THÉORIE DES NOMBRES. - *Sur quelques théorèmes d'Arithmétique et un énoncé qui les contient.* **Note de M. Merlin**, transmise par M. H. Poincaré.

1. Suivant l'usage, je désigne par p_n le $n^{\text{ème}}$ des nombres premiers rangés par ordre de grandeur croissante, en posant $p_1 = 2$.

En cherchant s'il existait une infinité de valeurs de n telles que

$$p_{n+1} - p_n = 2,$$

j'ai été conduit à appliquer une méthode qui ramène à un même théorème différentes propositions.

Considérons le Tableau T des nombres entiers positifs ou négatifs. J'appelle $A(b, a)$ l'opération qui consiste à effacer dans le tableau T les nombres de a en a à partir de b, dans le sens des entiers croissants comme dans celui des entiers décroissants. Elle consiste donc à effacer dans T tous les nombres de la progression $ax + b$.

Considérons maintenant une progression $r_1 + p_1 x$ relative au nombre premier $p_1 = 2$, et, pour les nombres premiers autres que 2, simultanément deux progressions, telles que

$$r_i + p_i x, \qquad r'_i + p_i x.$$

Effectuons les opérations

$$A(r_1, p_1),$$

$$A(r_2, p_2), \qquad A(r'_2, p_2),$$

$$A(r_3, p_3), \qquad A(r'_3, p_3),$$

$$\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$

$$A(r_n, p_n), \qquad A(r'_n, p_n).$$

Il est aisé de voir que cela revient à construire sur T deux cribles d'Ératosthène jusqu'à p_n, en prenant respectivement pour origine de chacun d'eux deux nombres différant d'un nombre pair.

Le théorème dont je vais indiquer quelques applications est le suivant :

Dans tout intervalle de longueur $\nu p_n \log p_n$, ν désignant une constante indépendante de n, il y a au moins un nombre non effacé.

Je me suis servi, dans la démonstration, de la formule aujourd'hui classique

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} = \log\log p_n + \nu_1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\log p_n}\right),$$

ν_1 étant une certaine constante. Cependant les inégalités de Tchebicheff conduiraient sans doute à un résultat analogue, quoique moins précis.

2. Une première application de ce résultat peut être faite au théorème de Goldbach. Il s'agit de savoir si l'équation

$$x + y = 2a$$

admet des solutions en nombres premiers. Construisons les deux cribles d'Ératosthène effectués jusqu'au plus grand nombre premier inférieur à $\sqrt{2a}$, et qui ont respectivement pour origines 0 et $2a$. D'après ce que nous venons de voir, il y a entre 0 et $2a$ au moins un nombre non effacé, ce qui démontre le théorème. (On peut même ajouter qu'il existe des solutions pour lesquelles chacune des inconnues est supérieure à $\sqrt{2a}$.)

Toutefois il n'en est ainsi que pour des valeurs de $2a$ suffisamment grandes. Pour pouvoir énoncer le théorème dans toute sa généralité, il faut donc entreprendre une vérification numérique pour les premières valeurs de $2a$, vérification que je me propose d'effectuer.

Cherchons maintenant s'il existe une infinité de valeurs de n telles que

$$p_{n+1} - p_n = 2.$$

On peut appliquer la méthode précédente. On peut aussi transformer la question comme il suit. Faisons correspondre à chaque couple de nombres $6m - 1$, $6m + 1$, d'un Tableau T, le nombre m d'un second Tableau T ; construisons le crible d'Ératosthène sur le premier Tableau T, et cherchons s'il existe des valeurs de m du second qui correspondent à des nombres $6m - 1$, $6m + 1$, qui soient premiers. On trouve ainsi que si, quel que soit l à partir d'une certaine valeur, il y a entre l et $2l(3l + 1)$ au moins un nombre qui n'est d'aucune des formes

$$(I) \quad 6xy + \varepsilon x + \varepsilon' y \quad (x = 1, 2, \ldots, l;\ y = 1, 2, \ldots), \quad (\varepsilon = \pm 1,\ \varepsilon' = \pm 1),$$

il existe une infinité de valeurs de n telles que

$$p_{n+1} - p_n = 2.$$

Or en considérant un certain système de progressions qui contient l'ensemble des nombres (I), on est ramené à un cas particulier du théorème du n° 1.

Enfin on peut aussi ramener à ce théorème celui de Legendre-Dirichlet sur la progression arithmétique.

3. Voici, parmi d'autres, une extension de ces résultats.

Les applications du n° 2 sont des cas particuliers de l'étude des solutions en nombres premiers de l'équation de Diophante. L'emploi d'un double crible permet de l'aborder dans des cas étendus. En voici une application. Appelons nombre de seconde espèce tout nombre égal au produit de deux nombres premiers. Un nombre entier quelconque est, d'une infinité de façons, la différence de deux nombres de seconde espèce.