

On ne peut pas entendre la forme d'un tambour

Pierre Bérard

Institut Fourier – Laboratoire de Mathématiques

Unité Mixte de Recherche 5582 CNRS – UJF

Université Joseph Fourier, Grenoble

1 Introduction

1.1 Position du problème

Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné, de bord ∂M assez régulier (par exemple C^∞ par morceaux). De nombreux problèmes de la physique mathématique conduisent à l'étude de l'un des deux *problèmes de valeurs propres* suivants.

Problème de Dirichlet

Déterminer les couples non-triviaux (u, λ) , où u est une fonction et où λ est un nombre, tels que

$$(1) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{dans } M, \\ u = 0 & \text{sur } \partial M. \end{cases}$$

Problème de Neumann

Déterminer les couples non-triviaux (u, λ) , où u est une fonction et où λ est un nombre, tels que

$$(2) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{dans } M, \\ \partial_n u = 0 & \text{sur } \partial M, \end{cases}$$

où $\partial_n u$ désigne la dérivée normale de u (selon la normale unitaire intérieure à M).

Rappelons que l'opérateur Δ (Laplacien) est défini par

$$(3) \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2},$$

où (x_1, \dots, x_n) sont les coordonnées usuelles dans \mathbb{R}^n .

Comme on le fait pour la résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants, on cherche en fait à *diagonaliser* l'opérateur Δ pour faciliter la résolution d'équations telles que l'équation de la chaleur ou l'équation des ondes. Cela signifie que l'on cherche une famille $\{(u_j, \lambda_j), j \geq 1\}$ telle que

$$(4) \quad \begin{cases} \text{Pour tout } j \geq 1, & (u_j, \lambda_j) \text{ vérifie (1), resp. (2),} \\ \text{La famille } \{u_j, j \geq 1\} & \text{est (orthogonale) totale dans } L^2(M). \end{cases}$$

L'ensemble des nombres $\{\lambda_j, j \geq 1\}$ s'appelle le *spectre* du Laplacien – respectivement pour le problème de Dirichlet (1) ou pour le problème de Neumann (2) – et on dit que la fonction u_j est une *fonction propre* associée à la *valeur propre* λ_j . On notera le signe – devant Δ dans les problèmes (1) et (2). Il s'agit d'une normalisation permettant d'avoir des valeurs propres positives.

1.2 Généralisations

Plus généralement (modélisation d'une membrane non homogène par exemple), on peut considérer les problèmes (1) et (2) où l'opérateur Δ est remplacé par un opérateur elliptique plus général L , de la forme

$$(5) \quad L = \sum_{i,j=1}^n a_0(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + a_1(x)$$

où les fonctions a_{ij}, a_0, a_1 vérifient des hypothèses appropriées. On peut aussi considérer des conditions aux limites autres que les conditions de Dirichlet et de Neumann.

On peut également considérer des problèmes de valeurs propres sur des surfaces fermées (c'est à dire compactes sans bord) telles qu'une sphère, un tore *etc*. Dans ce cas, l'opérateur Δ est l'opérateur Δ^g qui est naturellement attaché à une *métrique riemannienne* g sur la surface (pour une surface plongée comme la sphère, il s'agit de la structure induite par le produit scalaire de \mathbb{R}^3). En coordonnées locales, l'opérateur Δ^g est de la forme (5) (avec $a_1 \equiv 0$).

Étant donnée une surface fermée (M, g) , de Laplacien Δ^g , on s'intéresse au problème de valeurs propres suivant.

Déterminer les couples non-triviaux (u, λ) , où u est une fonction et où λ est un nombre, tels que

$$(6) \quad -\Delta^g u = \lambda u \text{ dans } M.$$

On notera qu'il n'y a pas, dans ce problème, de condition au bord comme dans le cas des problèmes de Dirichlet ou de Neumann. On parlera de *problème fermé*.

On peut également considérer les problèmes de Dirichlet et de Neumann sur des surfaces à bord (par exemple plongées dans \mathbb{R}^3 , comme celles de la Figure 3), sur des domaines (à bord) de surfaces fermées et plus généralement encore sur des variétés riemanniennes compactes (éventuellement à bord).

1.3 Exemples en dimension 1

Problème fermé

Soit S_L^1 le cercle de longueur L . La résolution du problème (6) dans le cas du cercle (ou, ce qui revient au même, le problème avec conditions périodiques) est donnée par les *séries de Fourier*.

La famille de fonctions $\{e_k(x) := \exp(i\frac{2k\pi}{L}x), k \in \mathbb{Z}\}$ est (orthogonale) totale dans $L^2(S_L^1)$ et elle diagonalise l'opérateur $-\frac{d^2}{dx^2}$,

$$-\frac{d^2}{dx^2} e_k = \frac{4k^2\pi^2}{L^2} e_k.$$

Le spectre de l'opérateur $-\frac{d^2}{dx^2}$ pour le problème fermé sur S_L^1 est l'ensemble

$$\sigma(-\frac{d^2}{dx^2}, S_L^1) = \{\frac{4k^2\pi^2}{L^2} \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

On notera que chaque valeur propre – sauf 0 – est double. L'espace propre correspondant à la valeur propre $\frac{4k^2\pi^2}{L^2}, k \neq 0$ est engendré par les fonctions e_k et e_{-k} .

Problème de Dirichlet

La résolution du problème (1) dans le cas du segment $]0, L[$ est donnée par les *séries de Fourier en sinus*.

La famille de fonctions $\{e_k(x) := \sin(\frac{k\pi}{L}x), k \in \mathbb{N}^\bullet\}$ est (orthogonale) totale dans $L^2(0, L)$ et elle diagonalise l'opérateur $-\frac{d^2}{dx^2}$ avec condition de Dirichlet,

$$-\frac{d^2}{dx^2} e_k = \frac{k^2\pi^2}{L^2} e_k, \quad e_k(0) = e_k(L) = 0.$$

Le spectre de l'opérateur $-\frac{d^2}{dx^2}$ pour le problème de Dirichlet sur $]0, L[$ est l'ensemble

$$\sigma(-\frac{d^2}{dx^2},]0, L[, \text{Dir}) = \{\frac{k^2\pi^2}{L^2} \mid k \in \mathbb{N}^\bullet\}.$$

On notera que chaque valeur propre est simple.

Problème de Neumann

La résolution du problème (2) dans le cas du segment $]0, L[$ est donnée par les *séries de Fourier en cosinus*.

La famille de fonctions $\{e_k(x) := \cos(\frac{k\pi}{L}x), k \in \mathbb{N}\}$ est (orthogonale) totale dans $L^2(0, L)$ et elle diagonalise l'opérateur $-\frac{d^2}{dx^2}$ avec condition de Neumann,

$$-\frac{d^2}{dx^2} e_k = \frac{k^2\pi^2}{L^2} e_k, \quad e'_k(0) = e'_k(L) = 0.$$

Le spectre de l'opérateur $-\frac{d^2}{dx^2}$ pour le problème de Neumann sur $]0, L[$ est l'ensemble

$$\sigma(-\frac{d^2}{dx^2},]0, L[, \text{Neu}) = \{\frac{k^2\pi^2}{L^2} \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

Généralisations

Plus généralement, on peut étudier le problème de valeurs propres pour des opérateurs de Sturm – Liouville. Le problème suivant en est un exemple simple.

$$(7) \quad \begin{cases} -y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x) & \text{dans }]0, L[, \\ y(0) = y(L) = 0, \end{cases}$$

où q est une fonction donnée.

Les opérateurs de Sturm – Liouville apparaissent naturellement dans la réduction à une dimension de problèmes multi-dimensionnels avec symétries. Ils ont été très étudiés au 19^{ème} siècle (voir [3]). Les polynômes orthogonaux associés à un poids w sont les fonctions propres d'opérateurs de ce type [6].

1.4 Exemples en dimension 2

Problème fermé pour un tore plat

Soit Γ un réseau de \mathbb{R}^2 , par exemple le réseau

$$\Gamma_{a,b} := \{am + bn \mid m, n \in \mathbb{Z}\},$$

avec $a, b \in \mathbb{R}^\bullet$. On note Γ^* le réseau dual défini par

$$\Gamma^* := \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \forall x \in \Gamma \quad \langle y, x \rangle \in \mathbb{Z}\}.$$

On a ainsi

$$\Gamma_{a,b}^* = \Gamma_{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}}.$$

On peut voir le problème de valeurs propres Γ -périodique

$$(8) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{dans } \mathbb{R}^2, \\ u & \Gamma\text{-périodique,} \end{cases}$$

comme le problème fermé sur le quotient $T_\Gamma := (\mathbb{R}^2/\Gamma, g_0)$ muni de la métrique riemannienne quotient g_0 (c'est une surface riemannienne que l'on ne peut pas plonger *isométriquement* dans \mathbb{R}^3). On dit que T_Γ est le tore plat associé au réseau Γ .

Les *séries de Fourier à plusieurs variables* permettent de résoudre le problème (8). La famille de fonctions

$$e_{\gamma^*}(x) := \exp(2i\pi\langle \gamma^*, x \rangle), \quad \gamma^* \in \Gamma^*$$

est une famille (orthogonale) complète de $L^2(T_\Gamma)$ qui diagonalise le Laplacien,

$$-\Delta e_{\gamma^*} = 4\pi^2 |\gamma^*|^2 e_{\gamma^*}.$$

Problème de Dirichlet pour un rectangle

Les *séries de Fourier à plusieurs variables en sinus* permettent de résoudre le problème de valeurs propres avec condition de Dirichlet pour le rectangle $]0, a[\times]0, b[$. La famille de fonctions

$$e_{m,n}(x, y) := \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right), \quad m, n \in \mathbb{N}^\bullet$$

est une famille (orthogonale) totale de $L^2(]0, a[\times]0, b[)$ qui diagonalise le Laplacien avec condition de Dirichlet

$$-\Delta e_{m,n} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) e_{m,n}$$

et les fonctions $e_{m,n}$ s'annulent sur le bord du rectangle. On remarquera que les valeurs propres correspondantes peuvent être simples ou multiples selon la valeur du quotient a/b .

Problème fermé pour la sphère S^2

On peut montrer que le spectre du Laplacien de la sphère S^2 de rayon 1 dans \mathbb{R}^3 (avec la métrique induite) est l'ensemble

$$\{k(k+1) \mid k \in \mathbb{N}, \text{ avec multiplicité } 2k+1\}.$$

Les fonctions propres associées (appelées *harmoniques sphériques*) peuvent être décrites comme les restrictions à la sphère des polynômes harmoniques homogènes – de degré k pour la valeur propre $k(k+1)$ – de \mathbb{R}^3 (passage en coordonnées sphériques).

1.5 Exemples en dimension n

On peut généraliser les exemples précédents en considérant les tores plats, la sphère, les parallélépipèdes de dimension n et, plus largement encore, les variétés riemanniennes abstraites (avec ou sans bord).

2 Les questions de la géométrie spectrale

Soit M un domaine borné assez régulier de \mathbb{R}^n , une surface riemannienne (M, g) ou, plus généralement, une variété riemannienne compacte à bord (éventuellement vide) (M, g) . On peut lui associer le spectre $\sigma(M, \text{Dir})$ du Laplacien pour le problème de Dirichlet, le spectre $\sigma(M, \text{Neu})$ du Laplacien pour le problème de Neumann ou, si le bord est vide, le spectre $\sigma(M, \text{Fer})$ du problème fermé.

Les méthodes d'analyse développées à partir des travaux de David Hilbert permettent d'établir l'existence de ces spectres : ils sont constitués d'une suite – tendant vers l'infini – de valeurs propres de multiplicités finies. Nous écrirons ces spectres sous la forme

$$\lambda_1(M, \heartsuit) \leq \lambda_2(M, \heartsuit) \leq \lambda_3(M, \heartsuit) \leq \dots \leq \lambda_k(M, \heartsuit) \leq \dots$$

où $\heartsuit \in \{\text{Dir}, \text{Neu}, \text{Fer}\}$ indique quel problème aux limites on considère, et où chaque valeur propre est repérée par son rang (dans l'ordre croissant) et répétée autant de fois que sa multiplicité (ce qui explique l'utilisation du signe \leq au lieu du signe $<$).

La suite des valeurs propres de M est bien sûr invariante par isométrie. Le spectre du Laplacien (pour une condition au bord déterminée) fournit donc, pour chaque M , une suite d'invariants. On appelle *géométrie spectrale* l'étude des relations entre la géométrie de M et les valeurs propres du Laplacien (ou plus généralement de tout opérateur naturel associé à une métrique riemannienne).

On peut diviser les questions qui se posent en deux grandes problématiques

Problème direct

Étant donné M (et sa géométrie), que peut-on dire sur la suite des valeurs propres $\{\lambda_j(M, \heartsuit), j \geq 1\}$?

1. Peut-on décrire explicitement la suite $\{\lambda_j(M, \heartsuit), j \geq 1\}$ (comme dans le cas des segments, des rectangles, des tores plats, *etc*) ?
2. À défaut de pouvoir la décrire explicitement, peut-on donner des renseignements asymptotiques, qualitatifs ou quantitatifs (par exemples inégalités) sur (une partie de) la suite $\{\lambda_j(M, \heartsuit), j \geq 1\}$ en fonction de la géométrie ?

Il n'est peut-être pas inutile de préciser que l'on connaît explicitement très peu de spectres. Par exemple, on ne connaît pas explicitement le spectre d'un hexagone régulier de \mathbb{R}^2 .

Donnons deux exemples typiques de réponses à la deuxième question.

- Le *théorème de Hermann Weyl* (1911) dit que

$$\lambda_j(M, \heartsuit) \sim c(n) \text{Vol}(M)^{-2/n} j^{2/n} \quad \text{quand } j \rightarrow \infty$$

où n est la dimension de M et où $c(n)$ est une constante universelle (que l'on peut expliciter). Ce théorème apporte une réponse à une question – relative à la théorie des radiations de Jeans – posée par le physicien H.A. Lorentz à l'occasion d'une conférence donnée à Göttingen en octobre 1910 (conférence Wolfskehl, *Über alte und neue Fragen der Physik*).

- Le *théorème de Faber – Krahn* (1923) dit que pour tout domaine borné $M \subset \mathbb{R}^n$, on a

$$\lambda_1(M, \text{Dir}) \geq \lambda_1(B_M, \text{Dir})$$

où B_M est une boule euclidienne de volume égal à $\text{Vol}(M)$. L'égalité dans cette inégalité a lieu si et seulement si M est isométrique à B_M . Les inégalités de ce type sont très importantes dans les problèmes d'existence, dans les problèmes de stabilité ou dans les problèmes de résistance des matériaux pour lesquels la plus petite valeur propre (celle qui est associée à *l'état fondamental*, dans le vocabulaire de la physique) joue un rôle critique.

Problème inverse

Quelles informations sur M peut-on tirer de la donnée d'une suite de valeurs propres $\{\lambda_j(M, \heartsuit), j \geq 1\}$?

Cette question revêt une importance particulière dans le contrôle de certaines structures comme les axes des grands alternateurs ou les essieux de wagons (souvenons-nous des cheminots qui frappaient les roues des trains en gare pour détecter d'éventuelles fissures, ils sont remplacés aujourd'hui par des microprocesseurs) [1].

On peut montrer que la donnée de $\{\lambda_j(M, \heartsuit), j \geq 1\}$ détermine la dimension de M , son volume (utiliser par exemple le théorème de H. Weyl mentionné ci-dessus), le volume de son bord et, dans le cas de la dimension 2, sa topologie. Cette donnée permet également de déterminer certains autres invariants numériques (intégrales de courbure). Ces résultats se déduisent, par exemple, de l'asymptotique, quand t tend vers 0 par valeurs positives, de la fonction

$$\sum_{j=1}^{\infty} \exp(-\lambda_j(M, \heartsuit) t)$$

qui est reliée à l'équation de la chaleur (formule asymptotique de Minakshisundaram – Pleijel, voir [5] pour une preuve heuristique). On peut également considérer une fonction analogue (en fait une distribution), associée à l'équation des ondes, qui relie le spectre et les longueurs des géodésiques périodiques.

La *formule de Poisson* (séries de Fourier à plusieurs variables et tores plats)

$$\sum_{\gamma^* \in \Gamma^*} \exp(-4\pi^2 |\gamma^*|^2 t) = (4\pi t)^{-n/2} \text{Vol}(T_\Gamma) \sum_{\gamma \in \Gamma} \exp(-|\gamma|^2/4t), \quad \forall t > 0,$$

est un exemple typique d'une telle relation. Le membre de gauche contient l'information spectrale, le membre de droite contient l'information géométrique (la dimension, le volume et les longueurs des géodésiques périodiques).

Fort de ces résultats, on peut se demander – formulation mathématique de la question *Peut-on entendre la forme d'un tambour ?* posée par Mark Kac [5] –

La donnée de la suite $\{\lambda_j(M, \heartsuit), j \geq 1\}$ caractérise-t-elle M à isométrie près ?

La réponse à cette question est NON.

2.1 Assertion. *Les domaines de la Figure 1, exhibés par C. Gordon, D. Webb et S. Wolpert en 1991 ([4]), constituent un contre-exemple à la question de M. Kac. Ils ont mêmes spectres pour le Laplacien avec condition de Dirichlet ou avec condition de Neumann, mais ils ne sont pas isométriques.*

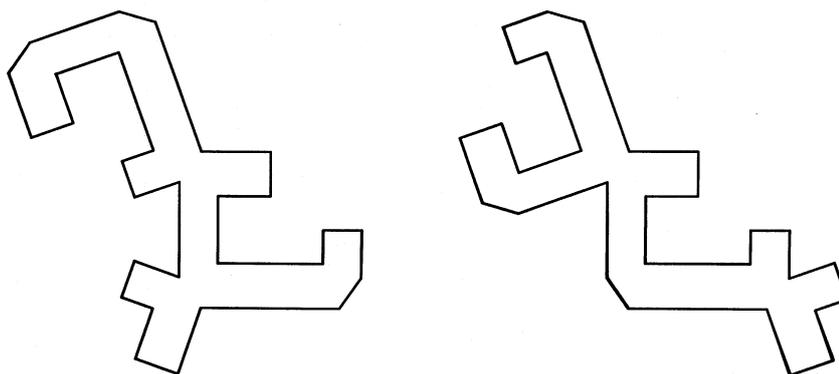


FIG. 1 – On ne peut pas entendre la forme d'un tambour

3 Démonstration de l'Assertion 2.1 :

On ne peut pas entendre la forme d'un tambour

On peut donner une preuve élémentaire de l'Assertion 2.1. Par symétrie, il suffit de démontrer qu'une fonction propre sur l'un des domaines correspond à une fonction propre et une seule sur l'autre domaine. Pour établir une telle correspondance, par exemple dans le cas du problème de Dirichlet, on décompose chaque domaine en sept briques identiques, comme indiqué sur la Figure 2.

Soit u_1 une fonction propre du Laplacien dans le domaine I, vérifiant la condition de Dirichlet sur le bord. Elle vérifie donc $-\Delta u_1 = \lambda u_1$ à l'intérieur du domaine et $u_1 = 0$ sur le bord.

On considère les restrictions A, B, \dots, G de la fonction u_1 à chacune des briques, comme indiqué sur la Figure 2. On construit sur le domaine II la fonction u_2 dont les restrictions aux différentes briques sont données par $-B+C+E, B+F-G, \dots, D+B-A$, comme indiqué sur la Figure 2.

Il est clair que la fonction u_2 vérifie $-\Delta u_2 = \lambda u_2$ à l'intérieur de chaque brique. Il reste maintenant à vérifier d'une part qu'elle est C^∞ et d'autre part qu'elle s'annule sur le bord du domaine II. C'est un exercice facile de vérification à la main. ■

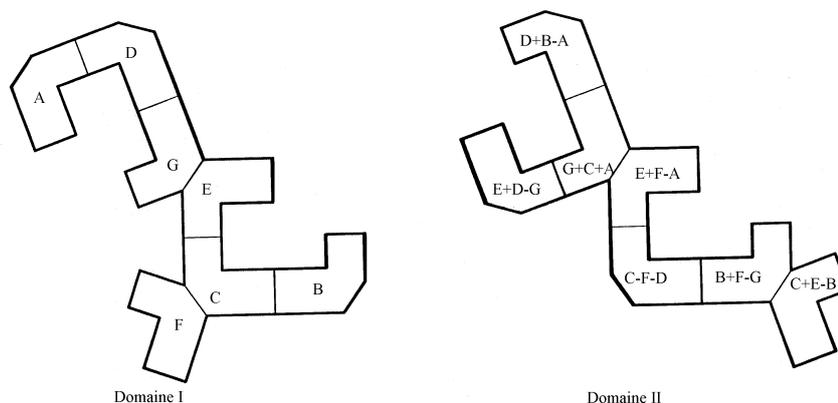


FIG. 2 – On ne peut pas entendre la forme d'un tambour : démonstration

Cette démonstration est bien sûr quelque peu mystérieuse ! Pour en expliquer les idées sous-jacentes, il faut considérer les surfaces de la Figure 3 et remarquer que les domaines de la Figure 1 sont obtenus comme quotients de ces surfaces par une symétrie hyperplane.

Ces surfaces ont été obtenues par Peter Buser [2] par recollement de sept exemplaires de la brique fondamentale de la Figure 4 selon les combinatoires (illustrées par les couleurs dans la Figure 3) des graphes de la Figure 4 : le côté \bar{a} de la brique numéro i est recollé au côté a de la brique numéro j s'il y a une flèche A de e_i vers e_j dans le graphe (de même pour les côtés \bar{b} et b).

On peut montrer que les surfaces (à bord dans \mathbb{R}^3) de la Figure 3 ont mêmes spectres pour le Laplacien avec conditions de Dirichlet ou de Neumann.

La démonstration de cette propriété, dont les grandes lignes seront données dans l'exposé oral a cela d'intéressant qu'elle fait intervenir des domaines très différents des mathématiques : analyse, combinatoire, graphes, groupes et géométrie.

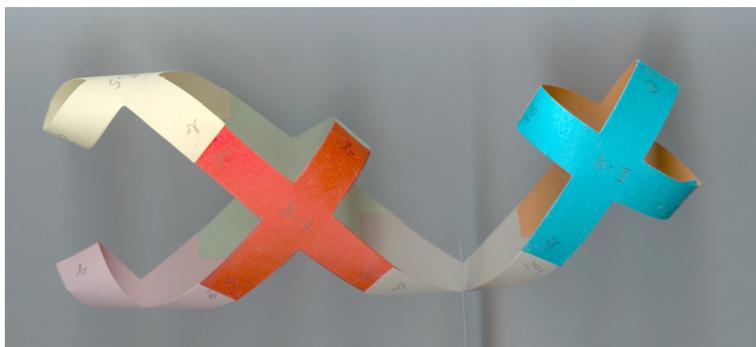
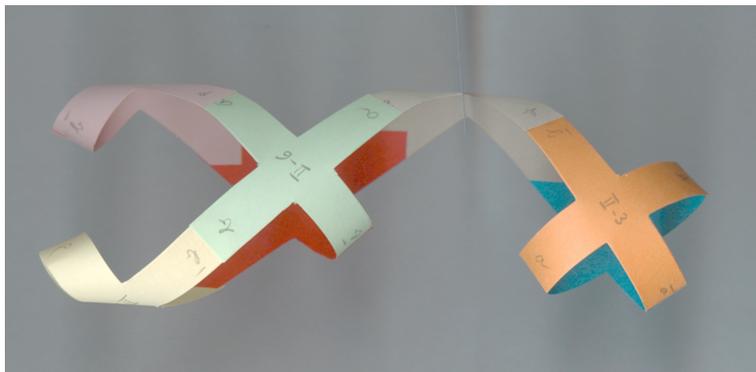
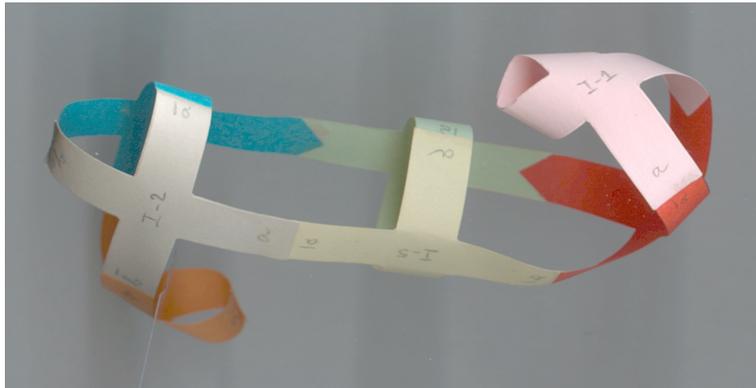
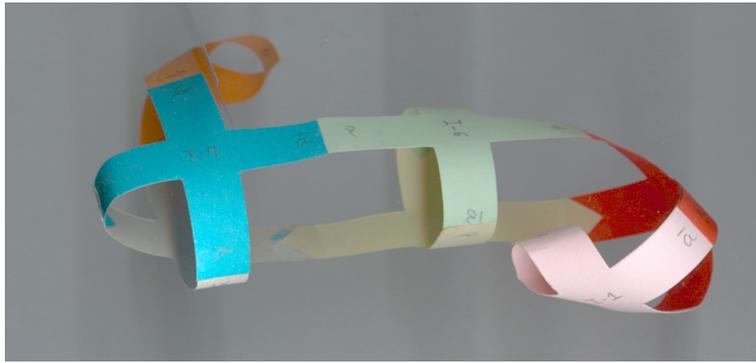
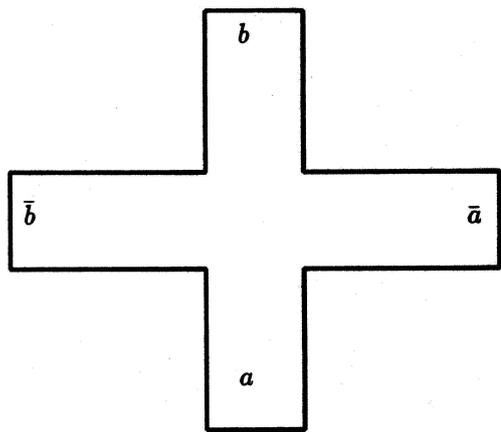


FIG. 3 – Surfaces de Peter Buser (vues de dessus et de dessous)



Brique fondamentale \mathcal{B}

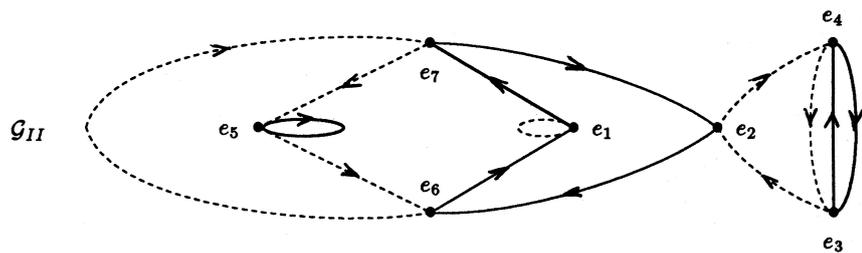
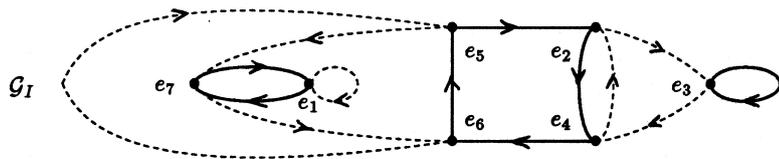


FIG. 4 – Graphes et recollements

4 Épilogue

L'histoire s'arrête-t-elle ici ? Non, bien sûr.

Jusqu'au début des années quatre-vingts, les mathématiciens pensaient que les exemples de couples de variétés non isométriques ayant même spectre étaient sporadiques. Les travaux de T. Sunada et de C. Gordon – E. Wilson (1983 – 1985) ont permis de construire de nombreux exemples de tels couples, et même des familles continues de variétés ayant même spectre (déformations). En 1991, C. Gordon, D. Webb et S. Wolpert ont exhibé les premiers domaines plans ayant mêmes spectres, apportant ainsi une réponse négative à la question de M. Kac.

La décennie passée a été consacrée à la construction de nombreux exemples de variétés ayant même spectre. Ces exemples ont permis de mettre en évidence différents invariants géométriques qui ne peuvent pas être déterminés par le spectre.

Mais il reste des problèmes ouverts ! Ainsi, on ne sait pas encore quelle est la réponse à la question de M. Kac pour les domaines C^∞ (sans coins). On ne sait pas non plus quelle est la réponse à la question de M. Kac pour les domaines convexes.

Références

- [1] Bourguignon, Jean-Pierre. — Formes, vibrations et essais non destructifs, *Le Courrier du C.N.R.S.* 64 (1986), 43 – 47
- [2] Buser, Peter. — Cayley graphs and planar isospectral domains, *Proc. Taniguchi Symp. Geometry and Analysis on Manifolds*, Springer Lecture Notes in Math. 1339 (1988), 64–77
- [3] Dieudonné, Jean. — *History of functional analysis*, North-Holland Mathematics Studies, 49, North-Holland 1981
- [4] You can't always hear the shape of a drum, in *What's happening in the mathematical sciences*, Vol. 1, Amer. Math. Soc. 1993, pp. 12 – 16
- [5] Kac, Mark. — Can one hear the shape of a drum ? *Amer. Math. Monthly* 73 (1966), 1–23
- [6] Nikiforov, A. et Ouvarov, V. — *Éléments de la théorie des fonctions spéciales*, Éditions MIR 1976

Ce texte, avec la Figure 3 en couleurs, est disponible en format PDF sur la page

<http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~pberard/publications.html/>