LIVRE PREMIER

"Tous les problèmes de géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin, par après que de connaître la longueur de quelques lignes droites pour les construire"[127].

Les premières pages de *La Géométrie* passent en général pour être suffisamment claires d'elles-mêmes. L'auteur montre comment les opérations de l'arithmétique sont véritablement des constructions géométriques. Ces constructions correspondent à des propositions euclidiennes non discutées. La géométrisation du calcul algébrique serait de ce fait établie. Ceci semble d'autant plus satisfaisant que la géométrie, science diversifiée et même parfois difficile, est ainsi rapportée à des notions toutes simples et propres à la connaissance intuitive. Nous voici en belle et bonne *méthode*. On aurait tort de trop s'y fier; de délicats problèmes surgissent dès que l'on interroge l'apparente simplicité de ces premières pages.

Une grande part de l'Essai va consister à établir la preuve (souvent technique) qu'il est possible de réduire les *problèmes de géométrie* à la construction de *quelques lignes droites*, mais un sérieux problème préliminaire à cette réduction doit être reconnu au sein de ces pages dont la réputation de simplicité est, en fait, usurpée. Il faut regarder de plus prés le statut de ces *quelques lignes droites*. Nous souhaiterions indiquer pourquoi les éléments que Descartes va multiplier ou diviser entre eux ne sont ni des nombres, ni vraiment des segments et en quoi les phrases sur le rôle de l'unité et le respect de l'homogénéité des formules algébriques doivent être méditées de prés.

LES PROBLÈMES DE L'UNITÉ

Les règles XIV et XVIII placent la claire connaissance de l'unité et de son rôle au cœur des procédures concernant l'ordre et la mesure; cette question engage l'ensemble de la théorie mathématique cartésienne.

"L'unité est cette nature commune dont doivent participer, à titre égal […] toutes les choses que l'on compare entre elles.[…] Toutes les relations qui peuvent exister entre des êtres de même genre doivent se ranger sous deux rubriques essentielles: savoir l'ordre ou la mesure […] Je reconnais en effet quel est l'ordre entre A et B, sans rien

[127]A.T. X, p.369.

considérer d'autre que ces deux termes extrêmes; alors que je ne reconnais pas quel est le rapport de grandeur entre deux et trois, à moins de considérer un troisième terme, savoir l'unité, qui est la mesure commune de l'un et de l'autre.

Il faut savoir aussi que les grandeurs continues peuvent, grâce à une unité d'emprunt, se réduire à une multiplicité, parfois en totalité, et toujours au moins partiellement; que la multiplicité des unités peut ensuite se disposer selon un ordre tel que la difficulté qui appartenait à la connaissance de la mesure, finisse par dépendre de la seule considération de l'ordre; et que c'est en ce progrès que réside le plus grand secours de la méthode"[128]

Soumettre la mesure à l'ordre, tel est le but; l'unité, tel est l'outil essentiel. La règle XVIII est encore plus explicite puisqu'*"il faut avertir que l'unité […] est ici la base et le fondement de toutes les relations…"*[129]

Il s'agit donc de voir si ces remarques suffisent à réaliser la première tâche -décisive– de la *Géométrie* dont l'accomplissement devra rendre réalisables toutes les opérations de l'algèbre par composition et construction de lignes droites. Cette tâche consiste à définir les opérations algébriques comme des constructions géométriques de lignes droites.

Deux grandeurs étant données, avons-nous leur somme? La *Géométrie*, comme les *Regulae* permettent de l'affirmer en vertu d'une opération de juxtaposition ou d'adjonction (selon la règle XVIII). Il en va de même pour la soustraction. Il n'y a donc pas de problème associé à la constitution de cette opération interne dans les grandeurs qu'est l'addition. a et b étant données, $a+b$ est immédiatement déterminée, homogène aux données et, sans rien d'arbitraire[130].

Il n'en va pas de même pour la multiplication, la division (et aussi pour l'extraction de la racine carrée). Deux grandeurs étant données, comme lignes, leur produit n'est pas déterminé et il n'est pas, en tout cas, immédiatement constructible. Il y a plus, une grandeur étant donnée, son carré n'est pas déterminé. Tout dépend, en effet de la ligne

---

[128] Règle XIV, G.F. 1, pp.182-3

[129] Règle XVIII, G.F. 1, p.195

[130]Ces deux opérations internes d'addition et de soustraction sont d'inspiration euclidienne (prop.2 et 3, Livre I) quoiqu'il faille souligner qu'elles n'existent pas -en tant qu'opération- chez l'alexandrin.

unité. Selon ce qu'elle sera, la représentation du carré, du produit, de la racine sera d'autant variable (la longueur de la ligne-produit est inversement proportionnelle à celle de l'unité).

Les procédés cartésiens sont les suivants:

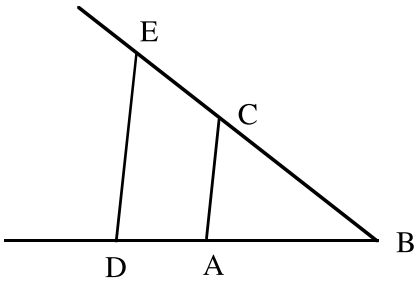

fig. 1

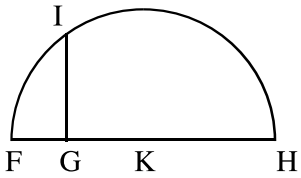

fig. 2

1) Dans la figure 1 ci-dessus, soit AB = 1. Pour multiplier BD par BC, on trace DE parallèle à CA. *"BE est le produit de cette multiplication"*[131].

On a, en effet, BE:BC = BD:BA, soit BE = BC.BD

2) Même figure. Pour diviser BE par BD, on trace AC parallèle à DE. *"BC est le produit de cette division"*

On a, en effet, BC:BA = BE:BD, soit BC = BE:BD

3)Dans la figure 2 ci-dessus, soit FG = 1. Pour obtenir la racine carrée de GH, on trace le demi-cercle de diamètre FH et la perpendiculaire à FH et G, qui le coupe en I. *"C'est GI la racine cherchée"*

Dans le triangle rectangle FIH, la hauteur GI vérifie bien $GI^2 = FG.FH$ donc $GI = \sqrt{GH}$.

On pourrait donc estimer que la 'réduction à la ligne' des opérations géométriques s'accompagne d'une régression, par perte de détermination. En effet, si l'on donne pour produit de deux lignes le rectangle formé sur elles, ce produit, cette grandeur est parfaitement déterminée. L'opération est bien définie. L'ennui -c'est l'enjeu de la réforme cartésienne- est qu'elle n'est pas une opération interne dans la mesure où le résultat (une aire) n'est pas homogène aux données (des longueurs).

Descartes n'esquive pas la question et nous avertit nettement qu'il ne s'agit pas de multiplier deux lignes. A bien y regarder, il n'y a pas,

[131]A.T. VI, p.370.

dans la *Géométrie*, d'opération qui, à deux lignes, associe leur ligne-produit. A trois lignes, dont l'une est nommée l'unité, on peut en associer une quatrième par la vertu de la théorie des proportions et de la 'propriété de Thalès' (il en va de même pour la division et la racine carrée, cette dernière utilisant un corollaire du théorème de Pythagore).

La même question est plus longuement exposée dans la règle XVIII et la doctrine y est sensiblement différente. Deux lignes étant données, leur produit est déterminé sans que l'unité ne soit posée, mais il est alors une surface rectangulaire. Dans les *Regulae*, la multiplication des grandeurs n'est donc pas l'opération interne nécessaire à la constitution de la géométrie algébrique. Pourtant, lorsqu'il faut faire le produit de trois grandeurs, le rectangle-produit des deux premières est transformé en une ligne pour légitimer l'expression géométrique du produit de *n* grandeurs. L'exemple proposé est 'sans problème' puisque les grandeurs sont comme 2 et 3, le rectangle-produit étant évidemment formé de six carrés-unités. Descartes exprime alors le produit comme une ligne de valeur 6 et le calcul peut se poursuivre avec la troisième grandeur. Mais que se passe-t-il lorsque les deux grandeurs sont incommensurables? Que vaut le rectangle-produit? Il peut certes être dessiné mais il ne peut être représenté en ligne-produit équivalente.

Dans la *Géométrie*, le recours au rectangle disparaît au profit d'une construction directe en ligne. Cette construction exigeant le choix d'une ligne-unité *qui peut ordinairement être prise à discrétion*. Deux questions surgissent inévitablement.

1) Une grandeur étant donnée, l'unité est-elle déterminée?

Si cette grandeur était numérique, la réponse serait indécise. Dans le cas d'une mesure rationnelle, on doit répondre oui (il est 'euclidiennement' possible de construire la grandeur unité, à partir d'une grandeur de mesure rationnelle). Dans le cas contraire, on doit répondre négativement. Si cette grandeur n'est pas numérique, la réponse est naturellement négative et l'unité est arbitrairement choisie.

De ceci, nous tirerons argument pour nous persuader que les mathématiques de Descartes -et singulièrement la *Géométrie* - évitent la considération des nombres qui sont en quelque sorte les grands absents de cette science. La décision de ne pas constituer une mathématique des nombres est plus radicale encore dans le traité de

1637 que dans les œuvres précoces, comme le montrent les exemples numériques relativement courants des *Regulae*[132].

2)Le choix arbitraire de l'unité a-t-il des conséquences problématiques?

L'ensemble que Descartes munit de l'opération multiplicative (et de ses opérations dérivées) n'est pas numérique mais il n'est pas non plus constitué par les segments ou les 'lignes droites'. Les éléments de cet ensemble sont des grandeurs graduées, des 'lignes droites' rapportées à une longueur-unité. En ce sens, il existe une infinité de tels ensembles de base de la géométrie cartésienne; autant que de ligne-unité possibles. La ligne-produit $a.b$ n'est pas identique dans deux ensembles de ce type, distincts. Le problème est réel puisque, deux longueurs a et b étant considérées, la solution de l'équation $z - ab = 0$ est un objet géométrique distinct selon l'unité choisie. On peut donc dire qu'il est géométriquement moins déterminé que dans l'usage ancien. La géométrie de Descartes soumet certes l'algèbre à la géométrie mais, à un ensemble multiplicatif près ou plutôt modulo l'élément neutre fixé.

La question du changement d'unité (ou de graduation) sera plus cruciale encore dans l'examen des conséquences de ceci dans les problèmes de lieux. Une configuration du problème de Pappus étant donnée, le lieu-solution (notion sur laquelle il nous faudra revenir) ne doit pas s'en trouver modifié. L'analyse nous apprend que, si l'équation du lieu est modifiée, le lieu est lui-même indépendant du changement de repère introduit par le changement d'unité. C'est alors l'ensemble des expressions algébriques de la solution qui est infini, pas la courbe qu'elles expriment.

Soit en effet un repère (O,i,j) et un second repère (O, ki, kj). Un même lieu C ayant pour équation $y = f(x)$ dans le premier, aura pour équation $Y = 1/k.f(k.X)$ dans le second. Un point M de coordonnées x et y dans le premier repère a pour coordonnées $X = kx$ et $Y = ky$ dans le second. La vérification de l'équation $y = f(x)$ est équivalente à celle de $Y = 1/k.f(k.X)$ et les lieux sont donc les mêmes[133].

---

[132] Gérard Milhaud a très fortement défendu ce point de vue dans sa *Préface* aux *Notes brèves sur la Géométrie* de Debeaune , A.M., pp.353-367.

[133] On peut ajouter que le rapport des ordonnées aux abscisses est maintenu dans les deux équations: Y/X = f(kX)/kX = f(x)/x = y/x. Si l'on fait attention au rôle central de la considération des rapports dans la constitution des équations, on

Lorsque le R.P. Rabuel traite de cette question, dans ses *Commentaires sur la Géométrie de M. Descartes*, il propose cependant une surprenante interprétation. Dans un même problème, la ligne-unité peut changer au point qu'elle joue le rôle de variable. *"L'unité est variable ainsi qu'il arrive dans ce lieu au cercle yy= 2ax-xx. Dans les analogies […] qui donnent le lieu […] les x qui tiennent la place de l'unité changent à chaque fois"*[134].

LES HOMOGÈNES ET LES PROPORTIONS

Si la géométrie algébrique manipulait des nombres structurés en corps (ou demi-corps), les remarques cartésiennes concernant les homogènes seraient incompréhensibles. Si l'affaire est si considérable pour Descartes, c'est en fait parce que les opérations internes en voie de constitution sont directement issues de la théorie des proportions, or il ne peut y avoir rapport qu'entre grandeurs homogènes. Ce point était déjà annoncé dans la règle XVIII notamment. La suite du passage que nous avons cité plus haut est explicite; si l'unité est la base de toutes les relations, c'est *"qu'elle occupe le premier degré dans la série des grandeurs en proportion continue et que les grandeurs données se situent au second degré, tandis que les grandeurs cherchées se trouvent au troisième, au quatrième et aux degrés suivants si la proportion est directe; alors que, si elle est indirecte, la grandeur cherchée se trouve au second degré et aux degrés intermédiaires, tandis que la grandeur donnée se trouve au dernier."*[135]

En effet, a et b étant donnés, $z = a.b$ ne signifie rien d'autre que $z:a :: b:1$. z est donc homogène à a et non à $a.b$, ce qui entraîne que l'écriture $z = a.b$ n'a de sens que si elle est pensée comme $z.1 = a.b$. L'intervention de l'unité est ainsi la garantie que, dans cet ensemble non numérique, la multiplication (ou la division) puisse être définie dans le respect des homogènes. Le bénéfice est au demeurant celui-ci: l'opération peut se poursuivre en dimension quelconque. Nous sommes, avec la *Géométrie* , non seulement dans un moment décisif de constitution de la géométrie algébrique, mais -et c'est peut-être

---

comprend l'assurance de Descartes quant à la possibilité du choix arbitraire de l'unité.

[134]Claude Rabuel, p.13. En effet, on écrira x:y::y:(2a-x). 2a est donnée, quelque soit la longueur de x-unité, y sera construit selon la cinquième opération-construction canonique du Livre I de *La Géométrie*.

[135] Règle XVIII, G.F.1, p.195

l'essentiel- dans le moment si difficile à repérer de l'histoire des mathématiques où la théorie des proportions laisse la place au calcul algébrique par un élargissement de la notion de nombre (la raison eudoxo-euclidienne accomplit sa mue en nombre rationnel). On sait bien qu'en théorie des proportions, il n'y a pas véritablement d'opération, mais un ensemble de règles de conservation des proportions. La *Géométrie* de Descartes est bel et bien bâtie sur la grande doctrine eudoxo-euclidienne des grandeurs continues, mais elle parvient à y greffer un élément neutre et une multiplication.

Les objets élémentaires de la géométrie algébrique sont donc définis, dans un entre-deux qui n'est plus strictement géométrique (pure étendue), ni numérique. La réussite considérable de Descartes sur ce point est d'avoir doté ses grandeurs graduées (qui ne sont ni des nombres ni des lignes) de l'opération interne multiplicative, grâce à la place centrale donnée à l'élément neutre de cette opération. Si l'on voulait être tout-à-fait strict, il faudrait reconnaître qu'il n'y a pas, dans la *Géométrie*, de multiplication mais la recherche d'une quatrième proportionnelle. Comme on l'a vu, à un isomorphisme près, la production de cette quatrième proportionnelle fonctionne comme une opération interne bien déterminée et étend -de fait- aux grandeurs continues les algorithmes du calcul algébrique. Avec Descartes, les mathématiques ont des racines strictement euclidiennes, mais elles porteront des fruits bien au delà de ce qui était admis dans les treize livres de l'alexandrin.

Parfois négligé dans le commentaire moderne, cette question du segment unité et des homogènes est pourtant apparue centrale à un très pertinent et crédible commentateur de la *Géométrie*, à savoir Florimond Debeaune qui, dans ses *Notes brèves sur la géométrie*[136]écrit: *"Il faut maintenant expliquer pourquoi nous devons donner autant de dimension ou lettres à tous les termes d'une équation. Et cela est manifeste de soi-même lorsque nous entendons par les*

[136]Ces *Notes brèves* ont été rédigées par Debeaune en 1638-39 et elles reçurent l'approbation expresse, voire enthousiaste de Descartes. Sur l'histoire de ce texte, de sa traduction latine et sa publication par Van Shooten en 1649 et 1659, ainsi que sur les réactions de Descartes à ces notes, nous renvoyons à *Descartes*, Correspondance, par Ch.Adam et G.Milhaud, P.U.F., Paris, 1941, Tome III, pp. 323-401.

termes, des surfaces ou des corps, puisqu'il n'y a aucun rapport ni raison entre les quantités hétérogènes, et que les espaces ou les corps sont toujours désignés par un égal nombre de lettres qui est le même que celui de leurs dimensions.

Mais il est expédient de faire de même lorsqu'on ne désigne que des lignes par les termes, pour rendre la méthode plus universelle, et beaucoup plus commode. car on n'y est nécessairement astreint lorsque la ligne qui doit être prise pour l'unité est indéterminée, c'est-à-dire qu'on veut laisser à discrétion de prendre telle ligne qu'on voudra pour l'unité. Et cela est aisé à concevoir, d'autant que si nous prenons une ligne comme a pour l'unité, les lignes b^2 et d^2 par exemple seront dénommées autant qu'elles ont leur rapport à cette ligne a, et si on suppose une autre ligne que a pour l'unité encore que b et d soient les mêmes lignes, b^2 et d^2 seront diverses des précédentes, et partant, si on voulait conférer la ligne b avec d^2, puisque d^2 est diverse selon qu'elle est rapportée à diverses lignes qu'on peut prendre pour l'unité et que la même ligne b (demeure toujours, il est évident que la même ligne b) n'a pas toujours le même rapport avec la ligne d^2. Au contraire, elle les a divers selon les diverses lignes qu'on peut prendre pour l'unité. Ainsi des autres Mais quelque ligne qu'on prenne pour l'unité, la ligne indéterminée qu'on conçoit pour b^2 a toujours un égal rapport et raison à d^2 qui est toujours le même que celui du carré de la ligne b , au carré de la ligne d, et ainsi de tous les autres, comme il a été démontré ci-dessus.

Et il est bien plus général et commode de laisser ainsi l'unité indéterminée et à sa discrétion, pour après, prendre pour elle à sa commodité telle ligne qu'on voudra, que de la déterminer en prenant pour elle une ligne certaine dès le commencement de l'opération, joint que cela sert beaucoup à éviter la confusion et à diriger le calcul et empêcher les fautes qu'on y pourrait commettre. Mais quand l'unité est déterminée, alors on n'est pas obligé de donner autant de lettres aux uns qu'aux autres termes de l'équation, parce que l'unité les supplée partout où il y en a moins, car l'unité multipliant ou divisant les espèce ne les change point, mais si elle n'y est exprimée, elle y peut être sous-entendue, et de cela il y a plusieurs exemples en cette géométrie"[137].

---

[137]Id. pp.372-3.

On constate en effet que jusqu'à la fin du livre troisième, la considération de l'unité exige de respecter rigoureusement les règles de l'homogénéité des équations. Donnant les règles générales de résolution des problèmes solides, Descartes indique ainsi qu'il faut réduire l'équation *"à telle forme,* $z^3 = apz +/- aaq$ *si la quantité inconnue n'a que trois dimensions, ou bien à telle* $z^4 = apzz +/- aaqz +/- a^3r$*, si elle en a quatre, ou bien, en prenant a pour unité, à telle,* $z^3 = pz +/- q$ *et à telle* $z^4 = pzz +/- qz +/- r$ *…"*[138].

Si les opérations algébriques se peuvent rapporter à des constructions, en quoi sont-elles nécessaires et ne devrait-on pas se passer d'elles, comme méthodes et objets un tant soit peu indépendants?

Non répond Descartes et *"souvent, on n'a pas besoin de tracer ainsi ces lignes sur le papier, et il suffit de les désigner par quelques lettres, chacune par une seule"*[139]. Suivent, en quelques lignes brèves, les indications principales des notations algébriques adoptées ou mise au point par l'auteur. Ce 'retour' algébrique est évidemment important et correspond au programme annoncé dès la *règle XVI* où l'analyse des anciens était stigmatisée parce que trop *"astreinte à des considérations de figures* et ne pouvant *exercer l'entendement sans fatiguer beaucoup l'imagination"*[140]. L'enjeu est de taille et nous y repérons une 'économie de pensée' que Descartes exprimait ainsi: "*Par ce système, non seulement nous ferons l'économie d'un grand nombre de mots, mais encore, et c'est le principal, nous rendrons manifeste les termes de la difficulté sous une forme si pure et si dépouillée que, sans que rien d'utile n'y soit omis, on n'y trouvera rien non plus de superflu, et qui risque d'accaparer inutilement la capacité de l'esprit lorsqu'il lui faudra embrasser plusieurs choses à la fois*" [141].

Voici qui peut libérer notre esprit: *«Pour que nous ne soyons pas contraint d'immobiliser une partie de notre attention pour lui rendre sa fraîcheur, tout en vaquant à d'autres pensées, l'art y a très heureusement ajouté l'usage de l'écriture, grâce au secours de cette dernière, nous ne confierons ici absolument rien à la mémoire, et nous*

---

[138]A.T., p.465
[139] A.T. p.371. Corpus, p.334.
[140]AT. X, p.455.
[141] Règle XVI, A.T. X, p. 455.

préserverons tout entière notre fantaisie libre pour les idées présentes en inscrivant sur le papier tout ce qu'il faudra retenir, et cela par des signes très concis, afin de pouvoir les passer distinctement en revue l'un après l'autre, conformément à la neuvième règle, les parcourir tous ensuite par un mouvement très rapide de la pensée conformément à la onzième, et prendre, du plus grand nombre possible d'entre eux une intuition simultanée."[142]

Les caractères de l'algèbre n'ont pas d'indépendance par rapport aux segments qu'ils signalent et rappellent. Aussi, nous ne partageons pas l'idée selon laquelle ces pages libèrent l'algèbre du modèle géométrique[143].

Il peut être tentant de voir, dans les cinq opérations de l'algèbre d'une part, dans les cinq constructions géométriques élémentaires d'autre part et dans leur stricte correspondance, l'idée d'une communauté de structure de ces deux domaines de la science mathématique. Par ce moyen Descartes n'aurait pas seulement éclairé l'un par l'autre, mais il aurait cherché à mettre en évidence un parallélisme de structure entre l'algèbre et la géométrie[144]. Dans les versions qu'il publie, en 1649 puis 1659 et 1661, Van Schooten semble

---

[142] Règle XVI, A.T. X, p.455. La brièveté de l'exposé des règles de l'algèbre dans la *Géométrie* est extrême. On aurait tort de croire que ces manipulations allaient de soi pour le lecteur de 1637 et c'est pourquoi l'auteur de *L'introduction à la méthode de géométrie de Monsieur Descartes* y revient en détail pour montrer combien, *"un jeune qui souhaiterait s'aventurer dans l'étude de la géométrie cartésienne, et qui serait déjà familiarisé avec les Eléments d'Euclide, devrait apprendre, dès le début les éléments du calcul algébrique"*. Aldo Brigaglia, p.136. L'identité de l'auteur de *L'introduction* n'est pas certaine: Descartes lui-même ou son ami et voisin Haestrecht? Elle a été écrite en 1638.

[143] *"Ce sera surtout avec la Géométrie que l'algèbre prendra un rôle libéré du modèle géométrique, faisant ainsi valoir et reconnaître des régions propres et l'efficacité de ses propres méthodes. Le symbole de la conquête de cette autonomie est la définition cartésienne du produit de deux grandeurs (segments), par l'intermédiaire de l'introduction du segment unitaire. Comme le note justement Descartes, le produit n'est plus équivalent à la construction d'un rectangle, mais à la détermination de la quatrième proportionnelle entre les segments en question et le segment unité. Grace à cette règle extrêmement simple, la représentation algébrique se dégage, des principes, comme celui de l'homogénéité, qui en avaient sanctionné la stricte subordination à la géométrie"*. Aldo Brigaglia, p.136

[144] C'est l'idée qui apparaît fortement dans le travail de Scott.

bien avoir été de cet avis[145]. Si elle est effectivement à l'œuvre dans *La Géométrie*, cette idée ne doit pourtant pas être surestimée. En effet, la notion de 'base axiomatique' d'une théorie mathématique n'est pas du tout perceptible dans cet essai et n'aurait d'ailleurs que peu de cohésion avec les conceptions générales cartésiennes concernant la logique et les premières notions constitutives d'une science.

LA MISE EN ÉQUATION

L'ensemble opératoire des grandeurs graduées ayant été constitué, il faut *en venir aux équations qui servent à résoudre les problèmes*. On peut distinguer cinq moments nécessaires au succès de la méthode de résolution d'un problème de géométrie par sa mise en équation.

-nommer les objets géométriques (par des lettres).

-donner un même statut logique à ceux qui sont connus et à ceux qui ne le sont pas.

-parcourir la difficulté selon l'ordre naturel des dépendances mutuelles entre ces objets.

-identifier deux expressions (c'est-à-dire deux dénominations algébriques) distinctes concernant en propre ces objets. Cette identification est justement une équation et un problème donné peut en comprendre plusieurs (la différence entre leur nombre et le nombre des lignes inconnues mesure la détermination du problème dit Descartes).

- enfin, démêler les équations (nous dirions les résoudre) par les méthodes générales de l'algèbre.

Une difficile question d'algèbre théorique se profile ici, qui sera reprise au livre III. Soit un problème à n lignes inconnues; si l'on a n équations, le problème est entièrement déterminé. Si l'on a (n-p) équations, le problème n'est pas entièrement déterminé, ce qui signifie que p lignes peuvent être arbitrairement choisies et fixées et, à ce choix, correspondra une solution résiduelle. Que l'on soit dans l'un ou l'autre cas, la procédure doit, en fin de compte, nous mener à une équation polynomiale -dite 'équation démêlée- à une inconnue de type $P(z) = a$.

---

[145] *"En substance,* -écrit Aldo Brigaglia-*Van Schooten veut démontrer la parfaite traductibilité du langage algébrique en langage géométrique et vice-versa"* , p.141