Minoration du nombre de décomposants de Goldbach d'un nombre pair

Denise Vella-Chemla

2.11.2021

1. Caractérisation des décomposants de Goldbach de n supérieurs à $\sqrt{n}$ [1]

Soit $n \in 2\mathbb{N}+6$ un entier pair supérieur à 6. Pour tout $p \in \mathbb{P}^*$ premier impair inférieur à $\sqrt{n}$ (*i.e.* $3 \leq p \leq \sqrt{n}$), on définit l'ensemble :

$$F_n(p) = \{m \in 2\mathbb{N}+1 : 3 \leq m \leq n/2,\ m \not\equiv 0\ [p],\ m \not\equiv n\ [p]\}$$

L'intersection des ensembles $F_n(p)$ pour tout p premier compris entre 3 et $\sqrt{n}$ est notée :

$$D_n = \bigcap_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ 3 \leq p \leq \sqrt{n}}} F_n(p)$$

Nous allons montrer que D_n et son complémentaire $n - D_n$ ne contiennent que des nombres premiers.

Lemme 1 : Soit $m \in 2\mathbb{N}+1$ un entier impair. Si m n'est divisible par aucun nombre premier compris entre 3 et $\sqrt{m}$, alors il est premier.

Démonstration : Si m est composé, on a $m = pq$, où p est le plus petit nombre premier intervenant dans la factorisation de m en nombres premiers et où q est le produit de tous les autres facteurs. Puisque m est impair, $p \geq 3$, et puisque $q \geq p$ (q étant le produit d'entiers $\geq p$), $m = pq \geq pp = p^2$ et donc $\sqrt{m} \geq p$ (la fonction racine carrée étant croissante). On a ainsi montré que si m impair est composé, il est divisible par un premier compris entre 3 et $\sqrt{m}$. Le lemme s'obtient par contraposition. □

Lemme 2 : $D_n \subseteq \mathbb{P}$

Démonstration : Soit $m \in D_n$. Alors $m \in F_n(p)$ pour tout p premier compris entre 3 et $\sqrt{n}$. Par conséquent, m est impair et m n'est divisible par aucun nombre premier p compris entre 3 et $\sqrt{n}$ (puisque $m \not\equiv 0\ [p]$), et donc *a fortiori* par aucun premier compris entre 3 et $\sqrt{m}$ (car $m \leq n/2 \implies m \leq n \implies \sqrt{m} \leq \sqrt{n}$). D'après le lemme 1, m est donc premier. □

Lemme 3 : $n - D_n \subseteq \mathbb{P}$

Démonstration : Soit $m \in D_n$. Alors $m \in F_n(p)$ pour tout p premier compris entre 3 et $\sqrt{n}$. Par conséquent, $n - m$ est impair (car m est impair et n pair) et $n - m$ n'est divisible par aucun nombre premier p compris entre 3 et $\sqrt{n}$ (puisque $m \not\equiv n\ [p]$), et donc *a fortiori* par aucun premier compris entre 3 et $\sqrt{n-m}$ (car $n - m \leq n \implies \sqrt{n-m} \leq \sqrt{n}$). D'après le lemme 1, $n - m$ est donc premier. □

Les ensembles D_n ne contiennent que des décomposants de Goldbach de n.

Lemme 4 : Soit $n \in 2\mathbb{N}+6$. Si $D_n \neq \varnothing$, alors n vérifie la conjecture de Goldbach.

Démonstration : Si $D_n \neq \varnothing$, il contient un entier p nécessairement premier (d'après le lemme 1), tel que $q = n - p$ est également premier (d'après le lemme 2), et donc $n = p + q$ vérifie la conjecture de Goldbach.

1. Leila Schneps d'abord, Jacques Chemla ensuite, ont réécrit cette partie.

2. Utilisation de la formule d'un article de Rosser et Schoenfeld pour minorer le nombre de décomposants de Goldbach.

On utilise l'égalité (2.6) de l'article [1], en prenant $\alpha = 2$, pour minorer le nombre de décompositions de Goldbach.

$$\prod_{2\,<\,p\,\leq\,x} \left(1 - \frac{2}{p}\right) = \exp\left\{ \sum_{2\,<\,p\,\leq\,x} \log\,\left(1 - \frac{2}{p}\right)\right\} \tag{2.6}$$

Quelques valeurs obtenues par cette minoration sont fournies dans le tableau ci-après, en sommant jusqu'à $n/2$ ($G(n)$ est le nombre de décomposants de Goldbach effectifs de n tandis que $HVP(n)$ est obtenu par la formule 2.6 (dont la référence de la démonstration par Hadamard et de la Vallée-Poussin serait à trouver) :

$$HVP(n) = \exp\left\{ \sum_{2\,<\,p\,\leq\,n/2} \log\,\left(1 - \frac{2}{p}\right)\right\}.$$

n	$G(n)$	$HVP(n)$
10^3	28	21.21
10^4	127	114.38
10^5	810	710.53
10^6	5402	4833.06
10^7	38807	34983.7

Il s'avère par programme que l'inégalité n'est vérifiée systématiquement que pour les pairs divisibles par 3 (les multiples de 6) supérieurs à 18 jusqu'à 10^7.

Référence

[1] J.B. Rosser, L. Schoenfeld *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, Illinois J. Math. 6(1) : 64-94 (March 1962).