Sommes de 2 carrés (Denise Vella-Chemla, 24.4.2016)

Les nombres premiers de la forme $4n+1$ s'écrivent d'une unique manière comme somme de 2 carrés. Cela permet de les placer dans le plan complexe.

$$\begin{array}{rlcccccc}
5 = & (2+i)(2-i) & \text{est} & \text{placé} & \text{au} & \text{point} & (2,1). \\
13 = & (3+2i)(3-2i) & \text{``} & \text{``} & \text{``} & \text{``} & (3,2). \\
17 = & (4+i)(4-i) & \text{``} & \text{``} & \text{``} & \text{``} & (4,1). \\
29 = & (5+2i)(5-2i) & \text{``} & \text{``} & \text{``} & \text{``} & (5,2). \\
37 = & (6+i)(6-i) & \text{``} & \text{``} & \text{``} & \text{``} & (6,1). \\
41 = & (5+4i)(5-4i) & \text{``} & \text{``} & \text{``} & \text{``} & (5,4). \\
53 = & (7+2i)(7-2i) & \text{``} & \text{``} & \text{``} & \text{``} & (7,2). \\
61 = & (6+5i)(6-5i) & \text{``} & \text{``} & \text{``} & \text{``} & (6,5). \\
73 = & (8+3i)(8-3i) & \text{``} & \text{``} & \text{``} & \text{``} & (8,3). \\
89 = & (8+5i)(8-5i) & \text{``} & \text{``} & \text{``} & \text{``} & (8,5). \\
97 = & (9+4i)(9-4i) & \text{``} & \text{``} & \text{``} & \text{``} & (9,4).
\end{array}$$

13 se trouve à une distance valant $\sqrt{2}$ de 5.

En annexe, on fournit les coordonnées des nombres premiers de la forme $4n+1$ inférieurs à 1000 (sous la forme $a+ib$ avec $a \geqslant b$).

Il y a même possibilité de définir une division en utilisant des réseaux de mailles carrées (la longueur de la maille du réseau valant p, le nombre premier considéré comme module).

La loi de réciprocité quadratique exprime que p est congru à un carré modulo q si et seulement si q est congru à un carré modulo p dès que l'un seulement de p ou q est un nombre premier de la forme $4n+1$. Dans le cas où p et q sont tous les deux de la forme $4n+3$, il y a anti-réciprocité : p est congru à un carré modulo q si et seulement si q *n'est pas* congru à un carré modulo p.

On aimerait utiliser cette loi pour connaître un peu mieux l'ensemble des nombres premiers mais on ne sait pas comment "placer" les nombres premiers de la forme $4n+3$ dans le plan complexe d'une manière plus "équilibrée" que celle présentée dans l'article wikipedia consacré aux "entiers de Gauss". Les $4n+3$ sont tous placés sur l'axe des abscisses et n'ont qu'une coordonnée "valuée". On aimerait leur associer aussi 2 coordonnées, on ne sait encore comment, car cela nous permettrait, en attribuant un booléen de primalité à chacune desdites coordonnées, de revenir à un domaine plus familier.

On a pensé un tout petit temps utiliser le fait qu'un $4n+3$ est un $(4n+1)+2$. On a par exemple que $7 = 5+2 = ((2+i)(2-i)+\sqrt{2}i)((2+i)(2-i)-\sqrt{2}i)$ mais cette idée n'est pas bonne, de très nombreux $4n+1$ ne pouvant pas se mettre sous la forme unique d'une somme de deux carrés (comme par exemple 21 dont on souhaitait se servir pour "fabriquer" 23) et cette idée pose elle-aussi ce souci de la coordonnée "unique".

Les premiers $4n+3$, comme tous les impairs, sont des différences de 2 carrés, ou bien, comme tous les entiers, sont des sommes de 4 carrés, mais on sent bien que ce ne sont pas de bonnes idées non-plus. Il faudrait trouver un truc super-joli pour les $4n+3$, avec des quaternions ;-))

Annexe : Coordonnées des nombres premiers de la forme $4n + 1$

$5 = (2,1)$	$229 = (15,2)$	$509 = (22,5)$	$809 = (28,5)$	$1109 = (25,22)$
$13 = (3,2)$	$233 = (13,8)$	$521 = (20,11)$	$821 = (25,14)$	$1117 = (26,21)$
$17 = (4,1)$	$241 = (15,4)$	$541 = (21,10)$	$829 = (27,10)$	$1129 = (27,20)$
$29 = (5,2)$	$257 = (16,1)$	$557 = (19,14)$	$853 = (23,18)$	$1153 = (33,8)$
$37 = (6,1)$	$269 = (13,10)$	$569 = (20,13)$	$857 = (29,4)$	$1181 = (34,5)$
$41 = (5,4)$	$277 = (14,9)$	$577 = (24,1)$	$877 = (29,6)$	$1193 = (32,13)$
$53 = (7,2)$	$281 = (16,5)$	$593 = (23,8)$	$881 = (25,16)$	$1201 = (25,24)$
$61 = (6,5)$	$293 = (17,2)$	$601 = (24,5)$	$929 = (23,20)$	$1213 = (27,22)$
$73 = (8,3)$	$313 = (13,12)$	$613 = (18,17)$	$937 = (24,19)$	$1217 = (31,16)$
$89 = (8,5)$	$317 = (14,11)$	$617 = (19,16)$	$941 = (29,10)$	$1229 = (35,2)$
$97 = (9,4)$	$337 = (16,9)$	$641 = (25,4)$	$953 = (28,13)$	$1237 = (34,9)$
$101 = (10,1)$	$349 = (18,5)$	$653 = (22,13)$	$977 = (31,4)$	$1249 = (32,15)$
$109 = (10,3)$	$353 = (17,8)$	$661 = (25,6)$	$997 = (31,6)$	$1277 = (34,11)$
$113 = (8,7)$	$373 = (18,7)$	$673 = (23,12)$	$1009 = (28,15)$	$1289 = (35,8)$
$137 = (11,4)$	$389 = (17,10)$	$677 = (26,1)$	$1013 = (23,22)$	$1297 = (36,1)$
$149 = (10,7)$	$397 = (19,6)$	$701 = (26,5)$	$1021 = (30,11)$	$1301 = (26,25)$
$157 = (11,6)$	$401 = (20,1)$	$709 = (22,15)$	$1033 = (32,3)$	$1321 = (36,5)$
$173 = (13,2)$	$409 = (20,3)$	$733 = (27,2)$	$1049 = (32,5)$	$1361 = (31,20)$
$181 = (10,9)$	$421 = (15,14)$	$757 = (26,9)$	$1061 = (31,10)$	$1373 = (37,2)$
$193 = (12,7)$	$433 = (17,12)$	$761 = (20,19)$	$1069 = (30,13)$	$1381 = (34,15)$
$197 = (14,1)$	$449 = (20,7)$	$769 = (25,12)$	$1093 = (33,2)$	$1409 = (28,25)$
	$457 = (21,4)$	$773 = (22,17)$	$1097 = (29,16)$	$1429 = (30,23)$
	$461 = (19,10)$	$797 = (26,11)$		$1433 = (37,8)$