*Différence entre les fonctions f et F de l'article de Riemann concernant le nombre des nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée (22.8.2017)*

Dans son article si important, Riemann utilise deux fonctions $f(x)$ et $F(x)$ (cette dernière correspondant à $\pi(x)$, le nombre de nombres premiers inférieurs à $x$) dont on étudie ci-après ce qui les distingue lorsqu'on limite, comme préconisé dans la note de Riemann, ces sommes à un nombre fini de termes.

$\pi(x)$ étant nul lorsque $x < 2$, on prendra comme derniers éléments des sommes les logarithmes à base 2.

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{k=1}^{\lfloor log_2\ x \rfloor} \frac{1}{k} F\left(x^{\frac{1}{k}}\right)$$

$$(2) \qquad F(x) = \sum_{k \geqslant 2} \frac{\mu(k)}{k} f\left(x^{\frac{1}{k}}\right)$$

$$(3) \qquad f(x^{\frac{1}{k}}) = \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{1}{k}\ log_2\ x \rfloor} \frac{1}{l} F\left(x^{\frac{1}{kl}}\right)$$

$$(4) \qquad F(x^{\frac{1}{k}}) = \sum_{l \geqslant 2} \frac{\mu(l)}{l} f\left(x^{\frac{1}{kl}}\right)$$

$$(1)+(4) \qquad f(x) = \sum_{k=1}^{\lfloor log_2\ x \rfloor} \frac{1}{k} \sum_{l \geqslant 2} \frac{\mu(l)}{l} f\left(x^{\frac{1}{kl}}\right)$$

$$= \sum_{k=1, l \geqslant 2}^{k=\lfloor \frac{ln\ x}{ln\ 2} \rfloor} \frac{\mu(l)}{kl} f\left(x^{\frac{1}{kl}}\right)$$

$$(2)+(3) \qquad F(x) = \sum_{k \geqslant 2} \frac{\mu(k)}{k} \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{1}{k}\ \frac{ln\ x}{ln\ 2} \rfloor} \frac{1}{l} F\left(x^{\frac{1}{kl}}\right)$$

$$= \sum_{k \geqslant 2, l=1}^{l=\lfloor \frac{1}{k}\ \frac{ln\ x}{ln\ 2} \rfloor} \frac{\mu(k)}{kl} F\left(x^{\frac{1}{kl}}\right)$$

$$\text{(en échangeant } k \text{ et } l) \qquad F(x) = \sum_{l \geqslant 2, k=1}^{k=\lfloor \frac{1}{l}\ \frac{ln\ x}{ln\ 2} \rfloor} \frac{\mu(l)}{kl} F\left(x^{\frac{1}{kl}}\right)$$

On voit que la différence entre les deux fonctions se situe au niveau du dernier terme de la somme qui est $k = \lfloor \frac{ln\ x}{ln\ 2} \rfloor$ pour le calcul de $f(x)$ et $\lfloor \frac{1}{l}\ \frac{ln\ x}{ln\ 2} \rfloor$ pour le calcul de $F(x)$.