Infinité de l'ensemble des nombres premiers jumeaux

Denise Vella-Chemla

11/6/2012

1 Introduction

Dans cette note, on essaie de démontrer la conjecture des nombres premiers jumeaux en utilisant l'argument de la diagonale de Cantor. Cette approche, que l'on pourrait qualifier de lexicale, utilise des mots de représentation des entiers par leurs restes modulaires selon les nombres premiers successifs.

2 Énoncé

On appelle *nombres premiers jumeaux* deux nombres premiers dont la différence est 2.
Exemples :

3 et 5 sont des nombres premiers jumeaux.
29 et 31 sont des nombres premiers jumeaux.

La conjecture des nombres premiers jumeaux stipule que l'ensemble des nombres premiers jumeaux est infini.

3 Représentation par les restes

Représentons les premiers entiers naturels par leurs restes modulo les nombres premiers successifs.
Pour passer du *"mot"* d'un nombre au mot de son successeur*, on ajoute à ce mot le mot n-uplet infini $(1, 1, 1, 1, \ldots)$ qui représente l'entier naturel 1.

*selon l'arithmétique de Peano

mod	2	3	5	7	11	13	17	19	...
1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
2	0	2	2	2	2	2	2	2	...
3	1	0	3	3	3	3	3	3	...
4	0	1	4	4	4	4	4	4	...
5	1	2	0	5	5	5	5	5	...
6	0	0	1	6	6	6	6	6	...
7	1	1	2	0	7	7	7	7	...
8	0	2	3	1	8	8	8	8	...
9	1	0	4	2	9	9	9	9	...
10	0	1	0	3	10	10	10	10	...
11	1	2	1	4	0	11	11	11	...
12	0	0	2	5	1	12	12	12	...
13	1	1	3	6	2	0	13	13	...
14	0	2	4	0	3	1	14	14	...
15	1	0	0	1	4	2	15	15	...
16	0	1	1	2	5	3	16	16	...
17	1	2	2	3	6	4	0	17	...
18	0	0	3	4	7	5	1	18	...
19	1	1	4	5	8	6	2	0	...
20	0	2	0	6	9	7	3	1	...

Observons quelques représentations par les restes qui sont pertinentes par rapport à la conjecture des nombres premiers jumeaux.

6, le nombre pair juste entre les deux nombres premiers jumeaux 5 et 7 a pour représentation 0 0 1 6 6 6 .... Il a un 1 en troisième position parce que 5 a un 0 à cette position (un nombre premier est congru à 0 modulo lui-même, jamais congru à 0 modulo un nombre premier qui lui est strictement inférieur et congru à lui-même modulo tout nombre premier qui lui est strictement supérieur). 6 a un 6 en quatrième position parce que 7 a un 0 à cette position-là (le reste de 7 modulo lui-même). Les deux premières lettres du mot de représentation du nombre 6 ne sont ni des 1 ni des $p_k - 1$ (ni 1 ni 1 dans la colonne correspondant au nombre premier 2, ni 1 ni 2 dans la colonne correspondant au nombre premier 3) car si tel était le cas, l'un ou l'autre de 5 ou 7 serait composé.

18, entre 17 et 19, a pour représentation 0 0 3 4 7 5 1 18 ... : il n'a ni 1 ni $p_k - 1$ parmi ses six premières lettres, correspondant à ses restes modulo $2, 3, 5, 7, 11$ et 13. Le mot de 18 a un 1 en septième position (correspondant à son reste modulo 17 : $18 = 17 + 1$) et 18 a un reste de 18 en huitième position (correspondant à son reste modulo $19 = 18 + 1$).

Un nombre pair $p_i + 1$ juste entre deux nombres premiers jumeaux p_i et $p_i + 2$ a son écriture qui se caractérise ainsi :

- elle ne contient ni 1 ni $p_k - 1$ pour tout module p_k strictement inférieur à p_i ;
- elle contient un 1 représentant le reste de $p_i + 1$ $(mod\ p_i)$;
- elle contient un $p_i + 1$ représentant le reste de $p_i + 1$ $(mod\ p_i + 2)$.

4 Diagonale de Cantor

Supposons que l'ensemble des nombres naturels pairs juste entre deux nombres premiers jumeaux soit fini. On note dans un tableau les restes des nombres pairs en question modulo les nombres premiers successifs allant de 2 à $p_{supermax}$ où $p_{supermax}$ est le plus grand des nombres premiers inférieur à $\prod_{p_k=2}^{p_i} p_k$, p_i étant quant à lui le plus grand nombre premier inférieur à $(p_{max} + 2)^2$, si p_{max} est le plus grand des nombres premiers jumeaux cadets en nombre fini.

	2	3	5	7	11	$\dots$		$\dots$		$\dots$	$p_{dernier\_1}$	$\dots$	$p_{supermax}$
$pair_1 = 4$	0	1	$\boxed{r_{1,1}}$					$\dots$		$\dots$		$\dots$	
$pair_2 = 6$	0	0	1	$\boxed{r_{2,1}}$				$\dots$		$\dots$		$\dots$	
$pair_3 = 12$	0	0			$\boxed{r_{3,1}} = 1$			$\dots$		$\dots$		$\dots$	
						$\dots$		$\dots$	1	$\dots$		$\dots$	
$pair_n$	0	0					$\boxed{r_{n,c_n}}$	$\dots$		$\dots$	1	$\dots$	

La diagonale utilisée pour appliquer l'argument de Cantor est la troisième diagonale descendante, dont on a encadré les éléments dans le tableau. Remarquons également dans ce tableau l'existence d'une "sorte de diagonale" de restes 1, correspondant aux restes de nos nombres pairs en nombre fini modulo le nombre premier jumeau cadet qui est leur prédécesseur. Dans la mesure où tous les nombres premiers ne sont pas des jumeaux, un 1 d'une ligne est toujours dans une colonne à droite de celle dans laquelle se trouve le 1 de la ligne précédente, d'où l'expression "sorte de diagonale".

Pour "perturber la diagonale", on change chacun des restes modulaires qui lui appartiennent par un autre reste modulaire selon le module considéré, le nouveau reste choisi devant respecter deux contraintes seulement : ne pas être égal à 1 (pour assurer que le prédécesseur de ce nombre pair est bien un nombre premier) et ne pas être égal à $p_k - 1$ quand on traite le module premier p_k (pour assurer que le successeur de ce nombre pair est bien un nombre premier également). On complète le préfixe ainsi formé par des nombres respectant la même contrainte (ni 1 ni $p_k - 1$) jusqu'à la position du 1 dans le mot du dernier pair de l'ensemble fini des pairs que l'on a recensés initialement. Les conditions imposées garantissent que son prédécesseur et son successeur n'ont tous deux aucun diviseur inférieur ou égal à $p_{dernier\_1}$,le nombre premier précédant le dernier nombre pair recensé dans le tableau initial. Mais on n'arrive pas à trouver comment démontrer que le prédécesseur et le successeur de ce nombre doivent par conséquent être premiers. Le nouveau nombre ajouté au tableau se calcule par le théorème des restes chinois. Il est inférieur au produit des modules et aurait donc dû apparaître dans le tableau initial.

On a inventé un ensemble de restes qui n'était pas déjà une ligne du tableau. Si notre ensemble d'ensembles de restes avait été complet, il aurait dû contenir cette nouvelle ligne or il ne la contient pas. Cela est contradictoire avec notre hypothèse de finitude de l'ensemble des nombres premiers jumeaux. L'idée du codage entraîne la contradiction[†]. On s'est appuyé pour pouvoir construire le "nouvel ensemble de restes" sur l'*Axiome du choix* qui a pour conséquence qu'on peut toujours choisir dans des ensembles d'entiers naturels contenant chacun 5 nombres ou plus, un nombre dans chaque ensemble, en respectant la contrainte que, dans chacun des ensembles, l'élément choisi est différent de deux valeurs données (en l'occurrence 1 et $p_k - 1$).

[†]Il faudrait trouver un moyen de faire en sorte que cet ensemble de restes soit le codage d'un nombre pair juste entre deux nombres premiers jumeaux, car notre manière de construire le préfixe de son mot nous garantit qu'il n'appartenait pas à l'ensemble des nombres pairs juste entre deux nombres premiers jumeaux que l'on a supposé fini initial. La constitution même de ce nouvel ensemble de restes ne nous garantit cependant pour l'instant pas que c'est un nombre pair juste entre deux nombres premiers jumeaux. On sait cependant qu'il est inférieur au produit des modules considérés et que le théorème des restes chinois nous permet de le calculer. Il reste à démontrer qu'il a un peu plus loin dans son écriture, mais c'est forcément après $p_{supermax}$ car sinon notre nouveau nombre aurait fait partie de l'ensemble fini initial, un reste de 1 et un reste égal à lui-même selon deux nombres premiers successifs.