\to$ se traduit par $f \dashv g$.

b) Soit toujours H une algèbre de Heyting et soit H^{op} l'ensemble ordonné obtenu en renversant la relation d'ordre dans H. Alors l'application $a \mapsto a'$ de H dans H^{op} est adjointe à gauche de l'application $a \mapsto a'$ de H^{op} dans H.

Les propriétés élémentaires des algèbres de Heyting découlent aussitôt des propriétés générales de l'adjonction appliquées aux exemples a) et b).

c) Pour tout ensemble X, on note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X ordonné par inclusion. C'est une algèbre de Boole complète [3]. Soit $f : X \to Y$ une application, et soit $f^* : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$

3. Un opérateur modal j dans $\mathcal{P}(X)$ tel que $j(A) \subset A$ n'est autre qu'une topologie $\mathcal{T}$ dans X, ou plutôt l'application qui associe à toute partie de X son intérieur pour $\mathcal{T}$. Dans ces conditions, $\mathcal{P}(X)_j$ est l'algèbre de Heyting formée des ouverts de X pour $\mathcal{T}$.

l'application qui à toute partie B de Y associe son image réciproque par f dans X. De même, l'opération d'image directe est une application $f_* : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$. On a alors $f_* \dashv f^*$.

d) Sous Les hypothèses de c), on définit comme suit une application f, de $\mathcal{P}(X)$ dans $\mathcal{P}(Y)$ telle que $f_! \vdash f^*$: pour toute partie A de X, on note $f_!(a)$ l'ensemble des éléments y de Y tels que A contienne toute la fibre de f au-dessus de y.

Dans les exemples c) et d), Lawvere écrit $\exists_f$ pour f_* et $\forall_f$, pour $f_!$, à cause du lien étroit qui existe entre ces opérations et les quantificateurs (cf. p. 135).

3. Logique intuitionniste

3.1. Logique des propositions

Rappelons les caractéristiques d'une théorie mathématique formalisée. Tout d'abord, on a un *prologue* composé de *déclarations* qui spécifient que certains symboles sont des *variables*, d'autres des *constantes* et attribuent un *type* à chacun d'eux (il est d'usage de postuler une infinité de variables pour chaque type ; la méthode proposée ici, qui évite certaines difficultés logiques, se rapproche des langages de programmation du type ALGOL). On fixe ensuite des *règles de production* qui permettent de définir les formules de la théorie, puis les axiomes et les *règles de déduction* qui permettent de démontrer des théorèmes. Nous adoptons ici la présentation de Gentzen [12] par les séquents.

La logique des propositions comporte un nombre indéterminé de variables, toutes d'un même type, dit *logique* et noté λ, et des constantes V, F, $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\implies$ dont voici les types

$$\begin{array}{ll} \mathrm{V},\ \mathrm{F} & \text{type } \lambda \\ \neg & \text{type } \lambda \to \lambda \\ \vee, \wedge, \implies & \text{type } \lambda \times \lambda \to \lambda. \end{array}$$

Les formules (logiques) sont toutes de type λ, et sont définies par les règles de production suivantes :

a) toute variable ou toute constante de type λ est une formule ;

b) si A est une formule, alors $\neg A$ est une formule ;

c) si A et B sont des formules, il en est de même de $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$ et $(A \implies B)$.

Voici la signification de ces règles. Les formules sont des suites de signes, qui sont les variables et constantes déclarées ci-dessus et les parenthèses (et). Une *construction* est une suite Σ de telles suites, chacune de ces suites X étant soit une variable ou une constante de type λ (règle a), soit obtenue en préfixant $\neg$ à une suite A qui la précède dans Σ (règle b), soit obtenue comme une juxtaposition du type $(A \vee B)$, etc... où A et B précèdent X dans Σ (règle c). Une formule est une suite qui apparaît comme la dernière d'une construction, qui est dite la vérifier. On notera que nous ne cherchons pas à définir ce qu'est une suite de symboles, ni une suite de telles suites !

Voici maintenant les axiomes :

Tautologies : $F \vdash A, \qquad A \vdash V, \qquad A \vdash A;$

Négation : $\neg A \vdash (A \implies F), \qquad (A \implies F) \vdash \neg A.$

Enfin, les règles de déduction sont les suivantes :

Syllogisme : $\dfrac{A \vdash B, B \vdash C}{A \vdash C}$

Conjonction : $\dfrac{A \vdash (B \wedge C)}{A \vdash B} \qquad \dfrac{A \vdash (B \wedge C)}{A \vdash C} \qquad \dfrac{A \vdash B, A \vdash C}{(A \vee B) \vdash C}$

Disjonction : $\dfrac{(A \vee B) \vdash C}{A \vdash C} \qquad \dfrac{(A \vee B) \vdash C}{B \vdash C} \qquad \dfrac{A \vdash C, B \vdash C}{(A \vee B) \vdash C}$

Implication : $\dfrac{(A \wedge B) \vdash C}{A \vdash (B \implies C)} \qquad \dfrac{A \vdash (B \implies C)}{(A \wedge B) \vdash C}.$

Un *séquent* est une suite de symboles de la forme $A \vdash B$, où A et B sont des formules. Une *démonstration* est une suite D de séquents, dont chaque X est un axiome ou résulte d'une règle de déduction : si l'on applique par exemple le syllogisme, X est de la forme $A \vdash C$ et il est précédé dans D de deux séquents de la forme $A \vdash B$ et $B \vdash C$. Un *théorème* est un séquent qui apparaît comme le dernier d'une démonstration, qui en constitue la preuve. Un théorème de la forme $V \vdash A$ s'écrit plus simplement sous la forme $\vdash A$ et l'on dit alors que la formule A est *valide*.

La logique des propositions que l'on vient de décrire est dite "intuitionniste". Pour obtenir la logique classique (ou booléenne), il faut ajouter l'axiome de double négation $\neg\neg A \vdash A$, qui entraîne le tiers-exclus $\vdash (A \vee \neg A)$.

La lectrice aura remarqué l'analogie des axiomes et règles de déduction ci-dessus avec les règles de calcul dans une algèbre de Heyting. De manière plus précise, supposons qu'on ait introduit des variables $x_1, \ldots, x_n$ de type λ ; disons que deux formules A et B sont équivalentes si l'on a prouvé les deux théorèmes $A \vdash B$ et $B \vdash A$. Les opérations définies dans l'ensemble des formules par $\vee, \wedge, \neg$ et $\implies$ sont compatibles avec cette relation d'équivalence, et définissent sur l'ensemble $H(x_1, \ldots, x_n)$ des classes d'équivalence de formules une structure d'algèbre de Heyting ; la classe de F (resp. V) est l'élément 0 (resp. 1) de cette algèbre de Heyting ; si a (resp. b) est la classe de la formule A (resp. B), la relation $a \leq b$ signifie que le séquent $A \vdash B$ est un théorème. En un sens évident, $H(x_1, \ldots, x_n)$ est l'algèbre de Heyting libre en les générateurs $x_1, \ldots, x_n$; d'après [20], elle a une infinité d'éléments.

La logique classique conduit de manière analogue à la construction de l'algèbre de Boole libre $B(x_1, \ldots, x_n)$ à n générateurs, dont les éléments peuvent s'interpréter comme les 2^{2^n} applications de $F_2 \times \ldots \times F_2$ (n facteurs) dans F_2.

3.2. Logique des prédicats

En plus des variables et constantes logiques introduites au n° 3.1, nous admettons maintenant des variables de type *individu* (noté i dans la suite). De plus, on introduit des constantes de deux espèces :

- constantes de fonctions, de type $i^n \to i$, où l'entier $n \geq 0$ dépend de la constante ; pour $n = 0$, on a simplement une constante de type i ;

- prédicats de type $i^n \to \lambda$ (même remarque sur n), parmi lesquels le prédicat d'égalité $=$ de type $i^2 \to \lambda$.

Les formules sont réparties en *termes* de type i et en *relations* de type λ. Les règles de production comprennent d'abord les règles a), b) et c) du n° 3.1 qui s'appliquent uniquement à des relations et fournissent des relations. De plus :

d) toute variable ou toute constante de type i est un terme ;

e) soient $T_1, \ldots, T_n$ des termes ; si f eut une constante de fonction de type $i^n \to i$ et p un prédicat de type $i^n \to \lambda$ alors $f(T_1, \ldots, T_n)$ est un terme et $p(T_1, \ldots, T_n)$ une relation (on écrit $T = T'$ au lieu de $=(T, T')$).

Nous laisserons à la lectrice le soin de définir la substitution de termes $T_1, \ldots, T_n$ à des variables $x_1, \ldots, x_n$ de type i dans un terme ou une relation F, le résultat étant noté $F(T_1|x_1, \ldots, T_n|x_n)$.

Les règles de raisonnement comprennent d'abord les règles du n° 3.1 appliquées à des relations ; on a de plus les axiomes d'égalité et la règle de substitution :

Égalité :

$$\vdash x = x$$
$$T = T' \vdash S(T|x) = S(T'|x), \qquad T = T' \vdash A(T|x) \implies A(T'|x)$$

Substitution :

$$\frac{A \vdash B}{A(T|x) \vdash B(T|x)}$$

où x est une variable de type i, où A, B sont des relations et S, T, T' des termes.

On peut formaliser de cette manière les théories algébriques usuelles (groupes, anneaux, algèbres de Lie,...). Par exemple, la théorie des groupes contient une constante e de type i, une constante de fonction s de type $i \to i$ et une constante de fonction m de type $i^2 \to i$ et trois *axiomes spécifiques*

$$\vdash m(m(x, y), z) = m(x, m(y, z))$$
$$\vdash (m(x, s(x)) = e) \wedge (m(s(x), x) = e)$$
$$\vdash (m(x, e) = x) \wedge (m(e, x) = x),$$

où x, y et z sont des variables (distinctes) de type i. Introduisons des variables $x_1, \ldots, x_n$, de type i, et disons que deux termes T et T' sont équivalents si $T = T'$ est une formule valide de la théorie des groupes. Comme dans le cas des algèbres de Heyting ou de Boole, on montre que l'ensemble des classes d'équivalence de termes est le groupe libre $G(x_1, \ldots, x_n)$ construit sur $x_1, \ldots, x_n$.

Introduisons maintenant les *quantificateurs* $\forall$ et $\exists$ et la notion de *variable libre* dans une relation. Ceci se fait au moyen des règles suivantes :

f) si $T_1, \ldots, T_n$ sont des termes et p un prédicat de type $i^n \to \lambda$, toute variable intervenant dans $p(T_1, \ldots, T_n)$ est libre et il n'y en a pas d'autre ;

g) si A et B sont des relations, une variable est libre dans $\neg A$ (resp. $A \vee B$, etc...) si elle est libre dans A (resp. dans A ou dans B) et il n'y en a pas d'autre ;

h) si x est une variable libre dans une relation p, alors $\forall x(p)$ et $\exists x(p)$ sont des relations où sont déclarées libres toutes les variables libres dans p à l'exception de x.

Nous laisserons à la lectrice le soin de généraliser ce qui précède au cas où l'on a plusieurs types d'individus, et définir les types libres d'une relation.

Les axiomes et règles de déduction sont ceux énoncés précédemment, aux réserves suivantes près :

1) dans le syllogisme et la conjonction, tout type qui est libre dans la ligne du haut doit apparaître comme l'un des types libres dans la ligne du bas ;

2) la tautologie $A \vdash V$ et l'axiome d'égalité $\vdash x = x$ sont remplacés par la règle suivante

$$A \vdash (x_1 = x_1) \wedge \ldots \wedge (x_k = x_k)$$

où $x_1, \ldots, x_n$ sont des variables d'individus dont les types contiennent exactement tous les types libres dans la relation A.

Il faut ajouter les règles de déduction pour les quantificateurs :

Universel :

$$\frac{A \vdash B}{A \vdash \forall x(B)} \qquad \frac{A \vdash \forall x(B)}{A \vdash B}$$

Existentiel :

$$\frac{B \vdash A}{\exists x(B) \vdash A} \qquad \frac{\exists x(B) \vdash A}{B \vdash A}$$

où A et B sont des relations, et où la variable d'individu x est libre dans B, mais non dans A.

La logique des prédicats (ou logique du premier ordre) peut s'étendre en une *logique des types* (ou logique d'ordre supérieur). Sans entrer dans les détails d'une description formelle, disons qu'on a une hiérarchie de types engendrée par la règle de production : si $t, t_1, \ldots, t_n$ sont des types, il en est de même de $t_1 \times \ldots \times t_n \to t$. On a alors vraiment le droit de considérer par exemple $\vee$ comme un individu de type $\lambda \times \lambda \to \lambda$. La nouveauté est le *principe d'abstraction* suivant qui conduit au calcul de λ-conversion de Church [10] :

i) si f est une formule de type s contenant une variable libre x de type t, alors $\lambda_x f$ est une formule de type $t \to s$, où x n'est plus une variable libre.

Autrement dit, on a le droit de considérer une fonction de la forme $x \mapsto f(x)$, définie par une formule, comme un individu du type approprié ; on peut en particulier introduire des prédicats variables, des prédicats de prédicats, etc. On renvoie la lectrice au traité de Curry [11] pour le développement de ces idées sous le nom de logique combinatoire.

3.3. Modèles d'une théorie

Tout groupe explicitement construit est un modèle de la théorie des groupes. Dans un tel groupe, on dispose en effet d'un ensemble G, d'un élément $\overline{e}$ de G et de deux applications $\overline{m} : G \times G \to G$ et $\overline{s} : G \to G$. Soit T un terme de la théorie des groupes construit à partir de e, m et s et de variables $x_1, ..., x_n$. En "interprétant" e comme $\overline{e}$, ... , et $x_1, \ldots, x_n$ comme des éléments variables de G, on associe à T une application $\overline{T}$ de G^n dans G. Si T et T' sont deux termes construits à partir de ces mêmes variables $x_1, \ldots, x_n$, la relation R égale à $T = T'$ est interprétée comme l'ensemble $\overline{R}$ des éléments $(g_1, \ldots, g_n)$ de G^n tels que l'on ait $\overline{T}(g_1, \ldots, g_n) = \overline{T'}(g_1, \ldots, g_n)$. À partir de là, on peut interpréter des relations plus compliquées, à $A \wedge B$ correspondant par exemple $\overline{A} \cap \overline{B}$. Dire que G est un groupe signifie que, pour toute relation A à n variables qui est un axiome de la théorie des groupes, on a $\overline{A} = G^n$. On a alors $\overline{A} = G^n$ pour toute formule valide A de la théorie, comprenant n variables.

On définit de manière analogue la notion de modèle pour toute théorie qui s'exprime dans la logique des prédicats : il est décrit par la donnée d'un ensemble de base X_i pour chaque type d'individu i, d'une application $\overline{f} : X_{i_1} \times \ldots \times X_{i_n} \to X_i$ pour toute constante de fonction de type $i_1 \times \ldots \times i_n \to i$ et d'une partie $\overline{p}$ de $X_{i_1} \times \ldots \times X_{i_n}$ pour tout prédicat de type $i_1 \times \ldots \times i_n \to \lambda$. Comme précédemment, l'interprétation d'un terme donne une fonction et celui d'une relation donne une partie d'un ensemble $X_{i_1} \times \ldots \times X_{i_n}$. Précisons l'interprétation des quantificateurs : si par exemple la relation A contient deux variables libres x et y de types respectifs i et j, alors $\exists x(A)$ s'interprète en $f_*(\overline{A})$ et $\forall x(A)$ en $f_!(\overline{A})$ où $\overline{A}$ est la partie de $X_i \times X_j$ qui interprète A et f est la projection de $X_i \times X_j$ sur le deuxième facteur. On postule que l'interprétation de chaque axiome spécifique de la théorie est la partie pleine du produit correspondant d'ensemble X_i, et il en est alors de même pour toute formule valide.

Scott et Solovay ont généralisé la notion de modèle en celle de *modèle booléen*. En plus des ensembles X_i, on se donne une algèbre de Boole complète $\mathcal{B}$; l'interprétation des prédicats est modifiée, au prédicat p de type $i_1 \times \ldots \times i_n \to \lambda$ correspondant une application $\overline{p}$ de $X_{i_1} \times \ldots \times X_{i_n}$ dans $\mathcal{B}$. Cela revient en fait à traiter le type logique λ sur le même plan que les types d'individus, et à considérer les opérateurs logiques $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\implies$ comme des constantes de fonctions du type approprié, qui seront interprétées comme les opérations de Boole dans $\mathcal{B} = X_\lambda$. Avec les notations ci-dessous, la relation $\exists x(A)$ s'interprète comme l'application $y \mapsto \sup[\overline{A}(x, y)|x \in X_i]$ et de même $\forall x(A)$ s'interprète comme l'application $y \mapsto \inf[\overline{A}(x, y)|x \in X_i]$ de Xj dans $\mathcal{B}$. On dit qu'une relation A est *validée* dans le modèle M (notation $\vdash_M A$) si A est la fonction constante de valeur 1. On postule que tout axiome explicite de la théorie est validé dans le modèle M et il en sera de même de toute formule valide.

Nous avons admis implicitement que l'on utilisait la logique classique. On peut procéder de manière analogue en logique intuitionniste en remplaçant l'algèbre de Boole complète $\mathcal{B}$ par une algèbre de Heyting complète $\mathcal{H}$. Classiquement, on n'admet que les modèles où chacun des ensembles X_i est non vide ; en logique intuitionniste, un ensemble peut être partiellement vide, et cette restriction n'est plus tenable, et c'est pourquoi nous avons dû amender les règles de déduction du paragraphe 3.2.

4. Catégories et faisceaux

4.1. Topos élémentaires

Un topos élémentaire $\mathcal{T}$ est une catégorie où est défini le produit cartésien $X \times Y$ de deux objets X et Y, munie d'un objet final noté 1, et dans laquelle on a associé à tout objet X un objet $\mathcal{P}(X)$ et un monomorphisme $\varepsilon_X : \sum_X \to X \times \mathcal{P}(X)$ satisfaisant à la propriété universelle suivante :

(Top) *Étant donnés deux objets X et Y et un monomorphisme $i : S \to X \times Y$, il existe un morphisme $u : Y \to \mathcal{P}(X)$ et un seul pour lequel il existe un carré cartésien :*

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & X \times Y \arrow[d, "I_X \times u"] \\
\sum_X \arrow[r, "\varepsilon_X"] & X \times \mathcal{P}(X)
\end{tikzcd}$$

Réciproquement, u étant donné, il existe un monomorphisme i et un carré cartésien comme ci-dessus.

Intuitivement, on doit considérer $\mathcal{P}(X)$ comme l'ensemble des parties de X et $\sum_X$ comme le graphe de la relation d'appartenance restreinte à $X \times \mathcal{P}(X)$.

La structure d'un topos est extrêmement riche ; elle permet en particulier l'interprétation des relations de la logique intuitionniste des prédicats. Tout d'abord, on appelle *élément global* (ou section) d'un objet X de $\mathcal{T}$ tout morphisme de 1 dans X, et *sous-objet* de X tout morphisme de 1 dans $\mathcal{P}(X)$. Soit $i : S \to X$ un monomorphisme ; faisant $Y = 1$ dans l'axiome (Top), on obtient un morphisme de 1 dans $\mathcal{P}(X)$; c'est-à-dire un sous-objet de X qu'on appelle l'image de i. En particulier, l'image de l'identité $I_X : X \to X$ est un sous-objet de X, qu'on note X. Posons $\Omega = \mathcal{P}(1)$. Échangeant les rôles de X et Y dans l'axiome (Top), on associe à tout sous-objet z de X un morphisme $\varphi_z : X \to \Omega$, qu'on appelle le morphisme caractéristique de z. Réciproquement, tout morphisme φ de X dans Ω est le morphisme caractéristique d'un sous-objet de X, qu'on appelle l'*extension de* φ et qu'on note $[x \in X|\varphi(x)]$.

Pour tout objet X de $\mathcal{T}$, le morphisme diagonal $\Delta_X : X \to X \times X$ est un monomorphisme, et le morphisme caractéristique de son image sera noté $=_X$. De même, on note $\in_X$ le morphisme caractéristique de l'image de $\varepsilon_X : \sum_X \to X \times \mathcal{P}(X)$. Si f et g sont deux morphismes de X dans un même objet Y, le morphisme composé $X \xrightarrow{(f,g)} Y \times Y \xrightarrow{=_Y} \Omega$ est le morphisme caractéristique d'un sous-objet de X qu'on appelle l'*égalisateur* de la paire (f, g). L'existence d'égalisateurs dans $\mathcal{T}$ montre que l'on peut y définir les produits fibrés.

On définit ensuite les opérateurs logiques dans l'objet Ω, qui joue le rôle d'objet des valeurs logiques. La définition de $\vee$, $\wedge$ et $\implies$ est particulièrement simple. Tout d'abord, le morphisme $V_X : x \to \Omega$ est le morphisme caractéristique du sous-objet $\lceil x \rceil$ de X et $V = V_1$. Le morphisme $\wedge$ de $\Omega \times \Omega$ dans Ω est le morphisme caractéristique de l'égalisateur des morphismes $I_\Omega \times V_\Omega$ et $V_\Omega \times I_\Omega$ de $\Omega \times \Omega$

dans $\Omega \times \Omega$. Enfin, le morphisme $\implies$ de $\Omega \times \Omega$ dans Ω est le morphisme caractéristique de l'égalisateur des morphismes p_1 et $\wedge$ de $\Omega \times \Omega$ dans Ω, où p_1 est la première projection du produit $\Omega \times \Omega$.

L'étape suivante est la définition d'opérations entre les objets du type $\mathcal{P}(X)$. Soit $f : X \to Y$ un morphisme. L'axiome (Top) établit une correspondance bijective entre morphismes de Y dans $\mathcal{P}(X)$ et morphismes de $X \times Y$ dans Ω ; par les arguments fonctoriels usuels, on en déduit que $\mathcal{P}$ est un foncteur contravariant, autrement dit on associe à f un morphisme $\mathrm{f}^* = \mathcal{P}(f)$ de $\mathcal{P}(Y)$ dans $\mathcal{P}(X)$. On construit ensuite des morphismes f_*, et $f_!$ de $\mathcal{P}(X)$ dans $\mathcal{P}(X)$ qui ont les mêmes propriétés formelles que dans le cas ensembliste (cf. § 2.3). L'image de f est un sous-objet de Y ; on peut le définir comme le composé $f_* \lceil X \rceil : 1 \to \mathcal{P}(Y)$. On notera aussi $\{.\}$ le morphisme de X dans $\mathcal{P}(X)$ qui correspond par l'axiome (Top) au morphisme diagonal $\Delta_X : X \to X \times X$.

Pour interpréter une formule de la logique des prédicats, on doit associer à chaque type i en jeu un objet X_i de T, avec en particulier $X_\lambda = \Omega$; à chaque constante de fonction de type $i_1 \times \ldots \times i_n \to i$ est associé un morphisme de $X_{i_1} \times \ldots \times X_{i_n}$ dans X_i et à chaque prédicat p de type $i_1 \times \ldots \times i_n \to \lambda$ un morphisme de $X_{i_1} \times \ldots \times X_{i_n}$ dans Ω. Les opérateurs logiques $\vee, \wedge, \ldots$ seront interprétés comme les opérateurs de même nom dans Ω. Une constante de type i sera interprétée comme un élément global de X_i. On supposera que, pour tout type i en jeu, on a deux prédicats $=_i$ et $\in_i$ qui seront interprétés au moyen de $=_{X_i}$ et $\in_{X_i}$ respectivement. Puisque nous disposons des opérations f_* et $f_!$, on pourra interpréter les quantificateurs comme dans le cas ensembliste (cf. § 3.3). En conclusion, l'interprétation d'une relation A dans laquelle les variables libres sont $x_1, \ldots, x_n$ de types respectifs $i_1, \ldots, i_n$ sera dans la catégorie $\mathcal{T}$, un morphisme $\overline{A}$ de $X_{i_1} \times \ldots \times X_{i_n}$ dans Ω ; par exemple, si x et y sont deux variables de type λ, l'interprétation de la relation $x = x \wedge y$ est le morphisme $\implies$ de $\Omega \times \Omega$ dans Ω. Le cas des termes est analogue. Enfin, toute relation étant interprétée comme un morphisme à valeur dans Ω, c'est le morphisme caractéristique d'un sous-objet que l'on appelle l'*extension de la relation* en question.

On peut maintenant appliquer au topos $\mathcal{T}$ tous les théorèmes de la logique des prédicats. Par exemple, si A et B sont deux relations, et que l'on a prouvé $A \vdash B$ et $B \vdash A$, alors les extensions de A et B seront égales dans $\mathcal{T}$. On pourra ainsi prouver que Ω se comporte comme un objet en "algèbres de Heyting", de même que $\mathcal{P}(X)$ pour tout objet X de $\mathcal{T}$; l'ensemble des sous-objets de X est une vraie algèbre de Heyting.

Les méthodes précédentes peuvent être utilisées, non seulement pour prouver des égalités de morphismes dans la catégorie $\mathcal{T}$, mais aussi pour en construire. Par exemple, soit A une relation comportant deux variables libres x, y de types respectifs i, j ; si la formule

$$(\forall x \exists y(A)) \wedge \forall x \forall y \forall y'((A \wedge A(y'|y)) \implies y = y')$$

est valide, il existera dans $\mathcal{T}$ un morphisme $f : X_i \to X_j$ tel que $\overline{A}$ soit le morphisme caractéristique de l'image du monomorphisme (I_{X_i}, f) de X_i dans $X_i \times X_j$ (le "graphe de f"). En interprétant de manière convenable la formule précédente où l'on prendrait pour A un prédicat variable du type convenable, on peut définir le sous-objet Y^X de $\mathcal{P}(X \times Y)$ formé des "applications" de X dans Y. En particulier, on peut identifier $\mathcal{P}(X)$ à Ω^X.

En conclusion, les topos pemettent une très vaste extension de la notion de modèle. L'objet Ω étant un objet comme un autre dans $\mathcal{T}$, on peut traiter sur pied d'égalité les termes et les relations, et en particulier les modèles booléens sont des modèles comme les autres dans le cadre des topos. Les relations permises dans un topos comportent la relation d'appartenance, mais limitée par une restriction de types, puisque l'on a une telle relation $\in_X$ entre X et $\mathcal{P}(X)$ pour chaque objet X de $\mathcal{T}$.

4.2. Faisceaux

Jusqu'à présent, nous n'avons pas donné d'exemple de topos. Le premier exemple est fourni par "la" catégorie des ensembles $\mathcal{S}$ (cf. la conclusion, § 5). Soient maintenant $\mathcal{C}$ une petite catégorie et $\mathcal{T}$ la catégorie $\mathcal{S}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ des foncteurs contravariants de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{S}$. Par exemple, on pourra considérer la catégorie $\mathcal{C}$ associée de la manière usuelle à un ensemble ordonné I, les objets étant les éléments de I, et les morphismes les paires (i, j) d'éléments de I avec $i \leq j$. Plus particulièrement encore, on pourra prendre pour I l'ensemble ordonné par inclusion des parties ouvertes d'un espace topologique X ; alors $\mathcal{T}$ sera la catégorie des préfaisceaux sur X.

Pour passer de là aux faisceaux, nous aurons besoin d'une construction due à Lawvere et Tierney [34]. Soit $\mathcal{T}$ un topos quelconque. Un *opérateur modal* dans $\mathcal{T}$ est un morphisme $j : \Omega \to \Omega$ satisfaisant aux relations

$$jV = V, \qquad jj = j, \qquad j(x \wedge y) = jx \wedge jy \tag{13}$$

où $V : 1 \to \Omega$ est le "vrai" et où x, y désignent les deux projections de $\Omega \times \Omega$ dans Ω conformément aux principes généraux d'interprétation des relations. On notera l'analogie avec la formule (9) du § 2.1. D'ailleurs, j induit un opérateur modal au sens du § 2.1 dans l'algèbre de Heyting des sous-objets d'un objet X quelconque de $\mathcal{T}$.

Fixons j. On note J l'égalisateur de la paire (j, V_Ω) et Ω_j l'égalisateur de la paire (j, I_Ω). On dira qu'un monomorphisme $u : X \to Y$ est fermé (resp. dense) s'il existe un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ \Omega_j \arrow[r] & \Omega \end{tikzcd} \quad \text{(resp.} \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ J \arrow[r] & \Omega \end{tikzcd} \quad \text{).}$$

Associant aux monomorphismes leur image, on voit que l'on peut définir les notions de sous-objet fermé et de sous-objet dense d'un objet X.

On note $\mathcal{T}_j$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{T}$ formée des objets F satisfaisant à la condition suivante :

(Faisc) *Si $u : X \to Y$ est un monomorphisme dense, et $v : X \to F$ un morphisme quelconque, il existe un unique morphisme $x : Y \to F$ tel que $v = xu$.*

Alors $\mathcal{T}_j$ est un topos, le produit cartésien dans $\mathcal{T}_j$ étant celui de $\mathcal{T}$ restreint aux objets de $\mathcal{T}_j$. Le foncteur d'inclusion de $\mathcal{T}_j$ dans $\mathcal{T}$ a un adjoint à gauche $a : \mathcal{T} \to \mathcal{T}_j$ qu'on peut construire comme suit. Comme on a $jj = j$ et que Ω_j est l'égalisateur de (j, I_Ω), on peut factoriser j en $\Omega \xrightarrow{j'} \Omega_j \to \Omega$; on considère alors le morphisme composé $u : X \xrightarrow{\{.\}} \Omega^X \xrightarrow{j'^X} \Omega_j^X$; l'objet $a(x)$ est alors l'adhérence de l'image I de u, à savoir l'unique sous-objet fermé de Ω_j^X dans lequel I soit dense. On montre ensuite que le foncteur a satisfait à un calcul de fractions, et qu'il est donc exact.

Revenons au cas où $\mathcal{T}$ est de la forme $\mathcal{S}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$. L'objet Ω de $\mathcal{T}$ est le foncteur de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ dans $\mathcal{S}$ qui à chaque objet U de $\mathcal{C}$ associe l'ensemble des cribles dans U, c'est-à-dire [26] l'ensemble des sous-foncteurs du foncteur représentable $h_U : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}$. On montre alors sans difficulté que la donnée d'un opérateur modal $j : \Omega \to \Omega$ dans $\mathcal{T}$ revient à celle d'une topologie J sur la catégorie $\mathcal{C}$ au sens de Grothendieck et Giraud [24, 26]. Le topos $\mathcal{T}_j$ est alors le topos des faisceaux sur le site $(\mathcal{C}, J)$ et le foncteur a est celui qui associe à tout préfaisceau le faisceau correspondant au sens de Grothendieck. Autrement dit, *un topos au sens de Grothendieck est un topos au sens de Lawvere et Tierney, mais la réciproque est fausse.*

Plus particulièrement, soit $\mathcal{C}$ la catégorie associée à l'ensemble ordonné des ouverts d'un espace topologique X. Le préfaisceau Ω associe à toute partie ouverte U de X l'ensemble des classes héréditaires F de parties ouvertes de U (F est dite héréditaire si les relations $V \subset V'$ et $V' \in F$ entraînent $V \in F$). Définissons le morphisme $j : \Omega \to \Omega$ comme la famille des applications $j_U : \Omega(U) \to \Omega(U)$ ainsi définies : si F est une classe héréditaire de parties ouvertes de U, alors $j_U(F)$ est l'ensemble des parties ouvertes de U qui sont contenues dans la réunion d'une famille d'ouverts appartenant à F. Avec cette définition, $\mathcal{T}_j$ est la catégorie des faisceaux sur X au sens usuel [28].

5. Conclusion

Nous venons de décrire les parties les plus fondamentales de la théorie des topos. Il convient de la préciser en ajoutant de nouveaux axiomes qui assurent par exemple le caractère booléen de la logique interne. On peut alors obtenir des topos qui se rapprochent de plus en plus de “la” théorie des ensembles classique. De fait, on peut montrer que celle-ci est aussi “forte” qu'une théorie des topos convenablement restreinte [51, 52].

La construction des faisceaux, sous la forme générale décrite au n° 4.2 permet de construire une large classe de topos, et une construction analogue à celle des ultraproduits permet de rendre ces topos booléens. Chacun de ces topos fournit un modèle de la théorie des ensembles élémentaire à la Lawvere [1, 2], et c'est cette liberté accrue qui permet de démontrer facilement l'indépendance de l'hypothèse du continu (ou de l'axiome du choix).

Esquissons une construction qui est une variante de celle de Cohen [44] ou de Tierney [53]. En termes catégoriques, l'hypothèse du continu généralisée est l'inexistence de deux monomorphismes non inversibles $X \to Y \to \mathcal{P}(X)$. Considérons alors un espace topologique S et un ultrafiltre Φ sur S auquel appartiennent les parties ouvertes et denses de S. Nous disons qu'un faisceau $\mathcal{F}$ sur S est *parfait* s'il satisfait à la propriété suivante :

(P) *Étant donnés deux ouverts U et V de S avec $U \subset V \subset \overline{U}$, toute section de $\mathcal{F}$ sur U se prolonge de manière unique en une section de $\mathcal{F}$ sur V.*

Étant donnés deux faisceaux $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ et deux morphismes u et v de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G}$, disons que u et v sont *équivalents* s'il existe un ouvert U appartenant à Φ tel que u et v coïncident au-dessus de U.

La catégorie des faisceaux parfaits sur S et des classes d'équivalence de morphismes est alors un modèle $\mathcal{M}$ de la théorie élémentaire des ensembles. Pour contredire l'hypothèse du continu dans $\mathcal{M}$, on choisit pour S un espace compact totalement discontinu de la forme $\{0,1\}^I$ où I a la puissance du continu. Alors l'algèbre de Boole formée des parties ouvertes et fermées de S a la puissance du continu, mais satisfait à la condition de chaîne dénombrable car il existe une mesure de support S, par exemple le produit des mesures $\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$ sur les facteurs $[0,1]$. Soit alors X_0 un faisceau constant sur S de fibre F dénombrable et Y_0 le faisceau constant de fibre $\mathcal{P}(F)$. On a des monomorphismes $X_0 \to Y_0 \to \mathcal{P}(X_0)$ évidents. Ils sont non inversibles, le premier de manière évidente, et le second parce que le faisceau constant X a beaucoup de sous-faisceaux non constants [4]. Les faisceaux X_0 et Y_0 ne sont pas parfaits, mais il est facile de prouver que la catégorie des faisceaux parfaits est une sous-catégorie réflexive de celle de tous les faisceaux. On prend alors pour X (resp. Y) le faisceau parfait "enveloppe" de X_0, (resp. Y_0). On obtient deux monomorphismes non inversibles $X \to Y \to \mathcal{P}(X)$ qui contredisent dans le modèle l'hypothèse du continu.

Pour contredire l'axiome du choix, il faut considérer des faisceaux où opère un groupe.

Bibliographie commentée

Pour une bibliographie exhaustive sur le sujet, on pourra consulter le livre de Johnstone [31]. Nous mentionnons d'abord les principaux articles de Lawvere, de lecture difficile, mais passionnante :

[1] F. W. Lawvere, An elementary theory of the category of sets, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 52 (1964), p. 1506-1511.

[2] ____________, An elementary theory of the category of sets, notes polycopiées 43 pages, Université de Chicago, 1964.

[3] ____________, Adjointness in foundations, Dialectica, 23 (1969), p. 281-296.

[4] ____________, Equality in hyperdoctrines and comprehension schema as an adjoint functor : Symposia Pure Maths., vol. XVII, Amer. Math. Soc., 1970, p. 1-14.

[5] ____________, Quantifiers and sheaves, Actes du Congrès Intern. des Math., Nice, 1970, vol. I, p. 329-334.

[6] ____________, Continuously variable sets : algebraic geometry = geometric logic, in Bristol Logic Colloquium '73 ; North Holland, 1975, p. 135-156.

[7] ____________, Variable quantities and variable structures in topoi, in Algebra, Topology and Category Theory (éd. A. Heller et M. Tierney), Academic Press, 1976, p. 101-131.

De plus, Lawvere est l'éditeur des comptes-rendus de deux colloques, pour lesquels il a écrit deux introductions fort intéressantes :

4. On peut ême prouver que le *faisceau* des épimorphismes de Y_0 dans X_0 (resp. $\mathcal{P}(X_0)$ dans Y_0) est vide.

[8] Toposes, algebraic geometry and logic, Lecture Notes in Maths., vol.274, Springer, 1972.

[9] Model theory and topoi, Lecture Notes in Maths., vol. 445, Springer, 1975.

Voici maintenant quelques ouvrages de référence sur la logique mathématique :

[10] A. Church, The calculi of lambda conversion, Annals of Math. Studies, 6, Princeton University Press, 1941.

[11] H. Curry, R. Feys et W. Craig, Combinatory Logic, vol. I, North Holland, 1958.

[12] G. Gentzen, Collected Papers (M. Szabo édit.), North Holland, 1969.

[13] J. van Heijenoort, Frege and Gödel (Two fundamental texts in mathematical logic), Harvard University Press, 1970.

[14] D. Hilbert et W. Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik, 5° édit., Springer, 1967.

[15] S. Kleene, Introduction to Metamathematics, van Nostrand, 1952.

[16] Y. Manin, A course in Mathematical Logic, Springer, 1977.

Pour les algèbres de Boole, treillis, etc., voici quelques ouvrages de base :

[17] Birkhoff, Lattice theory, Colloquium Publ., vol. XXV, 3° édit., Amer. Math. Soc., 1967.

[18] P. Halmos, Lectures on Boolean algebras, van Nostrand, 1963.

[19] A. Heyting, Intuitionism. An introduction, North Holland, 1956.

[20] J. McKinsey et A. Tarski, On closed elements in closure algebras, Ann. of Maths, 47 (1946), p. 122-162.

[21] R. Sikorski, Boolean algebras, Springer, 1964.

[22] H. Rasiowa et R. Sikorski, The mathematics of metamathematics, Monografie Mat., vol, 41, Varsovie, 1963.

Pour la théorie des faisceaux au sens de Grothendieck, et des catégories qui leur sont associées, consulter :

[23] M. Artin, Grothendieck topologies, notes polycopiées, Harvard, 1962.

[24] M. Artin, A. Grothendieck et J.L. Verdier, Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4), Lecture Notes in Maths, vol. 269, Springer, 1972.

[25] J. Giraud, Classifying topos, dans [8], p. 43-56.

[26] Analysis Situs [d'après Artin et Grothendieck], Sém. Bourbaki 1962/3, exposé 256, 11 pages, Benjamin, 1966.

[27] M. Hakim, Topos annelés et schémas relatifs, Springer, 1972.

[28] R. Godement, Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Hermann, 1958.

La théorie élémentaire des topos fait l'objet des ouvrages et articles suivants :

[29] J. Bénabou et J. Celeyrette, Généralités sur les topos de Lawvere et Tierney, Sém. Bénabou ; Université Paris-Nord, 1971.

[30] P. Freyd, Aspects of topoi, Bull. Austr. Math. Soc., 7 (1972), p. 1-76 et 467-480.

[31] P. Johnstone, Topos theory, London Math. Soc. vol. 10, Academic Press, 1977.

[32] A. Kock et C. Mikkelsen, Topos theoretic factorization of non-standard analysis, Lecture Notes in Maths., vol. 369, Springer, 1974, p. 122-143.

[33] A. Kock et G. Wraith, Elementary toposes, Aarhus Lecture Notes, vol. 30, 1971.

[34] M. Tierney, Axiomatic sheaf theory : some constructions and applications, in Categories and Commutative Algebra, C.I.M.E. III Ciclo 1971, Edizioni Cremonese, 1973, p. 249-326.

[35] Forcing topologies and classifying topoi, in Algebra, Topology and Category Theory (éd. A. Heller et M. Tierney, Academic Press, 1976, p. 211-219.

Le "langage interne des topos" est mis au point dans les travaux suivants :

[36] J. Bénabou, Catégories et Logiques faibles, Journées sur les Catégories, Oberwolfach, 1973.

[37] M. Coste, Logique d'ordre supérieur dans les topos élémentaires, Sém. Bénabou, Université Paris-Nord, 1973/4.

[38] J. Lambek, Deductive systems and categories, I : Math. Systems Theory, 2 (1968). p. 287-318 ; II : Lecture Notes in Maths., vol. 86, Springer, 1969, p. 76-122 ; III : in [8], p. 57-82.

[39] W. Mitchell, Boolean topoi and the theory of sets, Journ. Pure and Applied Alg., 2 (1972), p. 261-274.

[40] G. Osius, Logical and set theoretical tools in elementary topoi, in [9], p. 297-346.

[41] ———, A note on Kripke-Joyal semantics for the internal language of topos, in [9], p. 349-354.

[42] H. Volger, Logical categories, semantical categories and topoi, in [9], p. 87-100.

Voici un échantillon d'ouvrages où sont traités les problèmes axiomatiques de la théorie des ensembles :

[43] P. Bernays et A. Fraenkel, Axiomatic set theory, North Holland, 1968.

[44] P. Cohen, Set theory and the continuum hypothesis, Benjamin, 1966.

[45] K. Gödel, The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory, 4e édit., Princeton University Press, 1958.

[46] R. Jensen, Modelle der Mengenlehre, Lecture Notes in Maths., vol. 37, Springer, 1967.

[47] A. Mostowski, An undecidable arithmetical statement, Fund. Math., 36 (1949), p. 143-164.

[48] J. Rosser, Simplified independence proofs (Boolean valued models of set theory), Academic Press, 1969.

[49] P. Samuel, Modèles booléens et hypothèse du continu, Sém. Bourbaki 1966/7, exposé 317, 12 pages, Benjamin, 1968.

[50] D. Scott, A proof of the independence of the continuum hypothesis, Math. Systems Theory, 1 (1967), p. 89-111.

Voici enfin les références fondamentales pour l'application de la théorie des topos aux problèmes axiomatiques de la théorie des ensembles :

[51] J. Cole, Categories of sets and models of set theory, Proc. Bertrand Russell, Memorial Logic Conference, Uldum 1971, Leeds 1973, p. 351-399.

[52] G. Osius, Categorical set theory : a characterization of the category of sets, Journ. Pure and Applied Alg., 4 (1974), p. 79-119.

[53] M. Tierney, Sheaf theory and the continuum hypothesis, in [8], p. 13-42.