Entrechocs, entrelacs (Denise Vella-Chemla, 3.4.2016)

L'idée de cette note est de voir les nombres comme des particules.

On a une chaîne de booléens de primalité, sur laquelle on va effectuer des traitements, avec en tête des notions telles que le passage du temps ou le changement d'état.

La séquence de booléens qui code la primalité des entiers, commence pour les impairs de 3 à 49 par[1] :

$$0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ \dots$$

On la concatène à elle-même et on choisit de la décaler à droite ainsi :

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccc}
0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&1&1&0&0&1&1&0&1&0&0&1&\dots\\
&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&1&1&0&0&1&1&0&1&0&0&\dots
\end{array}$$

On code alors par des lettres les doublons de booléens obtenus aux positions successives :

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccc}
0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&1&1&0&0&1&1&0&1&0&0&1&\dots\\
&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&1&1&0&0&1&1&0&1&0&0&\dots\\
&a&a&c&b&a&c&b&a&c&b&c&d&b&a&c&d&b&c&b&a&c&\dots
\end{array}$$

Puis on réitère, en considérant les doublons de booléens contenant un booléen de la chaîne décalée courante et le booléen à la même position de la chaîne initiale.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccc}
0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&1&1&0&0&1&1&0&1&0&0&1&\dots\\
&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&1&1&0&0&1&1&0&1&0&0&\dots\\
&a&a&c&b&a&c&b&a&c&b&c&d&b&a&c&d&b&c&b&a&c&\dots\\
&&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&1&1&0&0&1&1&0&1&0&\dots\\
&&a&c&a&b&c&a&b&c&a&d&c&b&b&c&c&b&d&a&b&c&\dots\\
&&&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&1&1&0&0&1&1&0&1&\dots\\
&&&c&a&a&d&a&a&d&a&c&d&a&b&d&c&a&d&b&a&d&\dots\\
&&&&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&1&1&0&0&1&1&0&\dots\\
&&&&a&a&c&b&a&c&b&c&c&b&a&d&d&a&c&b&b&c&\dots
\end{array}$$

Ce faisant, on comprend qu'on a étudié les doublons de booléens directement issus de la chaîne initiale, selon qu'ils étaient à telle ou telle distance (ce qu'on appelle le décalage) les uns des autres.

Si on considère que la chaîne initiale représente les états successifs d'une particule unique, on analyse en quelque sorte ce qui lui arrive lorsqu'elle passe de tel état e_i à tel état $e_{i+\Delta t}$. Une autre façon de voir est de considérer chaque entier comme une particule qui changerait d'état et qui aurait sa "ligne d'états" propre (représentée par une colonne ci-dessus).

Dans cette vision "multi-particules", on peut alors s'intéresser aux entrechocs ou collisions. Lorsque deux changements d'état ont lieu à proximité l'un de l'autre, ils ont pour conséquence un troisième changement d'état à l'instant immédiatement ultérieur (à proximité temporelle). On peut voir que ces liens entre changements d'état sont invariants. On les code par des règles.

$$\begin{array}{llll}
aa \to a & ba \to b & ca \to a & da \to b\\
ab \to a & bb \to b & cb \to a & db \to b\\
ac \to c & bc \to d & cc \to c & dc \to d\\
ad \to c & bd \to d & cd \to c & dd \to d
\end{array}$$

Les règles ci-dessus sont obtenues en ne faisant que des décalages ("shift" en informatique) de la chaîne initiale. Si on s'autorise comme action sur les séquences de booléens, en plus des translations selon un certain décalage, le fait d'inverser complètement une chaîne de booléens (en utilisant la chaîne obtenue par symétrie-miroir) alors les règles deviennent :

$$\begin{array}{llll}
aa \to a & ba \to a & ca \to c & da \to c\\
ab \to b & bb \to b & cb \to d & db \to d\\
ac \to a & bc \to a & cc \to c & dc \to c\\
ad \to b & bd \to b & cd \to d & dd \to d
\end{array}$$

[1] $3 \to 0,\ 5 \to 0,\ 7 \to 0,\ 9 \to 1,\ 11 \to 0,\ 13 \to 0,\ 15 \to 1,\ \dots$.

Ce sont ces règles-là qui nous ont permis de trouver l'explication qu'on cherchait au sujet de la conjecture de Goldbach, par de simples comptages d'occurrences de certaines lettres.

On a utilisé le mot "entrelacs" dans le titre car on observe bien la manière dont la symétrie-miroir a "entrelacé" les règles en intervertissant certaines lettres. Le mot "entrechocs" exprime lui le fait qu'on n'observe que les changements d'état proches, qui font penser à des collisions entre lettres. Mais il va sans dire que cette idée de collision provient du sens commun et qu'il n'y aurait, probabilistiquement parlant, pas lieu de s'intéresser à ces occurrences de lettres-là plutôt qu'à d'autres, qui seraient "temporellement" plus éloignées. Là aussi, le mot "temporellement" provient du sens commun. Il n'y a pas de temps ici, juste des lettres, données toutes d'un coup dans la globalité de notre champ de lettres, en n'ayant comme seule donnée initiale que la séquence des booléens de primalité. Dit plus brièvement, l'oracle sait "directement" si 145637807 est premier ou pas, puisqu'il a la connaissance de toutes les chaînes de causalité d'un coup.

Comment coder cela par des matrices, un peu à la manière de ce qui se fait en physique quantique ? Il faut trouver les probabilités des différents doublons de lettres : il y en a 16. On peut les coder dans une matrice de taille 4×4 ($p(xy)$ désigne la probabilité d'occurrence du doublon xy, on a vu qu'un doublon a toujours même conséquence, selon les règles invariantes de passage fournies plus haut) :

$$\begin{pmatrix} p(aa) & p(ab) & p(ac) & p(ad) \\ p(ba) & p(bb) & p(bc) & p(bd) \\ p(ca) & p(cb) & p(cc) & p(cd) \\ p(da) & p(db) & p(dc) & p(dd) \end{pmatrix}$$

Il faut garder à l'esprit qu'on pourrait augmenter l'information en calculant les probabilités d'occurrence d'une matrice de densité de "triplons" au lieu de doublons (*exemples de triplons* : $aaa, aab, aac, aad, aba, \ldots$). Cette matrice plus précise serait de taille $8 \times 8 = 64$, on remplacerait chacun des doublons (par exemple, le doublon aa) par une petite matrice 2×2 qui représenterait les probabilités d'occurrence des triplons aaa, aab, aac, aad.

Par programme, jusqu'à $13 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 = 30030$, on obtient la matrice des doublons :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 16\,585\,920 \\ 0 & 0 & 16\,585\,920 & 53\,308\,800 \\ 0 & 16\,591\,680 & 0 & 53\,308\,800 \\ 16\,585\,920 & 53\,227\,310 & 53\,290\,290 & 171\,300\,795 \end{pmatrix}$$

qu'on ramène à des proportions du nombre total de doublons :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.036793 \\ 0 & 0 & 0.036793 & 0.118258 \\ 0 & 0.036806 & 0 & 0.118258 \\ 0.036793 & 0.118077 & 0.118217 & 0.380005 \end{pmatrix}$$

La présence de 0 dans la matrice doit aisément s'expliquer : on a comptabilisé des disjonctions de critères de divisibilité satisfaits par des nombres séparés par les mêmes intervalles, selon des petits schémas comme celui-ci (représentant la transition ba, d'occurrence nulle dans la matrice) :

$$\begin{array}{ccc} b : x = 1 & \xrightarrow{+d} & y = 0 \\ \downarrow{\scriptstyle +1} & & \downarrow{\scriptstyle +1} \\ a : z = 0 & \xrightarrow{+d} & t = 0 \end{array}$$

Si par contre, on teste la primalité des entiers considérés, on obtient alors des matrices complètement remplies et symétriques (à erreurs près) comme celle-ci, calculée pour les entiers impairs inférieurs à 10000. Les totaux par ligne et par colonne sont proches.

$$\begin{pmatrix} 55611 & 290276 & 345326 & 1809753 \\ 290610 & 822809 & 1811656 & 5155669 \\ 344992 & 1809753 & 1134097 & 5994008 \\ 1809753 & 5155669 & 5994008 & 17161011 \end{pmatrix}$$

Plusieurs éléments ne sont pas satisfaisants : on devrait pouvoir ne fournir que les transitions d'un cran, les autres s'en déduisant par "fermeture" (élévation de la matrice à une certaine puissance). Mais on n'y arrive pas : la matrice qui code les transitions simples pour les impairs de 1 à 25 est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le cumul de ses deux premières colonnes fournit le nombre de nombres premiers jusqu'à 25.

On aurait aimé qu'une puissance de cette matrice nous amène à celle-ci, qui code les transitions jusqu'à 30 (le cumul des 2 premières colonnes fournit $\pi(30)$) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ou bien à celle-ci, qui code les transitions jusqu'à 50 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Mais bien-sûr, ça ne marche pas ; les puissances fournissent les transitions d'écart 4, puis d'écart 6, etc, sur la chaîne de booléens initiale mais ne permettent pas de l'étendre.