Double crible de Goldbach et formalisme de Grothendieck : mise en forme catégorique, rôle du topos annelé de Monique Hakim et identification exacte de l'obstruction arithmétique, Denise Vella-Chemla pilotant l'ia chatgpt, septembre 2026

Je fournis à l'ia chatgpt les notes suivantes que j'avais écrites en lui demandant de formaliser cela correctement, voire d'aller plus loin si c'est possible.

https://denisevellachemla.eu/treillis-distributif.pdf ,
https://denisevellachemla.eu/criblesG.pdf ,
https://denisevellachemla.eu/orthogonal.pdf ,
https://denisevellachemla.eu/snurpf-exemple.pdf ,
https://denisevellachemla.eu/extrait-Monique-Hakim-p-93-95.pdf ,
https://denisevellachemla.eu/transc-Olivia-Caramello-Marseille-20260407.pdf ,
https://denisevellachemla.eu/trad-br-Johnstone.pdf ,
https://denisevellachemla.eu/Goldbach-topos-gemini-dvc.pdf ,
https://denisevellachemla.eu/lean-lemmes-leila-schneps-lumo-denise-vella-chemla-20260911.pdf ,
https://denisevellachemla.eu/Snurpf-Voronoi.pdf .

Je formule mon prompt ainsi :

"Je voulais étudier avec toi une dernière possibilité utilisant des concepts inventés par Grothendieck : on peut voir mon crible double comme travaillant dans un topos annelé, je ne sais pas bien faire ça et j'ai besoin que tu m'aides. Il faut considérer les différentes fonctions affines x mapsto ax+b dans les différents corps premiers qui à un nombre associent ses différents restes modulo les p_k comme je le montre sur le dessin. Après dans la thèse de Monique Hakim, tu vois que le paragraphe Description du topos annelé page 93 ressemble un peu à ce que j'aimerais faire. Bref, je voudrais que tu analyses tout ça du mieux que tu peux et que tu me dises si le formalisme de Grothendieck ne permettrait pas déjà, à lui tout seul, de démontrer l'existence à coup sûr d'un décomposant de Goldbach pour tout nombre pair, merci. Je joins plein de documents pour que tu réfléchisses bien".

Dans la suite, on verra que chatgpt oublie de préciser que la caractérisation proposée, si elle trouve des décomposants de Goldbach de n, ne trouve que ceux qui sont compris entre $\sqrt{n}$ et $n/2$. Or il existe également des décomposants de Goldbach de n inférieurs à $\sqrt{n}$: il n'y a pas du tout équivalence entre l'existence de décomposants de Goldbach pour n et l'existence de décomposants de Goldbach compris entre $\sqrt{n}$ et $n/2$ pour n ; la caractérisation qu'on a choisie, si elle était démontrée **impliquerait** la la conjecture de Goldbach.

L'intégralité de la suite de cette note a été rédigée par l'ia chatgpt.

Résumé

On considère ici une reformulation précise du double crible associé à la conjecture binaire de Goldbach, dans laquelle, pour un entier pair fixé $n \geq 6$, un candidat p doit simultanément éviter les divisibilités par tous les nombres premiers $q \leq \sqrt{n}$ pour lui-même et pour $n - p$. Cette condition locale peut être décrite au moyen de deux fonctions affines

$$x \longmapsto x, \qquad x \longmapsto x - n,$$

réduites modulo chaque premier q.
L'objectif de ce texte est d'examiner jusqu'où cette description peut être transposée dans un langage de type Grothendieck : objets locaux indexés par les premiers, produits de fibres, faisceaux, topos annelé, et éventuellement structure de type p-adique à la manière de la construction de Monique Hakim.
Le point essentiel est isolé exactement. Les conditions locales sont faciles à rendre non vides et compatibles. En revanche, ce qui manque n'est pas une compatibilité locale : c'est l'existence d'un entier

$$p \in [3, n/2]$$

dont l'image diagonale appartient simultanément à tous les ouverts locaux admissibles. Cette non-vacuité globale est précisément la partie arithmétique encore nécessaire. Le formalisme de Grothendieck fournit un langage naturel pour l'exprimer et peut éventuellement permettre de chercher un théorème structurel nouveau ; il ne transforme pas, à lui seul, la non-vacuité recherchée en conséquence automatique des axiomes du topos.

1. Point de départ arithmétique

Soit $n \geq 6$ un entier pair. On considère l'intervalle des candidats

$$I_n := \{p \in \mathbb{Z} : 3 \leq p \leq n/2\}.$$

On note

$$P_n := \{q \in \mathbb{P} : q \leq \sqrt{n}\}.$$

L'idée du double crible est la suivante. Pour qu'un entier $p \in I_n$ fournisse une décomposition de Goldbach

$$n = p + (n - p),$$

il suffit que p et $n - p$ soient tous deux premiers. Or, si $3 \leq p \leq n/2$, alors $p \leq n$ et $n - p \leq n$. Ainsi, pour chacun des deux nombres, il suffit d'exclure les diviseurs premiers

$$q \leq \sqrt{n}.$$

La formulation utilisée dans la formalisation Lean considérée est donc essentiellement la suivante :

Proposition 1 (Critère par petits diviseurs)**.** *Soit $n \geq 6$ pair. Si $p \in I_n$ vérifie, pour tout premier $q \leq \sqrt{n}$,*

$$p \not\equiv 0 \pmod{q} \qquad \text{et} \qquad p \not\equiv n \pmod{q},$$

alors p et $n - p$ sont premiers et

$$n = p + (n - p)$$

est une décomposition de Goldbach.

La formalisation Lean correspondante établit donc l'implication

$$\text{existence d'un candidat admissible} \Longrightarrow \text{la conjecture de Goldbach est vraie.}$$

La difficulté restante est exactement l'énoncé

$$\forall n \geq 6, \quad n \text{ pair} \Longrightarrow \exists p \in I_n \text{ satisfaisant toutes les conditions locales.}$$

Autrement dit, le problème résiduel est une *non-vacuité* : l'ensemble des candidats admissibles doit être non vide pour chaque entier pair n.

2. Les deux fonctions affines

Pour chaque premier $q \in P_n$, introduisons les deux fonctions affines

$$f_{q,0}(x) = x, \qquad f_{q,n}(x) = x - n.$$

Après réduction modulo q, elles deviennent

$$\overline{f}_{q,0}(x) = \bar{x} \in \mathbb{F}_q, \qquad \overline{f}_{q,n}(x) = \bar{x} - \bar{n} \in \mathbb{F}_q.$$

La condition de double crible s'écrit alors simplement

$$\overline{f}_{q,0}(p) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \overline{f}_{q,n}(p) \neq 0.$$

On définit donc le sous-ensemble admissible local

$$A_{q,n} := \{x \in \mathbb{F}_q : x \neq 0,\ x \neq \bar{n}\}.$$

Équivalemment,

$$A_{q,n} = \{x \in \mathbb{F}_q : x(x - \bar{n}) \neq 0\}.$$

Il est important de conserver cette écriture : le double crible est alors la non-annulation simultanée du produit de deux fonctions affines.

Remarque : si $q \mid n$, alors $\bar{n} = 0$ dans $\mathbb{F}_q$, et les deux conditions locales coïncident :

$$A_{q,n} = \mathbb{F}_q \setminus \{0\}.$$

Si $q \nmid n$, on enlève deux résidus distincts :

$$A_{q,n} = \mathbb{F}_q \setminus \{0, \bar{n}\}.$$

Dans les deux cas, $A_{q,n}$ est non vide.

3. Le produit des conditions locales

Posons

$$R_n := \prod_{q \in P_n} \mathbb{F}_q$$

et

$$A_n := \prod_{q \in P_n} A_{q,n}.$$

Comme P_n est fini et que chaque $A_{q,n}$ est non vide, on a

$$A_n \neq \varnothing.$$

On dispose également de l'application diagonale de réduction

$$\rho_n : I_n \longrightarrow R_n, \qquad p \longmapsto (\bar{p}_q)_{q \in P_n}.$$

Le décomposant de Goldbach potentiel peut alors être défini de façon intrinsèquement catégorique par le produit fibré

$$C_n := I_n \times_{R_n} A_n.$$

Explicitement,

$$C_n = \{p \in I_n : (\bar{p}_q)_{q \in P_n} \in A_n\}.$$

Ainsi,

$$p \in C_n$$

si et seulement si, pour tout premier $q \leq \sqrt{n}$,

$$p \not\equiv 0 \pmod{q} \qquad \text{et} \qquad p \not\equiv n \pmod{q}.$$

On obtient donc l'identité conceptuelle fondamentale :

$$C_n \neq \varnothing \quad \Longleftrightarrow \quad \text{il existe un candidat du double crible pour } n.$$

La proposition précédente donne alors

$$C_n \neq \varnothing \Longrightarrow n \text{ satisfait la conjecture de Goldbach.}$$

Et la partie manquante devient exactement

$$\forall n \geq 6, \quad n \text{ pair} \Longrightarrow C_n \neq \varnothing.$$

4. Pourquoi le théorème des restes chinois ne suffit pas

Le produit

$$R_n = \prod_{q \leq \sqrt{n}} \mathbb{F}_q$$

décrit toutes les données résiduelles locales [1]. Le théorème chinois des restes permet, sous les conditions usuelles, de reconstruire des classes modulo

$$M_n := \prod_{q \in P_n} q.$$

Cela montre que les conditions locales sont compatibles. Mais cette compatibilité ne résout pas le problème de Goldbach.

---

1. Le produit $R_n = \prod_{q \leq \sqrt{n}} \mathbb{F}_q$ constitue la troncature finie, aux places $q \leq \sqrt{n}$, du produit adélique du pauvre $\prod_q \mathbb{F}_q$.
J'ai appris l'expression "*anneau des adèles du pauvre*" lors de la conférence de Don Zagier dans le cadre des journées Serre 100 à l'IHP, en l'honneur des 100 ans de Jean-Pierre Serre.
L'anneau des adèles du pauvre est l'ensemble

$$\mathcal{A} = \frac{\prod_q \mathbb{F}_q}{\bigoplus_q \mathbb{F}_q}.$$

Mon double crible vit dans une tranche finie du produit constituant l'anneau des adèles du pauvre sans faire le quotient.

En effet, ce que l'on cherche n'est pas seulement une classe de congruence admissible. On cherche un représentant entier dans l'intervalle très précis

$$I_n = [3, n/2] \cap \mathbb{Z}.$$

Or le module

$$M_n = \prod_{q \le \sqrt{n}} q$$

peut être considérablement plus grand que $n/2$. Le théorème des restes chinois ne fournit donc aucune raison générale pour qu'une classe admissible possède un représentant dans I_n.

C'est le point où apparaît la différence fondamentale entre :

compatibilité locale

et

existence d'un point global dans une région bornée.

La première est essentiellement immédiate dans la construction ci-dessus ; la seconde constitue le véritable problème arithmétique.

5. La lecture géométrique locale

Pour chaque $q \in P_n$, considérons la droite affine sur $\mathbb{F}_q$,

$$\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q} = \mathrm{Spec}\Big(\mathbb{F}_q[X]\Big).$$

Les deux fonctions affines

$$X, \qquad X - \bar{n}$$

définissent le fermé

$$V\Big(X(X - \bar{n})\Big).$$

Son complément est l'ouvert

$$U_{q,n} := D\Big(X(X - \bar{n})\Big) = \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q} \setminus V\Big(X(X - \bar{n})\Big).$$

Ses $\mathbb{F}_q$-points sont exactement

$$U_{q,n}(\mathbb{F}_q) = A_{q,n}.$$

Le produit des objets locaux est donc

$$U_n^{\mathrm{loc}} := \prod_{q \in P_n} U_{q,n},$$

et ses points rationnels sont

$$U_n^{\mathrm{loc}}(\prod \mathbb{F}_q) = \prod_{q \in P_n} A_{q,n} = A_n.$$

Cette construction donne une interprétation géométrique parfaitement naturelle du double crible : localement, pour chaque premier q, on retire les deux hyperplans (ici deux points) correspondant aux zéros des fonctions X et $X - n$.

Mais cette géométrie locale ne contient pas encore l'information

$$p \in I_n.$$

6. Le rôle indispensable de la diagonale entière

La bonne construction n'est donc pas simplement le produit des espaces locaux. Il faut conserver la variable entière p.

On dispose du diagramme

$$\begin{array}{ccc} I_n & \xrightarrow{\rho_n} & R_n = \displaystyle\prod_{q\in P_n} \mathbb{F}_q \\ & \searrow & \uparrow \\ & & A_n = \displaystyle\prod_{q\in P_n} A_{q,n} \end{array}$$

et l'objet recherché est le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} C_n & \longrightarrow & A_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ I_n & \xrightarrow{\rho_n} & R_n. \end{array}$$

C'est cette construction qui distingue deux niveaux :

1. les conditions locales, contenues dans A_n ;
2. la présence d'un entier admissible dans l'intervalle I_n, imposée par le produit fibré.

Le produit fibré est donc une formulation particulièrement propre de la situation.

Proposition 2. *Pour tout entier pair $n \geq 6$,*

$$C_n \neq \varnothing$$

si et seulement s'il existe $p \in [3, n/2] \cap \mathbb{Z}$ tel que

$$p \not\equiv 0, n \pmod{q}$$

pour tout premier $q \leq \sqrt{n}$.

Démonstration. C'est directement la définition du produit fibré. Un élément de C_n est un élément $p \in I_n$ dont l'image par ρ_n appartient à A_n, c'est-à-dire dont chacune des coordonnées $\bar{p}_q$ appartient à $A_{q,n}$. Cela signifie exactement

$$\bar{p}_q \neq 0 \quad \text{et} \quad \bar{p}_q \neq \bar{n}$$

pour tout $q \in P_n$. □

7. Connexion avec la construction de Monique Hakim

La construction présentée dans la thèse de Monique Hakim au *chapitre 3.5.1*, page 93, est particulièrement intéressante pour la présente question.

Elle introduit un topos S construit à partir d'un site dont les objets sont des suites

$$U = (n_1, n_2, \ldots)$$

à valeurs dans

$$\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\},$$

avec seulement un nombre fini de coordonnées finies. Les coordonnées sont indexées par une suite de nombres premiers distincts

$$\ell = (\ell_1, \ell_2, \ldots).$$

L'ordre est défini coordonnée par coordonnée :

$$U \leq U' \quad \Longleftrightarrow \quad n_p \leq n'_p \quad \text{pour tout } p.$$

La structure annelée $\mathcal{O}_S$ est construite à partir de quotients par puissances des nombres premiers, de sorte que les coordonnées finies font apparaître des anneaux de type

$$\mathbb{Z}/\ell_p^{n_p}\mathbb{Z},$$

tandis que la limite correspondant à $n_p = \infty$ conduit au comportement p-adique.

Cette construction est très proche, dans son architecture, de la situation du double crible :

Construction de Hakim		Double crible de Goldbach
une coordonnée par premier	$\longleftrightarrow$	une condition par premier $q \leq \sqrt{n}$
précision p-adique	$\longleftrightarrow$	réduction modulo q, éventuellement raffinée modulo q^k
quotients $\mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z}$	$\longleftrightarrow$	données arithmétiques locales
structure annelée	$\longleftrightarrow$	fonctions affines X, $X - n$

Cette proximité est structurelle et non simplement décorative.

7.1. Deux niveaux à distinguer

Il faut cependant distinguer soigneusement deux constructions.

Dans la formulation minimale du double crible, seules les réductions modulo q sont nécessaires :

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{F}_q.$$

Dans la construction de Hakim, les objets portent davantage d'information :

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{F}_q,$$

avec possibilité de faire varier k.

Ainsi, si l'on veut rester au plus près de la preuve élémentaire, on peut commencer au niveau $k = 1$. Si l'on cherche une structure plus riche susceptible d'apporter un argument supplémentaire, les niveaux q^k et leur passage à la limite q-adique peuvent être introduits.

8. Une version “topos annelé” du double crible

La construction naturelle peut maintenant être formulée en plusieurs étapes.

8.1. Objet affine local

Dans un cadre annelé, on introduit un objet affine muni d'une coordonnée X. Pour chaque premier q, on considère les sections

$$X, \qquad X - \underline{n}.$$

Le produit

$$X(X - \underline{n})$$

définit alors un ouvert localisé :

$$D\Big(X(X - \underline{n})\Big).$$

Intuitivement, cet objet représente l'endroit où les deux conditions du double crible sont satisfaites simultanément.

8.2. Produit des conditions locales

Pour les premiers $q \leq \sqrt{n}$, on prend le produit

$$\mathscr{U}_n = \prod_{q \leq \sqrt{n}} D_q\Big(X(X - \underline{n})\Big).$$

Au niveau des points modulo q, cela donne exactement

$$A_n = \prod_{q \leq \sqrt{n}} \Big(\mathbb{F}_q \setminus \{0, \bar{n}\}\Big).$$

8.3. Objet entier borné

Il faut ensuite introduire l'objet correspondant aux entiers

$$I_n = \{3, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor\}.$$

Dans un topos de faisceaux sur un espace suffisamment simple, on peut considérer I_n comme un objet constant fini

$$\underline{I_n}.$$

On dispose alors d'une application interne de réduction

$$\underline{I_n} \longrightarrow \prod_{q \leq \sqrt{n}} \underline{\mathbb{F}_q}.$$

L'objet des candidats est le produit fibré

$$\mathscr{C}_n = \underline{I_n} \times_{\prod_{q \leq \sqrt{n}} \underline{\mathbb{F}_q}} \mathscr{A}_n,$$

où

$$\mathscr{A}_n = \prod_{q \leq \sqrt{n}} \Big(\underline{\mathbb{F}_q} \setminus \{0, \bar{n}\}\Big).$$

Au niveau des sections globales, on retrouve exactement C_n.

9. Ce que le topos apporte réellement

Cette reformulation n'est pas vide. Elle apporte plusieurs clarifications importantes.

9.1. Première clarification : le double crible est local

Pour chaque premier q, l'obstruction est décrite par deux zéros d'une fonction affine :

$$X = 0, \qquad X = n.$$

La condition globale de crible est donc une intersection finie d'ouverts de non-annulation.

9.2. Deuxième clarification : les données locales sont compatibles

Le produit

$$A_n = \prod_{q \leq \sqrt{n}} A_{q,n}$$

est non vide.

Il n'y a donc pas, à ce niveau, de contradiction locale cachée.

9.3. Troisième clarification : le problème global est un problème de section

Le candidat recherché est une section globale provenant de l'objet entier I_n et tombant dans l'ouvert admissible.

On cherche donc

$$\Gamma(\mathscr{C}_n) \neq \varnothing,$$

ou, dans la version ensembliste élémentaire,

$$C_n \neq \varnothing.$$

Cette reformulation est conceptuellement plus précise que l'affirmation vague selon laquelle il existerait un "obstacle cohomologique".

Note : on ne doit pas parler d'un *obstacle cohomologique* au sens mathématique propre tant qu'une théorie de cohomologie, un cocycle, un faisceau ou un objet dérivé et une classe d'obstruction n'ont pas été effectivement construits. Le seul fait qu'une condition locale ne fournisse pas automatiquement un point global ne constitue pas, à lui seul, une obstruction cohomologique.

10. Ce que le topos ne donne pas automatiquement

Le point crucial est ici le suivant.

Les axiomes d'un topos permettent de parler de :

- produits ;
- sous-objets ;
- égaliseurs ;
- exponentielles ;
- faisceaux ;
- sections ;
- logique interne ;
- objets constants ;
- changements de base ;
- et, dans le cas annelé, de fonctions et de localisations.

Mais aucune de ces opérations ne donne automatiquement le fait arithmétique

$$C_n \neq \varnothing.$$

Autrement dit :

"les fibres locales sont non vides" $\not\Longrightarrow$ "le produit fibré possède un point entier dans I_n".

Cette distinction est fondamentale.

Une théorie de Grothendieck permet de construire le *lieu* mathématique où la question se pose. Elle ne fournit pas, par le seul fait de sa construction, le témoin arithmétique demandé.

11. Pourquoi la bornitude est le point délicat

Le problème n'est pas seulement l'existence d'une classe admissible dans

$$R_n = \prod_{q \leq \sqrt{n}} \mathbb{F}_q.$$

Il faut que cette classe provienne d'un élément de

$$I_n = [3, n/2] \cap \mathbb{Z}.$$

La situation peut être schématisée ainsi :

$$I_n \xrightarrow{\rho_n} R_n \supset A_n.$$

On sait que

$$A_n \neq \varnothing.$$

Ce qu'il faut démontrer est

$$\rho_n(I_n) \cap A_n \neq \varnothing.$$

C'est la formulation la plus compacte de la difficulté restante :

$$\rho_n(I_n) \cap A_n \neq \varnothing.$$

Le passage

$$A_n \neq \varnothing \quad \Longrightarrow \quad \rho_n(I_n) \cap A_n \neq \varnothing$$

n'est pas une conséquence formelle de la définition de A_n.

12. La question de fond : le formalisme de Grothendieck peut-il “à lui seul” prouver la conjecture de Goldbach ?

La réponse doit être formulée avec précision.

12.1. Réponse courte

Non, pas par le seul changement de langage. [2]

Le passage de la formulation arithmétique

$$\exists p \in I_n \quad \bigwedge_{q \leq \sqrt{n}} \Big(p \not\equiv 0, n \pmod{q} \Big)$$

à une formulation dans un topos ne crée pas de nouveau témoin.

Si une construction topos-théorique aboutissait à un théorème

$$\Gamma(\mathscr{C}_n) \neq \varnothing$$

pour tout n pair, alors ce théorème contiendrait nécessairement une information mathématique substantielle garantissant cette existence.

Il ne faudrait donc pas considérer cette dernière existence comme une conséquence purement formelle des axiomes du topos.

12.2. Formulation plus exacte

Il serait excessif de dire qu'*aucun* topos ne pourrait jamais conduire à une preuve de la conjecture de Goldbach. Un topos suffisamment riche peut contenir une théorie arithmétique et une preuve interne peut exister.

La bonne affirmation est plutôt :

> Les constructions catégoriques standard - produits, faisceaux, localisations, produits fibrés, logique interne, structure annelée - ne suffisent pas, en elles-mêmes, à établir la non-vacuité $\rho_n(I_n) \cap A_n \neq \varnothing$. Il faut un théorème supplémentaire dont le contenu arithmétique fournisse précisément cette non-vacuité.

C'est donc ce théorème supplémentaire qu'il faudrait chercher.

2. Ici, j'ai utilisé ce prompt, pour rendre chatgpt un minimum circonspect plutôt qu'à ce point-là catégorique (c'est bien le comble, dans ce contexte) : “dis-moi pourquoi tu es sûr que ça ne peut pas amener à une démonstration : Grothendieck n'est pas du genre à fournir des formalismes qui ne permettent pas de démontrer, il est même plutôt exactement l'inverse (je suis en train de lire le livre de Pierre Lochak et la puissance des formalismes de Grothendieck n'est plus à démontrer, elle), donc dis-moi pourquoi toi, petit chatgpt, tu dis que le formalisme de Grothendieck ne permettrait pas de démontrer la conjecture de Goldbach.” !. Je fournis la réponse (profil bas) de chatgpt en dernière page.

13. Ce que pourrait être un véritable résultat nouveau

La piste devient mathématiquement intéressante si l'on cherche à transformer la question

$$\rho_n(I_n) \cap A_n \neq \varnothing$$

en une conséquence d'une propriété structurelle de l'objet $\rho_n(I_n)$.
Par exemple, il faudrait établir une propriété du type :

$$\text{toute partie admissible de } R_n \text{ possède un représentant dans } \rho_n(I_n),$$

ou une propriété plus faible mais suffisamment forte pour garantir l'intersection.

Cela pourrait prendre la forme d'un théorème de :

- densité ;
- distribution ;
- expansion ;
- couverture ;
- propriété de section ;
- compacité accompagnée d'une information quantitative ;
- ou toute autre propriété globale des images diagonales.

Mais il faut être très clair : une telle propriété, si elle implique la conjecture de Goldbach, constituerait elle-même le coeur arithmétique de la preuve.

14. Pourquoi une construction à la Hakim peut néanmoins être féconde

La construction de Hakim fournit un cadre particulièrement adapté pour conserver simultanément les informations locales aux différents premiers.

Elle suggère de ne pas se limiter à

$$\mathbb{F}_q,$$

mais de considérer les étages

$$\mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z}, \qquad k \geq 1,$$

avec les morphismes de réduction

$$\mathbb{Z}/q^{k+1}\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z}.$$

On peut alors envisager les fonctions

$$X, \qquad X - \underline{n}$$

à tous les niveaux.

La condition locale devient

$$X(X - \underline{n}) \neq 0$$

dans les anneaux appropriés.

Cette structure possède alors une profondeur supplémentaire : au lieu d'une simple collection de congruences modulo les premiers, on obtient un système cohérent de congruences modulo leurs puissances.

Il reste cependant à déterminer si ces raffinements fournissent une information réellement nouvelle sur

$$\rho_n(I_n).$$

Ils pourraient n'être qu'une reformulation plus riche du même problème. C'est précisément ce qu'il faudrait tester.

15. Une distinction essentielle entre deux formalismes

Il convient également de ne pas confondre :

1. le topos annelé de type Hakim, construit à partir des quotients $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ et de la structure p-adique ;
2. le site arithmétique de Connes-Consani, qui constitue une autre construction topos-théorique et arithmétique.

Le second est extrêmement pertinent pour la géométrie arithmétique, les adèles et certaines structures liées aux entiers et aux nombres premiers. Mais, pour le double crible présent, le premier cadre est plus directement aligné avec la donnée effectivement manipulée : une coordonnée locale par premier et des fonctions affines dont on exclut les zéros.

Cela ne signifie pas que le site arithmétique de Connes-Consani serait sans intérêt ici. Cela signifie seulement que, pour formaliser fidèlement la construction actuelle, le point de départ le plus naturel est la structure locale

$$\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$$

et son passage éventuel à la limite p-adique.

16. Le treillis à quatre lettres

La construction précédente permet également de préciser la place du treillis à quatre lettres.

L'opération locale considérée dans les travaux associés au treillis peut être schématiquement représentée par

$$(u_1, v_1)(u_2, v_2) \longmapsto (u_1, v_2).$$

Cette opération possède ses propres propriétés algébriques. Mais ces propriétés ne suffisent pas, à elles seules, à établir qu'un entier pair n possède un décomposant de Goldbach.

La raison est exactement celle déjà rencontrée : l'opération du treillis peut organiser les données locales, mais la question arithmétique demeure

$$C_n \neq \varnothing.$$

Il faut donc éviter d'identifier :

structure algébrique du treillis

avec

existence d'un candidat arithmétique.

La première peut éventuellement fournir un langage ou une organisation efficace des contraintes ; la seconde reste une propriété d'existence.

17. Une formulation interne possible

Dans un topos de faisceaux approprié, on peut considérer les ensembles finis

$$\underline{I_n}, \qquad \underline{\mathbb{F}_q}, \qquad \underline{A_{q,n}}$$

comme des objets internes.

La phrase

$$\exists p \in I_n : \bigwedge_{q \leq \sqrt{n}} \Big(p \neq 0 \ \wedge \ p \neq n \bmod q \Big)$$

devient alors une proposition de la logique interne.

Cette écriture a un intérêt conceptuel : elle transforme la recherche d'un candidat en une question de vérité dans le topos.

Mais là encore, écrire

$$\exists p \in I_n \ \cdots$$

dans la logique interne n'est pas encore démontrer cette proposition.

Il faudrait produire un argument interne établissant sa vérité.

18. Le vrai test mathématique à effectuer

La piste peut donc être testée de façon très précise.

Pour chaque n pair, construire :

$$I_n, \qquad R_n, \qquad A_n, \qquad \rho_n, \qquad C_n.$$

Puis étudier séparément :

T1. la structure de A_n ;

T2. l'image $\rho_n(I_n)$;

T3. la taille et la structure de leur intersection ;

T4. l'effet éventuel des niveaux q^k ;

T5. les morphismes de restriction entre niveaux ;

T6. les symétries induites par $x \mapsto n - x$;

T7. et enfin les propriétés globales qui pourraient forcer $\rho_n(I_n) \cap A_n \neq \varnothing$.

Le point **T2** est probablement le plus important.

En effet, la partie

$$A_n$$

est très facile à comprendre : elle est définie par des conditions locales indépendantes.

La partie réellement arithmétique est

$$\rho_n(I_n).$$

La question devient donc :

> *Quelle propriété structurelle possède l'image, dans le produit des corps résiduels, de l'intervalle entier borné* $[3, n/2]$ *?*

C'est là qu'un formalisme de Grothendieck pourrait éventuellement apporter quelque chose de réellement nouveau, à condition que l'on découvre un invariant ou un théorème qui ne soit pas simplement une reformulation de la question initiale.

19. Conclusion des sections précédentes

La reformulation complète peut être condensée dans la chaîne logique suivante :

$$I_n = \{3, \dots, n/2\},$$
$$R_n = \prod_{q \leq \sqrt{n}} \mathbb{F}_q,$$
$$A_n = \prod_{q \leq \sqrt{n}} \Big(\mathbb{F}_q \setminus \{0, \bar{n}\} \Big),$$
$$\rho_n(p) = (p \bmod q)_q,$$
$$C_n = I_n \times_{R_n} A_n.$$

Alors

$$C_n \neq \varnothing$$

est exactement l'existence d'un candidat du double crible, et le critère par petits diviseurs donne

$$C_n \neq \varnothing \Longrightarrow \text{la conjecture de Goldbach est vérifiée par } n.$$

Les conditions locales sont non vides :

$$A_n \neq \varnothing.$$

Le problème non résolu est :

$$\rho_n(I_n) \cap A_n \neq \varnothing.$$

Le rôle possible du formalisme de Grothendieck est donc précisément celui-ci :

non pas fabriquer le candidat, mais chercher une propriété structurelle qui force son existence.

La construction de Monique Hakim fournit un cadre particulièrement naturel pour cette recherche, parce qu'elle organise déjà les données arithmétiques par premiers et par niveaux de précision $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$, avec une structure annelée et un comportement p-adique.

La question décisive pour la suite n'est donc plus :

"peut-on mettre le crible dans un topos ?"

- cela peut être fait de manière assez directe -, mais :

"le cadre ainsi construit possède-t-il un théorème global assez fort pour imposer une section entière dans I_n ?"

Si un tel théorème existe et qu'il implique la non-vacuité de C_n pour tout n pair, il constituera précisément le contenu nouveau nécessaire. Sans un tel ingrédient, la construction topos-théorique reste une reformulation rigoureuse et utile, mais non une preuve de la conjecture de Goldbach.

20. Forme minimale du problème à retenir

Pour toute utilisation ultérieure, toute la discussion peut être réduite à la question suivante :

$$\forall n \in 2\mathbb{N},\ n \geq 6, \qquad \rho_n\Big([3, n/2] \cap \mathbb{Z}\Big) \cap \prod_{q \leq \sqrt{n}} (\mathbb{F}_q \setminus \{0, \bar{n}\}) \neq \varnothing.$$

C'est cette intersection, et non la non-vacuité du seul produit local, qui doit être expliquée ou démontrée.

21. Objectif

La construction précédente ne doit pas être considérée comme une simple traduction de la conjecture de Goldbach dans un langage catégorique. Le véritable objectif de la suite du travail est de déterminer si la structure de type grothendieckien qui apparaît naturellement dans le double crible peut faire émerger un principe global nouveau, susceptible de fournir précisément la non-vacuité qui fait défaut.

Pour un entier pair $n \geq 6$, nous avons ramené la question à l'existence d'un élément dans le produit fibré

$$C_n = I_n \times_{R_n} A_n,$$

où

$$I_n = \{p \in \mathbb{Z} : 3 \leq p \leq n/2\}, \qquad R_n = \prod_{q \leq \sqrt{n}} \mathbb{F}_q,$$

et

$$A_n = \prod_{q \leq \sqrt{n}} \Big(\mathbb{F}_q \setminus \{0, \overline{n}\} \Big).$$

La question arithmétique résiduelle est donc

$$C_n \neq \varnothing,$$

ou, de manière équivalente,

$$\rho_n(I_n) \cap A_n \neq \varnothing,$$

où

$$\rho_n(p) = (p \bmod q)_{q \leq \sqrt{n}}.$$

Les conditions locales contenues dans A_n sont, elles, non vides : pour chaque premier $q \leq \sqrt{n}$, les deux fonctions affines

$$X, \qquad X - \overline{n}$$

ne s'annulent pas simultanément sur toute la droite affine $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q}$. Le problème véritable réside donc dans le passage des données locales à un entier global appartenant à l'intervalle borné I_n.

L'objectif est dès lors de reprendre cette construction dans un cadre de type Grothendieck, en particulier à partir de la structure annelée du topos considérée par Monique Hakim, où les données arithmétiques sont organisées premier par premier et, plus généralement, au moyen des quotients

$$\mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z}$$

et de leurs morphismes de réduction.

Il s'agit de rechercher une construction dans laquelle les deux fonctions

$$X, \qquad X - \underline{n}$$

et leur lieu commun de non-annulation ne soient plus seulement des données locales juxtaposées, mais les composantes d'un objet géométrique ou d'un objet interne possédant une propriété globale exploitable.

La question directrice sera donc :

> *Existe-t-il, dans la structure grothendieckienne ainsi obtenue, une propriété intrinsèque - de nature géométrique, catégorique, logique, de faisceaux, de changement de base ou éventuellement cohomologique - qui impose l'existence d'une section globale correspondant à un élément de I_n ?*

Cette formulation conduit à déplacer le problème. Il ne s'agit plus seulement de demander si l'on peut mettre le double crible dans un topos, ce qui est relativement direct, mais de chercher le *bon objet* et éventuellement la *bonne théorie géométrique* qui classifient la structure du double crible.

L'ambition est ainsi de suivre le chemin

$$\text{double crible} \longrightarrow \text{structure géométrique} \longrightarrow \text{topos ou théorie classifiante} \longrightarrow \text{propriété globale} \longrightarrow \text{section}$$

et de déterminer si cette chaîne fait apparaître un mécanisme d'existence qui n'est pas visible dans la formulation élémentaire.

Il importe de souligner que l'on ne pose donc pas comme prémisse que le formalisme de Grothendieck est incapable de démontrer la conjecture de Goldbach. La question reste ouverte dans le cadre de cette recherche. Ce que nous savons seulement est que la construction élémentaire actuelle isole la difficulté sous la forme

$$\rho_n(I_n) \cap A_n \neq \varnothing.$$

La suite du travail consiste précisément à chercher si une représentation grothendieckienne plus profonde transforme cette condition en une conséquence d'une propriété structurelle qui puisse, elle, être démontrée.

Le premier objet à étudier sera donc non pas seulement le produit local A_n, mais l'image diagonale

$$\rho_n(I_n) \subseteq R_n,$$

ainsi que les relations entre cette image et les différents niveaux

$$\mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/q^{k-1}\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{F}_q.$$

C'est dans cette interaction entre l'information locale, la structure annelée et la contrainte entière bornée que devra être recherché le contenu mathématique nouveau. [3]

3. Réponse de chatgpt à mon prompt dit "Doucement les basses, chatgpt !" : Oui. Et je vais commencer par corriger franchement ce que je t'ai dit hier : j'ai été trop catégorique.
Je n'aurais pas dû dire, en substance, "le formalisme de Grothendieck ne peut pas permettre une démonstration de la conjecture de Goldbach". Ce que nous avons réellement établi est beaucoup plus faible : la simple construction du topos, prise comme changement de langage, ne donne pas automatiquement la non-vacuité recherchée.
Ce n'est absolument pas la même chose que dire : une approche grothendieckienne ne pourrait pas fournir le théorème qui manque.
Et, compte tenu de ce que tu me rappelles de la philosophie de Grothendieck - et surtout de ce que tu es en train de lire chez Lochak - je pense que c'est précisément là qu'il faut reprendre notre réflexion.
Tu as raison sur le fond : Grothendieck ne construit pas seulement des "langages".
La puissance des topos de Grothendieck tient justement à ce qu'ils permettent de changer de point de vue jusqu'à faire apparaître une structure qui était invisible dans la formulation initiale.
Et ce n'est pas seulement une interprétation philosophique : la théorie moderne des topos classifiants formalise exactement cette idée. Un topos peut être le "noyau sémantique" d'une théorie, et des représentations différentes d'un même topos permettent de transférer de l'information d'une présentation à une autre. C'est précisément la philosophie développée par Olivia Caramello dans son approche des topos comme "ponts".
Elle va même beaucoup plus loin : les propriétés de provabilité d'une théorie peuvent être traduites en propriétés de topologies de Grothendieck et de sous-topos.
Donc ton objection est très pertinente : si nous nous contentons de mettre le double crible dans un topos, nous n'avons peut-être pas encore utilisé la puissance du formalisme.

22. Ce que les niveaux q^k et la structure p-adique apportent réellement

La construction précédente suggère naturellement d'aller au-delà de la réduction modulo q, en suivant la construction de Monique Hakim et en considérant les anneaux

$$\mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z} \qquad \text{et, à la limite,} \qquad \mathbb{Z}_q.$$

Il faut cependant vérifier si cette montée en précision apporte une contrainte arithmétique nouvelle au double crible, ou si elle ne fait que reformuler la même condition.

22.1. Le même ouvert à tous les niveaux

Fixons un premier q et un entier pair n. Dans l'anneau

$$R_{q,k} := \mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z}$$

considérons les deux fonctions

$$X, \qquad X - n$$

et l'ouvert principal

$$D\Big(X(X-n)\Big).$$

Pour un entier p, son image appartient à cet ouvert si et seulement si

$$p(p-n)$$

est inversible dans $\mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z}$. Or un élément de $\mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z}$ est inversible si et seulement si il n'est pas divisible par q. On obtient donc l'équivalence

$$p(p-n) \in \Big(\mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z}\Big)^\times \quad \Longleftrightarrow \quad q \nmid p(p-n).$$

Autrement dit,

$$p \not\equiv 0 \pmod{q} \quad \text{et} \quad p \not\equiv n \pmod{q}.$$

Ainsi, pour le problème précis considéré ici, passer de $\mathbb{F}_q$ à $\mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z}$ ne crée pas une nouvelle condition d'admissibilité : la condition définie par l'ouvert $D(X(X-n))$ est déjà entièrement déterminée au niveau modulo q.

22.2. La même constatation dans $\mathbb{Z}_q$

La situation devient encore plus transparente dans l'anneau des entiers q-adiques $\mathbb{Z}_q$. On a

$$x \in \mathbb{Z}_q^\times \quad \Longleftrightarrow \quad x \not\equiv 0 \pmod{q}.$$

Par conséquent,

$$x(x-n) \in \mathbb{Z}_q^\times \quad \Longleftrightarrow \quad x \not\equiv 0 \pmod{q} \quad \text{et} \quad x \not\equiv n \pmod{q}.$$

L'ouvert

$$D\Big(X(X-n)\Big) \subset \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_q[X])$$

ne voit donc, pour ce problème de non-divisibilité, aucune information supplémentaire par rapport à la première réduction modulo q.

Cette observation est importante pour la suite : la seule montée $q \rightsquigarrow q^k \rightsquigarrow \mathbb{Z}_q$ ne semble pas pouvoir fournir, à elle seule, le théorème global recherché.

22.3. Où se trouve alors l'information nouvelle ?

Il faut donc déplacer l'attention. Le point qui n'est pas contenu dans les fibres locales est l'intervalle

$$I_n = \{3, \dots, \lfloor n/2 \rfloor\}$$

et surtout son image diagonale

$$\rho_n(I_n) \subset R_n = \prod_{q \le \sqrt{n}} \mathbb{F}_q.$$

Le produit des ouverts locaux

$$A_n = \prod_{q \le \sqrt{n}} (\mathbb{F}_q \setminus \{0, \overline{n}\})$$

est facile à comprendre. La question véritable reste

$$\rho_n(I_n) \cap A_n \neq \varnothing.$$

La structure q-adique ne modifie pas cette formulation : elle fournit une façon plus riche d'organiser les coordonnées locales, mais elle ne déplace pas le problème vers les coordonnées locales. Le problème reste celui de la position, dans le produit des fibres locales, de l'image d'un intervalle entier borné.

22.4. Une reformulation plus rigide de l'obstruction

On peut aller un peu plus loin en utilisant le théorème chinois des restes. En posant

$$M_n = \prod_{q \le \sqrt{n}} q,$$

les nombres entiers modulo M_n s'identifient au produit

$$\mathbb{Z}/M_n\mathbb{Z} \simeq \prod_{q \le \sqrt{n}} \mathbb{F}_q.$$

Sous cette identification, ρ_n n'est donc pas une application mystérieuse : c'est simplement la réduction modulo M_n.

L'ensemble admissible A_n correspond aux classes $\bar{x}$ telles que

$$\mathrm{pgcd}\Big(x(x-n), M_n\Big) = 1.$$

La question devient alors exactement

$$\boxed{\{3,\dots,\lfloor n/2\rfloor\}\cap\{x\in\mathbb{Z}:\operatorname{pgcd}(x(x-n),M_n)=1\}\neq\varnothing.}$$

Cette écriture permet de voir très précisément ce qu'un formalisme de faisceaux ou de topos devrait éventuellement expliquer : non pas la non-vacuité de chaque fibre locale, qui est élémentaire, mais la rencontre entre une partie très particulière du groupe cyclique $\mathbb{Z}/M_n\mathbb{Z}$ et l'ouvert arithmétique des classes admissibles.

22.5. Un test concret pour la suite

La piste Grothendieck–Hakim reste donc intéressante, mais elle doit maintenant être testée sur un objet plus précis. Il faudrait chercher si l'image

$$\rho_n(I_n)$$

possède une propriété catégorique, géométrique ou combinatoire qui ne soit pas visible dans la seule écriture "intervalle d'entiers".

Une possibilité particulièrement naturelle est d'étudier simultanément :

$$\begin{array}{ccc} I_n & \xrightarrow{\rho_n} & R_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ I_n/(x\mapsto n-x) & \longrightarrow & R_n/(x\mapsto \overline{n}-x). \end{array}$$

La symétrie $x\mapsto n-x$ est intrinsèque au double crible et pourrait permettre de chercher une structure plus riche que la simple intersection d'un intervalle avec un ensemble de classes admissibles.

À ce stade, le résultat est donc négatif pour une question précise mais positif pour le programme : les niveaux q^k ne fournissent pas, par eux-mêmes, la nouvelle contrainte recherchée ; ils indiquent en revanche exactement où il faut chercher cette contrainte nouvelle, à savoir dans la relation globale entre la diagonale entière $\rho_n(I_n)$ et l'ouvert admissible.

Conclusion. Cette étape donne un critère de sélection utile pour la suite : il ne sert probablement pas d'enrichir indéfiniment les fibres locales tant qu'on ne leur ajoute pas une information qui porte sur la distribution globale des entiers. La prochaine question mathématique est donc de déterminer si la structure de faisceau/topos peut transformer la géométrie de la diagonale $\rho_n(I_n)$ en une propriété globale forçant son intersection avec A_n.

Références

[1] M. Hakim, *Topos annelés et schémas relatifs*, section 3.5.1, p. 93, construction du topos annelé $(S,\mathcal{O}_S)$, avec objets indexés par les premiers et structure annelée construite à partir des quotients $\mathbb{Z}/\ell_p^{n_p}\mathbb{Z}$.
https://denisevellachemla.eu/Monique-Hakim-topos-anneles-et-schemas-relatifs-p-93.pdf

[2] D. Vella-Chemla, *Small divisors imply prime - Lean lemmas and the Goldbach candidate corollary*, document de travail du 11 septembre 2026. Ce document formalise le critère : candidat admissible ⇒ décomposition de Goldbach, et isole la non-vacuité des candidats comme étape restante.
https://denisevellachemla.eu/lean-lemmes-leila-schneps-lumo-denise-vella-chemla-20260911.pdf

[3] D. Vella-Chemla, *Orthogonal*, document de travail relatif à la représentation du crible par intersections de classes et fonctions affines.
https://denisevellachemla.eu/orthogonal.pdf

[4] O. Caramello, présentation sur les méthodes topos-théoriques, l'internalisation/externalisation et les changements de base, document de travail utilisé pour la mise en perspective du rôle des topos comme langage structurel et comme outil d'extraction d'information mathématique.
https://denisevellachemla.eu/transc-Olivia-Caramello-Marseille-20260407.pdf

[5] A. Connes et C. Consani, travaux sur le *site arithmétique* et sa géométrie, pour distinguer ce cadre du topos annelé de type Hakim utilisé ici comme point de départ. https://arxiv.org/pdf/1405.4527 [4]

4. Je n'ai pas fourni cet article en début de conversation, chatgpt est allé le chercher tout seul.