Une petite découverte tout extraordinaire concernant les exposants complexes de partie réelle $\frac{1}{2}$ et l'inversion, (ou les complexes, c'est pas simple), Denise Vella-Chemla, 21 novembre 2024

Quel est mon objectif courant ? Je cherche à trouver une opération qui me permettrait de rassembler certains termes, par paquets (de 4 idéalement), dans la somme bien connue

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Ce faisant, en cherchant si éventuellement il y aurait un lien entre deux termes, le terme concernant n et le terme concernant $\frac{1}{n}$ (qui ne sont d'ailleurs pas tous les deux dans la somme ci-dessus), j'ai réalisé qu'il semblerait qu'une certaine propriété soit vérifiée lorsque l'exposant choisi est de partie réelle 0.5 et seulement dans ce cas. Expliquons cette propriété algébriquement :

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+ib}} \times n = n^{\frac{1}{2}-ib}$$

qu'on peut énoncer ainsi "si on sait à quoi est égale une fraction de numérateur 1 et de dénominateur d'exposant complexe, dont la partie réelle est $\frac{1}{2}$, on obtient à quoi est égal le produit de la fraction obtenue en inversant le nombre entier au dénominateur, par le nombre entier en question, en "faisant monter" le nombre entier au numérateur, et en l'élevant à la puissance conjuguée de la puissance initiale.

Si la partie réelle de l'exposant est un nombre réel entre 0 et 1, alors il faut prendre son complémentaire et conjuguer également, ainsi :

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{3}+ib}} \times n = n^{\frac{2}{3}-ib.}$$

Voici le programme utilisé :

```
import mpmath
from mpmath import *

print('On note f(x) = 1/(x**(0.5+bi)).')
print('aux parties imaginaires (variable b) entieres, que donne l inversion ?')
x = 5
print('x = ',x)
print('f(5) = ',1/(x**(0.5+3*1j)))
print('(x f(x)).real = ',5*((1/(x**(0.5+3*1j))).real))
print('(x f(x)).imag = ',5*((1/(x**(0.5+3*1j))).imag))
y=1/5
print('f(1/5) = ',1/(y**(0.5+3*1j)))
print('')
print('aux zeros non triviaux l inversion a aussi ce comportement (on teste avec
                le troisieme et le quatrieme zero et pour les entiers de 1 a 4)')
for k in range(1,5):
     print('k = ',k)
     print('k-ieme zero = ',zetazero(k))
     for x in range(1,5):
          print('x = ',x)
          print('f(',x,') = ',1/(x**zetazero(k)))
          print('partie reelle fois', x,' = ',(x*(1/(x**zetazero(k)))).real)
```

```
          print('partie imaginaire fois', x,' = ',(x*(1/(x**zetazero(k)))).imag)
          print('f(',1/x,') = ',1/((1/x)**zetazero(k)))
          print('')
print('')
print('tandis qu avec un complexe en exposant qui ne serait pas un zero, ce
comportement n a pas l air de se produire :  prenons d abord
un complexe de partie imaginaire plus grande que 1 :  k = 0.24565 + 7.25689575 i.')
k=0.24565+7.25689575*1j
for x in range(1,5):
     print('x = ',x)
     print('f(x) = ',1/(x**k))
     print('(f(x).real) fois x = ',x*((1/(x**k)).real))
     print('(f(x).imag) fois x = ',x*((1/(x**k)).imag))
     print('f(1/x) = ',1/((1/x)**k))
     print('')

print('')
print('puis avec un complexe en exposant, ce complexe n etant pas un zero, ce
comportement n a pas l air de se produire avec
un complexe de partie imaginaire plus petite que 1 :  k = 0.24565 + 0.725689575 i.')
k=0.24565+0.725689575*1j
for x in range(1,5):
     print('x = ',x)
     print('f(x) = ',1/(x**k))
     print('(f(x).real) fois x = ',x*((1/(x**k)).real))
     print('(f(x).imag) fois x = ',x*((1/(x**k)).imag))
     print('f(1/x) = ',1/((1/x)**k))
     print('')

print('')
print('')
print('Refaisons les memes tests mais en multipliant les memes nombres x par -i')
print('x = -5 i')
x = -5*1j
print('f(-5 i) = ',1/(x**(0.5+3*1j)))
print('(f(x).real) fois x = ',(-5*1j)*((1/(x**(0.5+3*1j))).real))
print('(f(x).imag) fois x = ',(-5*1j)*((1/(x**(0.5+3*1j))).imag))
y=1/(-5*1j)
print('f(1/(-5*1j)) = ',1/(y**(0.5+3*1j)))
print('')
print('tandis qu aux zeros non triviaux, a nouveau, l inversion n a pas ce
comportement, pourquoi ?')
print('(tests pour le troisieme et le quatrieme zero et les entiers de 1 a 4)')
for k in range(3,4):
     print(k,' ::::')
     print(zetazero(k))
     for x in range(1,5):
          xprime = -x*1j
          print('x = ',xprime)
          print('f(x) = ',1/(xprime**zetazero(k)))
          print('(f(x).real) fois x = ',xprime*(1/(xprime**zetazero(k))).real)
          print('(f(x).imag) fois x = ',xprime*(1/(xprime**zetazero(k))).imag)
          print('f(1/x) = ',1/((1/xprime)**zetazero(k)))
          print('')
```

```
print('')
print('et avec un complexe en exposant, ce complexe n etant pas, un zero, est-ce-que
cela marche, on le prend
de partie imaginaire plus grande que 1.  ')
print('on prend comme exposant k = 0.24565 + 7.25689575 i et on calcule les termes
correspondant aux entiers de 1 a 4.')
k=0.24565+7.25689575*1j
for x in range(1,5):
     xprime = -x*1j
     print('x = ',xprime)
     print('f(x) = ',1/(xprime**k))
     print('(f(x).real) fois x = ',xprime*((1/(xprime**k)).real))
     print('(f(x).imag) fois x = ',xprime*((1/(xprime**k)).imag))
     print('f(1/x) = ',1/((1/xprime)**k))
     print('')

print('')
print('et avec un complexe en exposant, ce complexe n etant pas un zero, est-ce-que
cela marche, on le prend de partie imaginaire plus petite que 1.  ')
print('on prend comme exposant k = 0.24565 + 0.725689575 i et on calcule les termes
correspondant aux entiers de 1 a 4.')
k=0.24565+0.725689575*1j
for x in range(1,5):
     xprime = -x*1j
     print('x = ',xprime)
     print('f(x) = ',1/(xprime**k))
     print('(f(x).real) fois x = ',xprime*((1/(xprime**k)).real))
     print('(f(x).imag) fois x = ',xprime*((1/(xprime**k)).imag))
     print('f(1/x) = ',1/((1/xprime)**k))
     print('')
```

Voici le résultat du programme. On voit qu'en multipliant la partie réelle et la partie imaginaire de l'image de x par x, on obtient la partie réelle et la partie imaginaire de l'image de $\frac{1}{x}$, et ce lorsque l'exposant de la puissance de x calculée au dénominateur est de partie réelle $\frac{1}{2}$, mais que cela ne soit pas le cas lorsque l'exposant choisi n'est pas de partie réelle $\frac{1}{2}$.

```
On note f(x) = 1/(x^(0.5 + bi)).
aux parties imaginaires (variable b) entieres, que donne l inversion ?
x = 5
f(5) = (0.051727089275033826+0.44421200820681633j)
(x f(x)).real = 0.2586354463751691
(x f(x)).imag = 2.2210600410340815
f(1/5) = (0.2586354463751692-2.221060041034082j)

aux zeros non triviaux l inversion a aussi ce comportement (on teste avec le troisieme
et le quatrieme zero et pour les entiers de 1 a 4)
k = 3
k-ieme zero = (0.5 + 25.0108575801457j)
x = 1
f( 1 ) = (1.0 + 0.0j)
partie reelle fois 1 = 1.0
partie imaginaire fois 1 = 0.0
f( 1.0 ) = (1.0 + 0.0j)
```

```
x = 2
f( 2 ) = (0.0405979914536856 + 0.705940367941887j)
partie reelle fois 2 = 0.0811959829073712
partie imaginaire fois 2 = 1.41188073588377
f( 0.5 ) = (0.0811959829073712 - 1.41188073588377j)

x = 3
f( 3 ) = (-0.403443856705977 - 0.412996837541815j)
partie reelle fois 3 = -1.21033157011793
partie imaginaire fois 3 = -1.23899051262545
f( 0.3333333333333333 ) = (-1.21033157011793 + 1.23899051262544j)

x = 4
f( 4 ) = (-0.496703606179853 + 0.0573195220490328j)
partie reelle fois 4 = -1.98681442471941
partie imaginaire fois 4 = 0.229278088196131
f( 0.25 ) = (-1.98681442471941 - 0.229278088196131j)

tandis qu avec un complexe en exposant qui ne serait pas un zero, ce comportement n a
pas l air de se produire :  prenons d abord
un complexe de partie imaginaire plus grande que 1 :  k = 0.24565 + 7.25689575 i.
x = 1
f(x) = (1+0j)
(f(x).real) fois x = 1.0
(f(x).imag) fois x = 0.0
f(1/x) = (1+0j)

x = 2
f(x) = (0.2634808329349642+0.8012250856106742j)
(f(x).real) fois x = 0.5269616658699284
(f(x).imag) fois x = 1.6024501712213484
f(1/x) = (0.3703778996647515-1.1262908996512908j)

x = 3
f(x) = (-0.09028545013683882-0.7581184170019675j)
(f(x).real) fois x = -0.2708563504105165
(f(x).imag) fois x = -2.274355251005902
f(1/x) = (-0.1548914481122055+1.3006088940354603j)

x = 4
f(x) = (-0.5725394884877297+0.42221490585017685j)
(f(x).real) fois x = -2.290157953950919
(f(x).imag) fois x = 1.6888596234007074
f(1/x) = (-1.131351402077241-0.8343065156487368j)

puis avec un complexe en exposant, ce complexe n etant pas un zero, ce comportement n
a pas l air de se produire avec un complexe
de partie imaginaire plus petite que 1 :  k = 0.24565 + 0.725689575 i.
x = 1
f(x) = (1+0j)
(f(x).real) fois x = 1.0
(f(x).imag) fois x = 0.0
f(1/x) = (1+0j)
```

```
x = 2
f(x) = (0.7389641063024541-0.406590502511495j)
(f(x).real) fois x = 1.4779282126049083
(f(x).imag) fois x = -0.81318100502299
f(1/x) = (1.0387699574621443+0.5715487334177909j)

x = 3
f(x) = (0.5334218815666942-0.5462198211066936j)
(f(x).real) fois x = 1.6002656447000827
(f(x).imag) fois x = -1.638659463320081
f(1/x) = (0.9151251676253258+0.9370809909080206j)

x = 4
f(x) = (0.3807521136708347-0.6009115746389452j)
(f(x).real) fois x = 1.523008454683339
(f(x).imag) fois x = -2.4036462985557807
f(1/x) = (0.7523750698544241+1.1874153069998825j)

Refaisons les memes tests mais en multipliant les memes nombres x par -i
x = -5 i
f(-5 i) = (-0.0024931215072299113+0.0031502775535258124j)
(f(x).real) fois x = 0.012465607536149557j
(f(x).imag) fois x = -0.015751387767629063j
f(1/(-5*1j)) = (-154.46941829967753-195.1856497023865j)

tandis qu aux zeros non triviaux, a nouveau, l inversion n a pas ce comportement,
pourquoi ?
(tests pour le troisieme et le quatrieme zero et les entiers de 1 a 4)
3 ::::
(0.5 + 25.0108575801457j)
x = (-0-1j)
f(x) = (6.12877483831982e-18 + 6.12877483831982e-18j)
(f(x).real) fois x = (0.0 - 6.12877483831982e-18j)
(f(x).imag) fois x = (0.0 - 6.12877483831982e-18j)
f(1/x) = (8.15823738333114e+16 - 8.15823738333114e+16j)

x = (-0-2j)
f(x) = (-4.0777336158888e-18 + 4.57536551290414e-18j)
(f(x).real) fois x = (0.0 + 8.1554672317776e-18j)
(f(x).imag) fois x = (0.0 - 9.15073102580828e-18j)
f(1/x) = (-1.08560420971608e+17 - 1.21808743034233e+17j)

x = (-0-3j)
f(x) = (5.85480685776386e-20 - 5.00378118388623e-18j)
(f(x).real) fois x = (0.0 - 1.75644205732916e-19j)
(f(x).imag) fois x = (0.0 + 1.50113435516587e-17j)
f(1/x) = (2.33806456131524e+15 + 1.99821509792555e+17j)

x = (-0-4j)
f(x) = (-3.39548300813643e-18 - 2.69288611917917e-18j)
(f(x).real) fois x = (0.0 + 1.35819320325457e-17j)
(f(x).imag) fois x = (0.0 + 1.07715444767167e-17j)
f(1/x) = (-1.80794087837878e+17 + 1.43383986431871e+17j)
```

```
et avec un complexe en exposant, ce complexe n etant pas, un zero, est-ce-que cela
marche, on le prend de partie imaginaire plus grande que 1.
on prend comme exposant k = 0.24565 + 7.25689575 i et on calcule les termes
correspondant aux entiers de 1 a 4.
x = (-0-1j)
f(x) = (1.0381597687163496e-05+4.217323869240799e-06j)
(f(x).real) fois x = -1.0381597687163496e-05j
(f(x).imag) fois x = -4.217323869240799e-06j
f(1/x) = (82680.13145845963-33587.20906155622j)

x = (-0-2j)
f(x) = (-6.43673672370867e-07+9.429180501497222e-06j)
(f(x).real) fois x = 1.287347344741734e-06j
(f(x).imag) fois x = -1.8858361002994443e-05j
f(1/x) = (-7206.074477126351-105561.83959145554j)

x = (-0-3j)
f(x) = (2.2599236754083294e-06-8.251243388450916e-06j)
(f(x).real) fois x = -6.7797710262249885e-06j
(f(x).imag) fois x = 2.475373016535275e-05j
f(1/x) = (30877.377539580117+112736.88578448542j)

x = (-0-4j)
f(x) = (-7.724491629885193e-06+1.9686808391779328e-06j)
(f(x).real) fois x = 3.089796651954077e-05j
(f(x).imag) fois x = -7.874723356711731e-06j
f(1/x) = (-121562.31001197151-30981.636326833974j)

et avec un complexe en exposant, ce complexe n etant pas un zero, est-ce-que cela
marche, on le prend de partie imaginaire plus petite que 1.
```

on prend comme exposant k = 0.24565 + 0.725689575 i et on calcule les termes correspondant aux entiers de 1 a 4.

```
x = (-0-1j)
f(x) = (0.29633014156220444+0.12037840579499894j)
(f(x).real) fois x = -0.29633014156220444j
(f(x).imag) fois x = -0.12037840579499894j
f(1/x) = (2.8966066597155-1.1766905994560581j)

x = (-0-2j)
f(x) = (0.26792205473371544-0.03152970011066358j)
(f(x).real) fois x = -0.5358441094674309j
(f(x).imag) fois x = 0.06305940022132717j
f(1/x) = (3.681443998440965+0.4332410236268577j)

x = (-0-3j)
f(x) = (0.2238220529554892-0.09764892119346115j)
(f(x).real) fois x = -0.6714661588664677j
(f(x).imag) fois x = 0.29294676358038346j
f(1/x) = (3.753412047947218+1.6375358568866025j)

x = (-0-4j)
f(x) = (0.18516510512298576-0.13223387953235452j)
(f(x).real) fois x = -0.740660420491943j
(f(x).imag) fois x = 0.5289355181294181j
f(1/x) = (3.5765550673412307+2.5541624141411896j)
```