

Explication de texte (J.C., septembre 2026)

Les décompositions d'un entier pair $n > 4$ en somme de deux impairs > 1 peuvent être disposées selon un tableau à r lignes et deux colonnes, dont la première contient les entiers impairs dans l'intervalle $[3, n/2]$, et la seconde ceux dans l'intervalle $[n/2, n - 3]$.

Par exemple, pour $n = 18$, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} 3 & + & 15, \\ 5 & + & 13, \\ 7 & + & 11, \\ 9 & + & 9. \end{array}$$

Tout entier impair étant de la forme $2k + 1$, ceux dans l'intervalle $[3, n/2]$ vérifient

$$\begin{aligned} 3 \leq 2k + 1 \leq n/2 &\iff 1 \leq k \leq \frac{n/2 - 1}{2} \\ &\iff 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n/2 - 1}{2} \right\rfloor \end{aligned}$$

de sorte que le nombre de lignes dans le tableau est $r = \left\lfloor \frac{n/2 - 1}{2} \right\rfloor$.

Une ligne contenant deux nombres premiers est appelée décomposition de Goldbach. C'est le cas des lignes 2 et 3 dans l'exemple.

La conjecture de Goldbach est invalidée s'il existe un entier $n/2 > 2$ dont le tableau ne contient aucune décomposition de Goldbach.

Approche combinatoire

On désigne par p le nombre de nombres premiers dans la première colonne et par q celui dans la seconde.

Dans l'exemple, $p = |\{3, 5, 7\}| = 3$ et $q = |\{11, 13\}| = 2$.

Dans *A combinatorial approach to Goldbach's conjecture*¹, les auteurs proposent d'évaluer la probabilité que la conjecture soit fausse pour un entier n fixé, notée $P(\neg G(n))$ ci-dessous.

Pour cela, ils construisent un modèle probabiliste du tableau des décompositions de n , en supposant que :

- p nombres premiers sont choisis parmi r dans la première colonne,,
- q nombres premiers sont choisis parmi r dans la seconde colonne,

1. <https://www.cambridge.org/core/journals/mathematical-gazette/article/abs/672-a-combinatorial-approach-to-goldbachs-conjecture/F2BC6DF48132292370FB376DB950964C>.

- et ce, de manière totalement indépendante. En particulier, la contrainte arithmétique sur la somme est ignorée.

Nombre total de configurations

Comme il y a,

- $\binom{r}{p}$ façons de placer les p nombres premiers dans les r cases de la première colonne,
- $\binom{r}{q}$ façons de placer les q nombres premiers dans les r cases de la seconde colonne,

le nombre total de façons de répartir les nombres premiers dans ce tableau, sans contrainte sur les colonnes, est le produit des deux :

$$\binom{r}{p} \binom{r}{q}$$

Configurations invalidant Goldbach

Comme il y a,

- $\binom{r}{p}$ façons de placer les p nombres premiers dans les r cases de la première colonne,
- $\binom{r-p}{q}$ façons de placer les q nombres premiers dans les $r-p$ cases disponibles de la seconde colonne (sans nombre premier adjacent),

le nombre de configurations invalidant Goldbach est :

$$\binom{r}{p} \binom{r-p}{q}$$

Probabilité d'invalider Goldbach

La probabilité d'invalider la conjecture de Goldbach $G(n)$ est le rapport des cas favorables (à l'invalidation) sur le nombre total de cas :

$$\begin{aligned} P(\neg G(n)) &= \frac{\binom{r}{p} \binom{r-p}{q}}{\binom{r}{p} \binom{r}{q}} = \frac{\binom{r-p}{q}}{\binom{r}{q}} \\ &= \frac{(r-p)! (r-q)!}{r! (r-p-q)!}. \end{aligned}$$

Approximation asymptotique

Pour les grands nombres, il y a approximativement autant de nombres premiers dans l'intervalle $[1, n]$ que dans l'intervalle $[n, 2n]$, car $\pi(2n) - \pi(n) \approx \pi(n)$ ².

Ici, π désigne la fonction de comptage des nombres premiers³.

On a alors, $p \approx q$, d'où

$$\begin{aligned} P(\neg G(n)) &\approx \frac{(r-p)! (r-p)!}{r! (r-2p)!} \\ &= \left(\frac{(r-p)!}{r!} \right) \left(\frac{(r-p)!}{(r-2p)!} \right) \\ &= \left(\frac{1}{r(r-1) \cdots (r-p+1)} \right) \left(\frac{(r-p)(r-p-1) \cdots (r-2p+1)}{1} \right) \\ &= \left(\frac{r-p}{r} \right) \left(\frac{r-p-1}{r-1} \right) \cdots \left(\frac{r-2p+1}{r-p+1} \right) \\ &= \prod_{0 \leq k < p} \left(\frac{r-k-p}{r-k} \right) \\ &= \prod_{0 \leq k < p} \left(1 - \frac{p}{r-k} \right). \end{aligned}$$

En fait, $p = \pi(n) \approx \frac{n}{\ln n}$ ⁴.

Donc, pour n grand et tout k entier,

$$0 \leq k < p \implies 0 \leq k < \frac{n}{\ln n} \implies 0 \leq \frac{k}{r} < \frac{\frac{n}{\ln n}}{\frac{n}{2}} \implies 0 \leq \frac{k}{r} < \frac{2}{\ln n}.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{r} \right) = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{k}{r} \right) = 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r-k}{r} \right) = 1,$$

2. Voir Hardy et Wright :

https://blngcc.wordpress.com/wp-content/uploads/2008/11/hardy-wright-theory_of_numbers.pdf,
section 22.19. *Primes in an interval*.

3. https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_de_compte_des_nombres_premiers

4. Voir Hardy et Wright,

https://blngcc.wordpress.com/wp-content/uploads/2008/11/hardy-wright-theory_of_numbers.pdf,
section 1.8. *Statement of the prime number theorem*

c'est-à-dire que, pour n grand, $r - k \approx r$.

Cette approche combinatoire permet donc d'estimer la probabilité d'invalider la conjecture de Goldbach par

$$P(\neg G(n)) \approx \prod_{0 \leq k < p} \left(1 - \frac{p}{r}\right) = \left(1 - \frac{p}{r}\right)^p.$$

Application numérique

```
import pandas as pd
from sympy import primepi
from decimal import Decimal, getcontext

# Augmentation de la precision pour eviter d'arrondir a 0 (underflow)
getcontext().Emin = -999999
getcontext().prec = 10

data = []
for n in [9, 10, 100, 1_000, 10_000, 100_000, 500_000, 1_000_000]:
    r = (n - 1) // 2
    p = int(primepi(n))
    # Utilisation de Decimal pour les calculs de tres petits nombres
    G = (Decimal(1) - Decimal(p) / Decimal(r)) ** Decimal(p)
    data.append({'n': n, 'r': r, 'p': p, 'P( G (n))': G})

df = pd.DataFrame(data)

# Formatage : espaces pour les milliers, et notation scientifique
# avec 6 decimales pour la probabilite
display(df.style
        .format(subset=['n', 'r', 'p'], thousands=" ")
        .format(subset=['P( G (n))'], formatter="{:.6e}"))
```

0	9	4	4	$0.000000 \cdot 10^{+6}$
1	10	4	4	$0.000000 \cdot 10^{+6}$
2	100	49	25	$1.779832 \cdot 10^{-8}$
3	1000	499	168	$1.122564 \cdot 10^{-30}$
4	10000	4999	1229	$2.489685 \cdot 10^{-151}$
5	100000	49999	9592	$4.952388 \cdot 10^{-888}$
6	500000	249999	41538	$1.238563 \cdot 10^{-3278}$
7	1000000	499999	78498	$5.781171 \cdot 10^{-5823}$