Raison de la curiosité pour l'équation de Chazy (Denise Vella-Chemla, juillet 2022)

J'aimerais comprendre cette équation pour la raison suivante : au début de mes recherches, j'ai été fascinée par l'article d'Euler *Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs*, un des rares articles qu'Euler ait écrit en français.

Un nombre premier se distingue d'un nombre composé par le fait que sa somme des diviseurs est le nombre qui le suit ($\sigma(p) = p + 1$ si et seulement si p est un nombre premier).

Je voyais donc initialement au-dessus de mon maillage[1] une surface bosselée dont les minimums locaux sur des diagonales descendantes seraient comme des "trous Goldbach" qui minimiseraient la fonction $\sigma(p) + \sigma(n - p)$.

J'avais demandé à Jean-François Colonna de dessiner une telle surface mais le résultat n'a pas été probant[2].

J'ai programmé la récurrence fournie par Euler mais les conditions de calcul dans le cas limite était un peu bizarres, puis j'ai trouvé cette récurrence très simple sur la toile :

$$\begin{cases} \sigma(1) = 1 \\ \sigma(n) = \dfrac{12}{n^3 - n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (-5k^2 + 5kn - n^2)\sigma(k)\sigma(n-k). \end{cases}$$

On peut remplacer le $-5k^2 + 5kn - n^2$ par $k(3n - 5k)$ et ça semble fonctionner aussi.

En fait, le lien avec l'équation de Chazy est établi par un passage par la série $E_2(t)$ d'Eisenstein

$$y(t) = i\pi E_2(t) = i\pi \left(1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) q^n\right)$$

avec $q = e^{2\pi i t}$ et la fonction y qui vérifie l'équation de Chazy $y''' - 2yy'' + 3y'^2 = 0$.

C'est pour cette raison que j'ai traduit le texte de Clarkson et Olver : je suis bloquée par l'anglais *et* par la technique mathématique. Lire le texte en français atténue un peu l'une des deux difficultés (si ce n'est qu'il ne faudrait pas que des erreurs de traduction annule tout le bénéfice acquis par ladite traduction).

Le but idéal serait de trouver une expression toute simple pour distinguer les nombres premiers des nombres composés.

[1] Voir http://denise.vella.chemla.free.fr/treillisnp.html.

[2] Voir https://images.math.cnrs.fr/spip.php?page=imageid$_document = 19562 lang = es$ et http://denisevellachemla.eu/extraits-Colonna.pdf.