Je voudrais expliquer ici ce que j'entends par chercher le b minimum des $ax+b$ et montrer qu'il est toujours inférieur à la moitié du pair dont on cherche une décomposition de Goldbach.

Je suis désolée d'être contrainte de toujours passer par l'étude d'un exemple pour m'expliquer mais je crois que tout ça est généralisable (enfin, si ce n'est qu'on a pas grand chose comme formule, en matière de nombres premiers).
J'utilise intensivement le théorème des restes chinois pour la recherche des solutions.

On cherche les décomposants de Goldbach de nombres qui sont congrus à 0 (mod 2), 2 (3), 3 (5) et 3 (7) (*je n'ai pas réécrit mod à chaque fois dans les parenthèses*).
Voilà comment on applique le chinois : on calcule les différentes fractions de 210 (=2x3x5x7) par 2, puis par 3, puis par 5, puis par 7.
On obtient les nombres 105, 70, 42 et 30. On cherche quels sont les multiples de ces nombres qui soient congrus à 1, d'abord mod 2, puis mod 3, puis mod 5, puis mod 7.
105 est directement congru à 1 mod 2.
70 est directement congru à 1 mod 3.
42 n'est pas directement congru à 1 mod 5, c'est son multiple 126 qui l'est.
30 n'est pas directement congru à 1 mod 7, c'est son multiple 120 qui l'est.

On fait le produit scalaire de ce vecteur de quatre entiers (105 70 42 30) par le vecteur des 4 restes modulaires sur lesquels on s'est fixé (0 2 3 3). On obtient 878, qui est en fait un représentant de tous les entiers de la forme 210k+38 (*à la fin de cette note, je fournirai les décomposants de Goldbach des plus petits nombres de cette forme, soit des nombres 248, 458, 668, 878, 1088, 1298, 1508, 1718, 1928 et 2138*).

On cherche donc des décomposants de Goldbach de nombres de la forme 210k+38.

Les décomposants de Goldbach possibles sont congrus à 1 (mod 2), à 1 (mod 3), à 1, 2 ou 4 (mod 5) et à 1,2,4,5 ou 6 (mod 7).

Premier cas : 1 (2) 1 (3) 1 (5) 1 (7)
combinaison linéaire correspondante :
1x105+1x70+1x126+1x120 = 421 (210) = 1 (210)
Les nombres solutions sont 1, 211, 421,...

Deuxième cas : 1 (2) 1 (3) 1 (5) 2 (7)
combinaison linéaire correspondante :
1x105+1x70+1x126+2x120 = 541 (210) = 121 (210)
Plus petite solution : 121

Troisième cas : 1 (2) 1 (3) 1 (5) 4 (7)
combinaison linéaire correspondante :
1x105+1x70+1x126+4x120 = 781 (210) = 151 (210)

Quatrième cas : 1 (2) 1 (3) 1 (5) 5 (7)
combinaison linéaire correspondante :
1x105+1x70+1x126+5x120 = 901 (210) = 61 (210)

Cinquième cas : 1 (2) 1 (3) 1 (5) 6 (7)
combinaison linéaire correspondante :
1x105+1x70+1x126+6x120 = 1021 (210) = 181 (210)

Sixième cas : 1 (2) 1 (3) 2 (5) 1 (7)
combinaison linéaire correspondante :
1x105+1x70+2x126+1x120 = 547 (210) = 127 (210)

Septième cas : 1 (2) 1 (3) 2 (5) 2 (7)
combinaison linéaire correspondante :
1x105+1x70+2x126+2x120 = 667 (210) = 37 (210)

Huitième cas : 1 (2) 1 (3) 2 (5) 4 (7)
combinaison linéaire correspondante :
1x105+1x70+2x126+4x120 = 907 (210) = 67 (210)

Neuvième cas : 1 (2) 1 (3) 2 (5) 5 (7)
combinaison linéaire correspondante :
1x105+1x70+2x126+5x120 = 1027 (210) = 187 (210)

Dixième cas : 1 (2) 1 (3) 2 (5) 6 (7)
combinaison linéaire correspondante :
1x105+1x70+2x126+6x120 = 1147 (210) = 97 (210)

Onzième cas : 1 (2) 1 (3) 4 (5) 1 (7)
combinaison linéaire correspondante :
1x105+1x70+1x126+1x120 = 799 (210) = 169 (210)

Douzième cas : 1 (2) 1 (3) 4 (5) 2 (7)
combinaison linéaire correspondante :
1x105+1x70+1x126+1x120 = 919 (210) = 79 (210)

Treizième cas : 1 (2) 1 (3) 4 (5) 4 (7)
combinaison linéaire correspondante :
1x105+1x70+1x126+1x120 = 1159 (210) = 109 (210)

Quatorzième cas : 1 (2) 1 (3) 4 (5) 5 (7)
combinaison linéaire correspondante :
1x105+1x70+1x126+1x120 = 1279 (210) = 19 (210)

Quinzième cas : 1 (2) 1 (3) 4 (5) 6 (7)
combinaison linéaire correspondante :
1x105+1x70+1x126+1x120 = 1399 (210) = 139 (210)

Si on remet les solutions minimales dans l'ordre croissant (ce que j'avais appelé les b du $ax + b$ avec ici a qui vaut tout le temps 210), on obtient la suite

de nombres suivante (on laisse de côté 1) :
19, 37, 61, 67, 79, 97, 109, 121, 127, 139, 161, 169, 181, 187, puis (en recommençant à partir de 210), 229, 247, 271, etc.
Si on calcule les écarts entre ces nombres successifs, on obtient 18, 18, 24, 6, 12, 18, 12, 12, 6, 12, 12, 18, 12, 6. On constate (et on conjecture du même coup, mais c'est peut-être trivialement démontrable parce que tous les nombres qu'on a choisi était tous congru à 1 (mod 2) et à 1 (mod 3)), on constate donc que tous ces écarts sont divisibles par 6.
Dans cette suite de nombres, les seuls dont on soit sûr qu'ils sont premiers sont les nombres inférieurs à 120 ($= 11^2 - 1$), en l'occurrence les nombres 19, 37, 61, 67, 79, 97 et 109 (remarque : d'ailleurs, le premier nombre ensuite 121 est composé, 121 est le carré de 11).

A cause du "rouleau" autour de 210, et des combinaisons linéaires qui font intervenir des multiples de produits de nombres premiers qui soient congrus à 1 modulo les nombres premiers considérés, je n'arrive pas à raisonner comme il faut, et donc à prouver que le plus petit des nombres premiers trouvés est forcément (!) inférieur à la moitié du nombre pair que l'on cherche à décomposer.

J'espère que mon explication aura été suffisamment claire...

Voici les décomposants de Goldbach des 210k+38 ; en font systématiquement partie des nombres de la suite bizarre qu'on a identifiée par le chinois.

248 = 7 + 241 = 19 + 229 = 37 + 211 = 67 + 181 = 97 + 151 = 109 + 139

458 = 19 + 439 = 37 + 421 = 61 + 397 = 79 + 379 = 109 + 349 = 127 + 331 = 151 + 307 = 181 + 277 = 229 + 229

668 = 7 + 661 = 37 + 631 = 61 + 607 = 67 + 601 = 97 + 571 = 127 + 541 = 181 + 487 = 211 + 457 = 229 + 439 = 271 + 397 = 331 + 337

878 = 19 + 859 = 67 + 811 = 109 + 769 = 127 + 751 = 139 + 739 = 151 + 727 = 271 + 607 = 277 + 601 = 307 + 571 = 331 + 547 = 337 + 541 = 379 + 499 = 421 + 457 = 439 + 439

1088 = 19 + 1069 = 37 + 1051 = 67 + 1021 = 79 + 1009 = 97 + 991 = 151 + 937 = 181 + 907 = 211 + 877 = 229 + 859 = 277 + 811 = 331 + 757 = 337 + 751 = 349 + 739 = 379 + 709 = 397 + 691 = 457 + 631 = 487 + 601 = 541 + 547

1298 = 7 + 1291 = 19 + 1279 = 61 + 1237 = 67 + 1231 = 97 + 1201 = 127 + 1171 = 181 + 1117 = 211 + 1087 = 229 + 1069 = 277 + 1021 = 307 + 991 = 331 + 967 = 379 + 919 = 421 + 877 = 439 + 859 = 487 + 811 = 541 + 757 = 547 + 751 = 571 + 727 = 607 + 691

1508 = 19 + 1489 = 37 + 1471 = 61 + 1447 = 79 + 1429 = 109 + 1399 = 127 + 1381 = 181 + 1327 = 211 + 1297 = 229 + 1279 = 271 + 1237 = 277 + 1231 = 307 + 1201 = 337 + 1171 = 379 + 1129 = 421 + 1087 = 439 + 1069 = 457 + 1051 = 487 + 1021 = 499 + 1009 = 541 + 967 = 571 + 937 = 601 + 907 = 631 + 877 = 739 + 769 = 751 + 757

$1718 = 19 + 1699 = 61 + 1657 = 97 + 1621 = 109 + 1609 = 139 + 1579 = 151 + 1567 = 229 + 1489 = 271 + 1447 = 337 + 1381 = 397 + 1321 = 421 + 1297 = 439 + 1279 = 487 + 1231 = 547 + 1171 = 601 + 1117 = 631 + 1087 = 709 + 1009 = 727 + 991 = 751 + 967 = 811 + 907 = 859 + 859$

$1928 = 61 + 1867 = 67 + 1861 = 97 + 1831 = 127 + 1801 = 139 + 1789 = 151 + 1777 = 181 + 1747 = 229 + 1699 = 271 + 1657 = 307 + 1621 = 331 + 1597 = 349 + 1579 = 379 + 1549 = 397 + 1531 = 439 + 1489 = 457 + 1471 = 499 + 1429 = 547 + 1381 = 601 + 1327 = 607 + 1321 = 631 + 1297 = 691 + 1237 = 727 + 1201 = 757 + 1171 = 811 + 1117 = 859 + 1069 = 877 + 1051 = 907 + 1021 = 919 + 1009 = 937 + 991$

$2138 = 7 + 2131 = 109 + 2029 = 127 + 2011 = 139 + 1999 = 151 + 1987 = 271 + 1867 = 277 + 1861 = 307 + 1831 = 337 + 1801 = 349 + 1789 = 379 + 1759 = 397 + 1741 = 439 + 1699 = 541 + 1597 = 571 + 1567 = 607 + 1531 = 691 + 1447 = 709 + 1429 = 739 + 1399 = 757 + 1381 = 811 + 1327 = 859 + 1279 = 907 + 1231 = 937 + 1201 = 967 + 1171 = 1009 + 1129 = 1021 + 1117 = 1051 + 1087 = 1069 + 1069$