Le calcul de la Logique
George Boole

Dans un travail publié dernièrement [1], j'ai montré l'application d'une nouvelle forme particulière de raisonnement mathématique. Dans le présent essai, j'ai comme objectif de fournir un compte-rendu d'une portion du traité en question et ainsi de fournir une vue correcte de la nature du système développé. Je m'efforcerai d'établir clairement ce en quoi consistent ses caractéristiques distinctives, et fournirai une illustration plus particulière de quelques éléments qui sont moins présentés dans le travail original. La partie du système à laquelle je cantonnerai mes observations est celle qui traite des propositions catégoriques, et les points que je souhaite illustrer selon cette contrainte sont les suivants :

(1) Je parlerai de logique en tant qu'elle traite des relations entre classes, ainsi que des modes selon lesquels l'esprit voit ces relations.

(2) Précédemment à notre reconnaissance de l'existence de propositions, il y a des lois auxquelles la conception d'une classe est sujette, lois qui sont dépendantes de la constitution de l'intellect, et qui déterminent le caractère et la forme du processus de raisonnement.

(3) Ces lois peuvent être exprimées mathématiquement, et elles constituent la base d'un calcul interprétable.

(4) Ces lois sont de plus telles que toutes les équations qui sont formées contraintes par ces lois, même si elles sont exprimées par des signes fonctionnels, admettent une parfaite solution, de telle façon que tout problème de logique peut être résolu en se référant à un théorème général.

(5) Les formes sous lesquelles les propositions sont habituellement exhibées, en accord avec les principes de ce calcul, sont analogues à celles du langage philosophique.

(6) Bien que les symboles du calcul ne dépendent pas pour leur interprétation de l'idée de quantité, ils nous conduisent cependant, dans leur application particulière au syllogisme aux conditions quantitatives de l'inférence.

C'est en particulier de ces deux derniers points que je souhaite offrir ici une illustration, ceux-ci ayant été partiellement fournis comme exemples dans le travail que j'ai cité.

Les autres points, cependant, seront incidemment sujets de la discussion. Il sera nécessaire de fournir au préalable la notation suivante.

L'univers des objets concevables est représenté par 1 ou par l'unité. C'est la conception primaire. Toutes les conceptions de classes secondaires doivent être comprises comme étant formées à partir de la conception primaire par limitations, selon le schéma suivant.

Supposons que nous concevions un groupe quelconque d'objets constitué de X, Y, et autres, et que x, que nous appellerons symbole électif, représente l'opération de choisir dans ce groupe tous les X qu'il contient, ou de fixer notre attention sur les X à l'exclusion de tous ceux qui ne sont pas des X, y l'opération mentale consistant à sélectionner les Y, etc. ; alors, 1 ou l'univers étant la conception sujet, nous aurons

Journal mathématique de Cambridge et Dublin, Vol. III (1848), p. 183-98.

1. L'analyse mathématique de la logique, essai vers un calcul du raisonnement déductif. Cambridge, Macmillan ; London, G. Bell.

$$\begin{array}{ll} x1 \text{ ou } x & = \text{la classe des } X, \\ y1 \text{ ou } y & = \text{la classe des } Y, \\ xy1 \text{ ou } xy & = \text{la classe dont chaque membre est à la fois } X \text{ et } Y, \end{array}$$

et etc..

De la même manière, nous aurons

$$\begin{array}{rl} 1-x & = \text{la classe des non-}X, \\ 1-y & = \text{la classe des non-}Y, \\ x(1-y) & = \text{la classe dont les membres sont des } X \text{ mais des non-}Y, \\ (1-x)(1-y) & = \text{la classe dont les membres ne sont ni des } X \text{ ni des } Y, \\ \text{etc.} & \end{array}$$

En outre, de considérations sur la nature des opérations mentales impliquées, il apparaîtra que les lois suivantes sont satisfaites.

En représentant par x, y, z des symboles électifs quels qu'ils soient,

$$x(y+z) = xy + xz, \tag{1}$$
$$xy = yx, \quad \text{etc.}, \tag{2}$$
$$x^n = x, \quad \text{etc.} \tag{3}$$

Des premières lignes, on voit que les symboles électifs sont distributifs dans leur opération ; de la seconde, on voit qu'ils sont *commutatifs*. J'ai appelé la troisième la loi indexante ; elle est spécifique aux symboles électifs.

La vérité de ces lois ne dépend pas du tout de la nature, ou du nombre, ou des relations mutuelles, des individus inclus dans les différentes classes. Il peut y avoir un seul individu dans une classe, ou bien des milliers. Il peut y avoir des individus communs à plusieurs classes, ou les classes peuvent s'exclure mutuellement. Tous les symboles sont distributifs, commutatifs et tous les symboles électifs satisfont la loi exprimée par (3).

Ces lois sont en fait incarnées par tout langage parlé ou écrit. L'équivalence entre les expressions "un homme sage et bon" et "un homme bon et sage", n'est pas un simple truisme, mais une conséquence de la loi de commutativité exhibée en (2). Et il y a des illustrations similaires des autres lois.

Relié à ces lois, il y a un axiome général. Nous avons vu que les opérations algébriques effectuées avec ces symboles électifs représentent les processus mentaux. Ainsi la connexion de deux symboles par le signe + représente l'agrégation de deux classes en une classe simple, la connexion de deux symboles xy comme dans la multiplication, représente l'opération mentale de sélectionner dans la classe Y ces membres qui appartiennent aussi à une autre classe X, et etc. Par de telles opérations, la conception d'une classe est modifiée. Mais à côté de cela, l'esprit a le pouvoir de percevoir les relations d'égalité entre classes. L'axiome en question, alors, est que *si une relation d'égalité est perçue entre deux classes, cette relation reste non affectée quand les deux sujets sont modifiés de la même façon par les opérations précédemment décrites.* (A). Cette axiome, et non le "postulat d'Aristote", est le fondement réel de tout raisonnement, la forme et le caractère du processus étant, cependant, déterminé par les trois lois déjà établies.

Il est non seulement vrai que tout symbole électif représentant une classe satisfait la loi indexante (3), mais il peut être démontré rigoureusement que toute combinaison de symboles électifs $\phi(xyz\ldots)$, qui satisfait la loi $\phi(xyz\ldots)^n = \phi(xyz\ldots)$, représente une conception intelligible, - un groupe ou une classe définis par un nombre plus ou moins grand de propriétés constitué d'un nombre plus ou moins grand de parties.

Les quatre propositions catégoriques sur lesquelles la doctrice du syllogisme ordinaire est fondée sont

Tous les Y sont des X.	A,
Aucun Y n'est un X.	E,
Quelques Y sont des X,	I,
Quelques Y sont des non-X.	O.

Nous considèrerons ces propositions en référence aux classes sur lesquelles la relation est exprimée.

A. L'expression Tous les Y représente la classe Y et sera ainsi exprimée par y, les copula par le signe $=$, le terme indéfini, X, est équivalent à Quelques X. C'est une convention de langage que le mot Quelques est exprimé dans le sujet, mais non dans le prédicat d'une proposition. Le terme Quelques X sera exprimé par vx, dans lequel v est un symbole électif appropriée pour une classe V, dont quelques membres sont des X, mais qui est arbitraire à d'autres égards. Ainsi la proposition A sera exprimée par l'équation.

$$y = vx. \tag{4}$$

E. Dans la proposition, Aucun Y n'est un X, les particules négatives semblent être attachées au sujet plutôt qu'au prédicat auquel elles appartiennent manifestement [2]. Nous n'avons pas l'intention de dire que ces choses qui sont des non-Y sont des X mais que ces choses qui sont des Y sont des non-X. Maintenant la classe non-X est exprimée par $1 - x$; par conséquent, la proposition Aucun Y n'est un X, ou plutôt Tous les Y sont des non-X, sera exprimée par

$$y = v(1 - x). \tag{5}$$

I. Dans la proposition Quelques Y sont des X, ou Quelques Y sont quelques X, nous pouvons remarquer que le Quelques dans le sujet et le Quelques dans le prédicat font référence à la même classe arbitraire V, et ainsi écrire

$$vy = vx,$$

mais c'est moins une assomption qu'une contrainte de le faire. Ainsi, nous devrions écrire

$$vy = v'x, \tag{6}$$

v' faisant référence à une autre classe arbitraire V'.

O. Similairement, la proposition Quelques Y sont des non-X, sera exprimée par l'équation

$$vy = v'(1 - x) \tag{7}$$

On voit des considérations ci-dessus que les formes que prennent les quatre propositions catégoriques A, E, I, O dans la notation des symboles électifs sont analogues à celles du

2. Il y a deux façons de comprendre Aucun X n'est un Y. Premièrement, dans le sens où tous les X sont des non-Y. Deuxièmement, dans le sens où Il n'est pas vrai que certains X sont des Y, i.e. la proposition "Quelques X sont des Y" est fausse. La première de ces deux possibilités est une proposition catégorique simple. La seconde est *une assertion sur une proposition*, et cette expression appartient à une partie différente du système électif. Il me semble que c'est le deuxième sens, qui est vraiment adopté par ceux qui réfèrent à la négation, non, au couple. Faire référence au prédicat n'est pas un raffinement inutile, mais une étape nécessaire, pour que la proposition soit effectivement *une relation entre classes...* . Je crois qu'on trouvera que cette étape doit vraiment être effectuée dans les tentatives de démontrer les règles de distributivé d'Aristote. La transposition de la négation est un procédé commun du langage. L'habitude nous rend presque insensible à lui dans notre propre langage, mais dans une langue étrangère, le même principe se voit différemment, comme dans l'exemple grec, *οὐ ψημὶ* pour *ψημὶ οὐ*, cela nécessite d'être attentif.

langage naturel, *i.e.* avec les formes que les discours humains présentent, selon des règles entièrement construites sur une base scientifique. Dans une grande majorité de propositions qui peuvent être conçues par l'esprit, les lois d'expression n'ont pas été modifiées par l'usage, et l'analogie devient plus apparente, *e.g.* l'interprétation de l'équation

$$z = x(1-y) + y(1-x)$$

est, la classe Z constituée de tous les X qui sont des non-Y et de tous les Y qui sont des non-X.

Théorèmes généraux liés aux fonctions électives.

Nous sommes maintenant arrivés à cette étape, où nous sommes en possession d'une classe de symboles $x, y, z,$ *etc.* respectant certaines lois, et applicable à l'expression rigoureuse de toute proposition catégorique quelconque. Ce sera notre prochaine tâche d'exhiber quelques-uns des théorèmes généraux du calcul qui repose sur la base de ces lois, et nous appliquerons ensuite ces théorèmes dans le traitement de certains exemples.

Je ne montrerai que deux ensembles de théorèmes généraux : ceux reliés au développement de fonctions, et ceux reliés aux solutions d'équations.

Théorèmes de développement.

(1) Si x est un symbole électif, alors

$$\phi(x) = \phi(1)x + \phi(0)(1-x) \tag{8}$$

les coefficients $\phi(1), \phi(0)$, qui sont des fonctions algébriques quantitatives ou communes, sont appelés des modules, et x et $1-x$ sont les constituants.

(2) Pour une fonction de deux symboles électifs, nous avons

$$\phi(xy) = \phi(11)xy + \phi(10)x(1-y) + \phi(01)(1-x)y + \phi(00)(1-x)(1-y), \tag{9}$$

équation dans laquelle $\phi(11), \phi(10)$, etc. sont des variables quantitatives, et sont appelées les modules, et $xy, x(1-y)$, etc. les constituants.

(3) Fonctions de trois symboles :

$$\begin{aligned}\phi(xyz) \quad = \quad & \phi(111)xyz + \phi(110)xy(1-z) \\ & +\phi(101)x(1-y)z + \phi(100)x(1-y)(1-z) \\ & +\phi(011)(1-x)yz + \phi(010)(1-x)y(1-z) \\ & +\phi(001)(1-x)(1-y)z + \phi(000)(1-x)(1-y)(1-z)\end{aligned} \tag{10}$$

équation dans laquelle $\phi(111), \phi(110)$, etc. sont des modules, et $xyz, xy(1-z)$, etc. des constituants.

A partir de ces exemples, la loi générale de développement est évidente. Et je souhaite qu'on remarque que cette loi est une simple conséquence des lois primaires qui ont été exprimées en (1), (2), (3)

Théorème. *Si nous avons une équation quelconque $\phi(xyz\ldots) = 0$, et que nous développons le premier membre, alors tout constituant dont le module ne s'évanouit pas peut être rendu nul.*

Cela nous permet d'interpréter toute équation par une règle générale.

RÈGLE. *Amener tous les termes du même côté, le développer en fonction de tous les symboles électifs qui y apparaissent, et rendre nul tout constituant dont le module ne s'évanouit pas.*

Pour la démonstration de ces résultats et de nombreux autres, je dois faire référence au travail original. On doit noter qu'à la page 66, z a été, par erreur, substitué à w, et que la référence de la page 80 devrait être une référence à la propriété Prop. 2.

Comme exemple, prenons l'équation

$$x + 2y - 3xy = 0 \tag{a}$$

Ici $\phi(xy) = x + 2y - 3xy$, d'où on tire les valeurs des modules qui sont

$$\phi(11) = 0, \qquad \phi(10) = 1, \qquad \phi(01) = 2, \qquad \phi(00) = 0,$$

de telle façon que l'expansion de (9) donne

$$x(1 - y) + 2y(1 - x) = 0$$

qui est en fait une autre forme de (a). Nous avons alors, par la règle

$$x(1 - y) = 0, \tag{11}$$
$$y(1 - x) = 0; \tag{12}$$

la première implique qu'il y a des non-X qui sont des non-Y, la seconde qu'il y a des non-Y qui sont des non-X, ces deux assertions ensemble exprimant la signification complète de l'équation originale.

Nous pouvons, cependant, souvent, recombiner les constituants avec un gain de simplicité.

Dans le cas présent, en soustrayant (12) de (11), nous avons $x - y = 0$, ou $x = y$, c'est-à-dire, la classe X est identique à la classe Y. Cette proposition est équivalente aux deux premières.

Toutes les équations sont ainsi de sens égal, ce qui donne, par expansion, les mêmes séries d'équations constituantes ; et *toutes sont interprétables.*

Solution générale des équations électives.

(1) La solution générale de l'équation $\phi(xy) = 0$, dans laquelle deux symboles électifs sont impliqués, y étant celui dont la valeur est recherchée est,

$$y = \frac{\phi(10)}{\phi(10) - \phi(11)}x + \frac{\phi(00)}{\phi(00) - \phi(01)}(1 - x). \tag{13}$$

Les coefficients

$$\frac{\phi(10)}{\phi(10) - \phi(11)}, \qquad \frac{\phi(00)}{\phi(00) - \phi(01)}$$

sont ici les modules.

(2) La solution générale de l'équation $\phi(xyz) = 0$, z étant le symbole dont on doit déterminer la valeur, est

$$\begin{aligned} z &= \frac{\phi(110)}{\phi(110) - \phi(111)}xy + \frac{\phi(100)}{\phi(100) - \phi(101)}x(1-y) \\ &\quad + \frac{\phi(010)}{\phi(010) - \phi(011)}(1-x)y + \frac{\phi(000)}{\phi(000) - \phi(001)}(1-x)(1-y) \end{aligned} \tag{14}$$

dont nous appellerons à nouveau les coefficients les modules. Les lois de leur formation seront vus, de telle façon que les théorèmes généraux qui auront été donnés pour la solution des équations électives à deux ou trois symboles, peuvent être regardés comme des exemples d'un théorème plus général applicable à toutes les équations électives quelles qu'elles soient. En appliquant ces résultats, on doit observer que si un module prend la forme $\frac{0}{0}$, il doit être remplacé par un symbole électif arbitraire w, et que si un module prend n'importe quelle valeur numérique sauf 0 ou 1, les constituants dont il est un facteur doivent être séparément mis à 0. Bien que ces conditions se déduisent seulement des lois auxquelles les symboles appartiennent, et sans référence à l'interprétation, ils ne rendront jamais la solution de toute équation interprétable en logique. Pour de telles formules aussi, *toute question sur les relations entre les classes doit être mise en référence.* Une ou deux illustrations simples devraient suffire.

(1) Étant donnée

$$yx = yz + x(1-z). \tag{b}$$

Les Y qui sont des X consistent en les Y qui sont des Z et les X qui sont des non-Z.
On recherche la classe Z.
Ici $\phi(xyz) = yx - yz - x(1-z)$,

$$\begin{gathered} \phi(111) = 0 \qquad \phi(110) = 0 \qquad \phi(101) = 0, \\ \phi(100) = -1 \qquad \phi(011) = -1 \qquad \phi(010) = 0, \\ \phi(001) = 0 \qquad \phi(000) = 0; \end{gathered}$$

et en substituant dans (14), on obtient

$$\begin{aligned} z &= \frac{0}{0}xy + x(1-y) + \frac{0}{0}(1-x)(1-y) \\ &= x(1-y) + wxy + w'(1-x)(1-y). \end{aligned} \tag{15}$$

Par conséquent la classe Z inclut tous les X qui sont des non-Y, un nombre indéfini de X qui sont des Y, et un nombre indéfini d'individus qui ne sont ni des X ni des Y. Les classes w et w' étant plutôt arbitraires, le reste indéfini l'est également ; il peut s'évanouir ou pas [3].

3. Cette conclusion peut être illustrée et vérifiée en considérant un exemple comme le suivant.
Soit
x l'ensemble des bateaux à vapeur, ou navires à vapeur,
y l'ensemble des navires armés,
z l'ensemble des vaisseaux de la Méditerranée,
L'équation (b) exprimerait alors que *les navires armés sont constitués par les navires armés de la Méditerranée et par les navires à vapeur non en Méditerranée.* De là il découle
(1) Qu'il n'y a pas de vaisseaux armés si ce n'est des bateaux à vapeur en Méditerranée.
(2) Que tous les bateaux non armés sont des bateaux de Méditerranée (puisque les navires à vapeur qui ne sont pas en Méditerranée sont armés). Ainsi nous inférons que *les navires en Méditerranée sont constitués de tous les vaisseaux non armés : n'importe quel nombre de navires non armés et n'importe quel nombre de vaisseaux non armés non à vapeur.* Ceci, exprimé symboliquement, est l'équation (15).

Puisque $1-z$ représente une classe, non-Z, et satisfait la loi indexante

$$(1-z)^n = 1-z$$

comme cela est évident en essayant, nous pouvons, si nous le souhaitons, déterminer les valeurs de cet élément de la même façon que nous pouvons le faire pour z.

Prenons, en illustration de ce principe, l'équation $y = vx$, (Tous les Y sont des X), et recherchons la valeur de $1-x$, la classe des non-X.

Posons $1-x = z$ alors $y = v(1-z)$, et si nous écrivons cela par la forme $y - v(1-z) = 0$ et représentons le premier membre par $\phi(vyz)$, v prenant ici la place de x, dans (14),
nous aurons

$$\begin{array}{llll} \phi(111) = 1, & \phi(110) = 0, & \phi(101) = 0, & \phi(100) = -1, \\ \phi(011) = 1, & \phi(010) = 1, & \phi(001) = 0, & \phi(000) = 0; \end{array}$$

la solution prendra alors la forme

$$z = \frac{0}{0-1}vy + \frac{-1}{-1-0}v(1-y) + \frac{1}{1-1}(1-v)y + \frac{0}{0-0}(1-v)(1-y)$$

ou

$$1-x = v(1-y) + \frac{1}{0}(1-v)y + \frac{0}{0}(1-v)(1-y). \tag{16}$$

Le coefficient infini du second terme dans le second membre nous permet d'écrire

$$y(1-v) = 0 \tag{17}$$

le coefficient $\frac{0}{0}$ étant remplacé par w, un symbole électif quelconque, on a

$$1-x = v(1-y) + w(1-v)(1-y), \tag{18}$$

ou

$$1-x = \{v + w(1-v)\}(1-y).$$

On peut remarquer par ce résultat que le coefficient $v + w(1-v)$ dans le second membre satisfait la condition

$$\{v + w(1-v)\}^n = v + w(1-v),$$

comme c'est évident en l'élevant au carré. Cela représente alors une classe. Nous pouvons le remplacer par un symbole électif u, on a alors

$$1-x = u(1-y), \tag{19}$$

dont l'interprétation est

Tous les non-X sont des non-Y.

C'est une transformation connue en logique, on l'appelle conversion par contraposition, ou conversion négative. Mais c'est loin d'épuiser la solution que nous avons obtenue. Les logiciens ont négligé le fait que quand on convertit la proposition Tous les Y sont des (quelques) X en Tous les non-X sont des (quelques) non-Y, il y a une relation entre les deux (*quelques*), comprise dans les prédicats. L'équation (18) montre que quelle que soit la condition qui limite le X dans la proposition originale, les non-Y dans la proposition transformée consiste en tous ceux qui sont sujets de la même condition et un reste arbitraire de ceux qui ne sont pas sujets de la condition. L'équation (17) plus loin montre qu'il y a des non Y qui sont des non-sujets de cette condition.

Nous pouvons de la même manière réduire l'équation $y = v(1-x)$, Aucun Y n'est un X, à la forme $x = v'(1-y)$ Aucun X n'est un Y, avec une relation similaire entre v et v'. Si nous résolvons l'équation $y = vx$ Tous les Y sont des X, avec référence à v, nous obtenons la relation secondaire $y(1-x) = 0$ Aucun Y est un non-X, et similairement de l'équation $y = v(1-x)$ (Aucun Y n'est un X), nous obtenons $xy = 0$. Ces équations, qui peuvent également être obtenues d'autres façons, je les ai utilisées dans le traité original. Toutes les équations dont les interprétations sont reliées sont elles-mêmes reliées, par solution ou par développement.

Sur le Syllogisme.

Les formes des propositions catégoriques déja déduites sont

$y = vx$,	Tous les Y sont des X,
$y = v(1-x)$,	Aucun Y n'est un X,
$vy = v'x$,	Quelques Y sont des X,
$vy = v'(1-x)$,	Quelques Y sont des non-X,

dont les deux premières équations donnent par solution, $1-x = v'(1-y)$. Tous les non-X sont des non-Y, $x = v'(1-y)$, Aucun X n'est un Y. Au schéma ci-dessus, qui est celui d'Aristote, nous pourrions ajouter les quatre propositions catégoriques

$1-y = vx$,	Tous les non-Y sont des X,
$1-y = v(1-x)$	Tous les non-Y sont des non-X,
$v(1-y) = v'x$,	Quelques non-Y sont des X,
$v(1-y) = v'(1-x)$	Quelques non-Y sont des non-X,

dont les deux premières peuvent être transformables en

$1-x = v'y$,	Tous les non-X sont des Y,
$x = v'y$,	Tous les X sont des Y,
or	Aucun non-X n'est un Y,

Si maintenant les deux prémisses de tout syllogisme peuvent être exprimées par des équations des formes ci-dessus, l'élimination du symbole en commun y nous amènera à une équation exprimant la conclusion.

Ex. 1. Tous les Y sont des X, $\quad y = vx$,
Tous les Z sont des Y, $\quad z = v'y$,
l'élimination d'y donne

$$z = vv'x,$$

dont l'interprétation est
Tous les Z sont des X,
la forme du coefficient vv' indique que le prédicat de la conclusion est limité par les deux conditions qui limitent séparément les prédicats des prémisses.

Ex. 2. Tous les Y sont des X, $\quad y = vx$,
Tous les Y sont des Z, $\quad y = v'z$
L'élimination d'y donne

$$v'z = vx,$$

qui est interprétable en Quelques Z sont des X. Il est toujours nécessaire qu'un terme de la conclusion soit interprétable au moyen des équations des prémisses. Dans le cas ci-dessus, c'est le cas pour les deux.

Ex.3.	Tous les X sont des Y,	$x = vy$
	Aucun Z n'est un Y,	$z = v'(1-y)$.

Plutôt que d'éliminer directement y, transformons plutôt l'équation par la solution comme en (19). La première donne

$$1 - y = u(1-x),$$

u étant équivalent à $v + w(1-v)$, dans lequel w est arbitraire. Éliminer $1-y$ entre cela et la seconde équation du système, nous obtenons

$$z = v'u(1-x),$$

dont l'interprétation est

Aucun Z n'est un X

Aurions-nous éliminé y direcgtement que nous aurions obtenu

$$vz = v'(v-x),$$

dont la solution réduite est

$$z = v'\{v + (1-v)\}(1-x),$$

dans laquelle w est un symbole électif arbitraire. Cela est parfaitement en accord avec le premier résultat.

Ces exemples peuvent suffire à illustrer l'emploi de la méthode dans des cas particuliers. Mais son applicabilité à la démonstration de théorèmes généraux est ici, comme dans d'autres cas, un défi plus important. Je joins ci-dessous les résultats d'une recherche récente sur les lois du syllogisme. Alors que ces résultats se caractérisent par leur grande simplicité et ne gardent, par exemple, que peu de trace de leur origine mathématique, il aurait été, je le conçois, très difficile de les obtenir par l'examen et la comparaison de cas particuliers.

Les lois du syllogisme déduites du calcul électif.

Nous allons prendre en compte toutes les propositions qui peuvent être faites en dehors des classes X, Y, Z, et qui peuvent être retrouvées dans n'importe laquelle des formes fournies dans le système suivant,

A, Tous les X sont des Z.	A', Tous les non-X sont des Z.
E, Aucun X n'est un Z.	E', { Aucun non-X n'est un non-Z. (Tous les non-X sont des non-Z).
I, Quelques X sont des Z	I', Quelques non-X sont des Z
O, Quelques X sont des non-Z.	0', Quelques non-X sont des non-Z.

Il est nécessaire de rappeler que la quantité (universelle et particulière) et la qualité (affirmative et négative) doivent être comprises comme appartenant aux *termes* des propositions, ce qui est en effet l'appréciation correcte [4].

Ainsi, dans la proposition Tous les X sont des Y, le sujet Tous les X est universel-affirmatif, le prédicat (quelques) Y particulier-affirmatif.

4. Quand des *propositions* sont affectées de quantité et qualité, la qualité est vraiment celle du *prédicat*, qui exprime la *nature* de l'assertion, et la quantité celle du *sujet*, qui montre son étendue.

Dans la proposition, Quelques X sont des Z, les deux (sujet et prédicat) sont particulier-affirmatif.

La proposition Aucun X n'est un Z serait en langage philosophique écrite sous la forme Tous les X sont des non-Z. Le sujet est universel-affirmatif, le prédicat particulier-négatif.

Dans la proposition Quelques X sont des non-Z, le sujet est particulier-affirmatif, le prédicat particulier-négatif. Dans la proposition Tous les non-X sont des Y le sujet est universel-négatif, le prédicat particulier-affirmatif, et etc.

Dans un couple de prémisses, il y a quatre termes, *viz.* deux sujets et deux prédicats ; deux de ces termes, *viz.* ceux impliquant les Y ou les non-Y peuvent être appelés les termes médians, les deux autres les extrêmes, les uns impliquant X ou non-X, les autres Z ou non-Z.

Les conditions et les règles d'inférence sont alors les suivants.

1er cas. Les termes médians sont de qualité égale.
Condition d'inférence. Un terme médian universel.
Règle. Égaler les extrêmes.

2nd cas. Les termes médians sont de qualités opposées.
1er. Condition d'inférence. Un extrême universel
Règle. Changer la quantité et la qualité de chaque extrême, et égaler le résultat à l'autre extrême.
2nd. Condition d'inférence. Deux termes médians universels.
Règle. Changer la quantité et la qualité de l'une des extrêmes, et la rendre égale à l'autre extrême.

J'ajoute quelques exemples,

1er Tous les Y sont des X.
Tous les Z sont des Y.
On est dans le cas 1. Tous les Y est le terme médian universel. Egaliser les extrêmes donne Tous les Z sont des X, le terme le plus fort devenant le sujet.

2nd

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Tous les } X \text{ sont des } Y\\ \text{Aucun } Z \text{ n'est un } Y.\end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l}\text{Tous les } X \text{ sont des } Y.\\ \text{Aucun } Z \text{ n'est un non-}Y.\end{array}\right.$$

On est dans le cas 2, et la première condition est satisfaite. Le terme médian est particulier-affirmatif dans la première prémisse, particulier-négatif dans la seconde. En prenant Tous les-Z comme l'extrême universelle, on a, en changeant sa quantité et sa qualité, Quelques non-Z, et l'égaler à l'autre extrême donne

Tous les X sont des (quelques) non-Z = Aucun X n'est un Z.

Si nous prenons Tous les X comme l'extrême universelle, on obtient

Aucun Z n'est un X.

3ème Tous les X sont des Y.
Quelques Z sont des non-Y.
On est aussi dans le cas 2, et la première condition est satisfaite. L'extrême universelle Tous les X devient, quelques non-X, par conséquent

Quelques Z sont des non-X,

4ème Tous les Y sont des X,
Tous les non-Y sont des Z.
On est dans le cas 2, et la seconde condition est satisfaite. L'extrême Quelques X devient Tous les non-X,
Tous les non-X sont des Z.
L'autre extrême traitée de la même manière donnera
Tous les non-Z sont des X,
qui est un résultat équivalent.

Si nous nous cantonnons aux prémisses Aristotéliciennes A, E, I, O, la seconde condition d'inférence dans le cas 2 n'est pas nécessitée. La conclusion ne sera pas nécessairement confinée au système Aristotélicien.

$$\text{Ex.}\quad \left\{\begin{array}{l}\text{Quelques } Y \text{ sont des non-}X\\ \text{Aucun } Z \text{ n'est un } Y\end{array}\right. \quad = \quad \left\{\begin{array}{l}\text{Quelques } Y \text{ sont des non-}X.\\ \text{Tous les } Z \text{ sont des non-}Y.\end{array}\right.$$

On est dans le cas 2, et la première condition est satisfaite. Le résultat est
Quelques non-Z sont des non-X.

Voici ce qui me semble être les dernières lois de l'inférence syllogistique. Elles s'appliquent à tous les cas, et elles abolissent complètement la distinction de cas, la nécessité de conversion, les lois partielles [5] et arbitraires de distributivité, etc. Si toute la logique était réduisible au syllogisme, celles-ci pourraient être regardées comme les règles de la logique. Mais la logique, considérée comme la science des relations entre classes s'est avérée être d'une bien plus grande étendue. L'inférence syllogistique, dans le système électif, correspond à l'élimination. Mais ce n'est pas le plus élevé de ses procédés. Toutes les questions d'élimination peuvent être considérées comme subsidiaires du problème plus général de trouver les solutions d'équations électives. Pour ce problème, toutes les questions de logique et de raisonnement, sans exception, peuvent être citées. Pour les illustrations les plus complètes de ce principe, je dois cependant vous renvoyer vers mon travail original. La théorie des propositions hypothétiques, l'analyse des éléments positifs et négatifs, dans lesquelles toutes les propositions sont des buts résolvables, et d'autres sujets similaires sont aussi discutés dans le document en question.

Sans aucun doute, le but ultime de la spéculation logique est d'adresser les conditions qui rendent un tel raisonnement possible, et les lois qui déterminent ses caractère et expression. L'axiome général (A) et les lois (1), (2), (3), semblent fournir la solution la plus précise qui peut à présent être donnée à cette question. Quand nous passons à la considération des propositions hypothétiques, les mêmes lois et le même axiome général qui devrait peut-être également être regardé comme une loi, continuent de prévaloir, la seule différence étant que les sujets de pensée ne sont plus des classes d'objets, mais des cas de vérité ou fausseté coexistantes de différentes propositions. Ces relations que les logiciens désignent par les termes de conditions, disjonctions, etc., sont appelées par Kant conditions distinctes de la pensée. Mais c'est un fait très remarquable, que les expressions de telles relations puissent se déduire les unes des autres par un processus analytique simple. De l'équation $y = vx$, qui exprime une proposition *conditionnelle*, "Si la proposition Y est vraie, la proposition X est vraie,", on peut déduire

$$yx + (1 - y)x + (1 - y)(1 - x) = 1$$

qui exprime la proposition *disjonctive*, "Soit Y et X sont vraies ensemble, soit X est vraie et Y est fausse, soient elles sont toutes les deux fausses," et à nouveau l'équation $y(1-x) = 0$, qui

5. Partielles, parce qu'elles font seulement référence à la quantité des X, même lorsque la proposition est liée aux non-X. Il serait possible de construire la contre-partie exacte des règles Aristotéliciennes du syllogisme, en ne quantifiant que les non-X. Le système dans le texte est *symétrique* parce qu'il est complet.

exprime une relation de coexistence, *viz.* que la vérité de Y et la fausseté de X ne coexistent pas. La distinction dans le regard mental qui mérite le plus d'être vue comme fondamentale, est, je le concède, celle qui distingue l'affirmation de la négation. De là, nous déduisons l'opération directe et l'opération inverse, le vrai et le faux des propositions, et l'opposition des qualités dans leurs termes.

La vision que ces recherches présentent de la nature du langage est très intéressante. Elles nous le montrent non comme une simple collection de signes, mais comme un système d'expression, dont les éléments sont sujets des lois de la pensée qu'ils représentent. Que ces lois soient aussi mathématiquement rigoureuses que les lois qui gouvernent les conceptions purement quantitatives de l'espace et du temps, de nombre et grandeur, est une conclusion que je n'hésite pas à soumettre à l'examen minutieux le plus exact.