Conjecture de Goldbach, où l'on retrouve ζ autrement (Denise Vella-Chemla, 26.1.2019)

On s'intéresse à la conjecture de Goldbach qui stipule que tout nombre pair supérieur strictement à 2 est la somme de deux nombres premiers.

On rappelle qu'un nombre premier inférieur à $\dfrac{n}{2}$, qui ne partage aucun de ses restes avec n un nombre pair supérieur à 2, dans toute division par un nombre premier inférieur à $\sqrt{n}$, est un décomposant de Goldbach de n.

En effet, si x inférieur à $\dfrac{n}{2}$ ne partage aucun de ses restes avec n dans toute division par un nombre premier inférieur à $\sqrt{n}$, alors $n-x$ est lui aussi premier.

La probabilité qu'un nombre x inférieur à $\dfrac{n}{2}$ soit premier est fournie par le théorème des nombres premiers ; elle vaut :

$$\frac{\frac{n}{2}}{ln\left(\frac{n}{2}\right)}$$

Supposons maintenant que x est premier. Etudions le non-partage d'un reste au moins entre x et n dans les divisions par les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$.

Puisque x est premier, on sait au moins qu'il n'a aucun reste nul dans toute division par un nombre premier inférieur à $\sqrt{n}$.

Dans une division par 3, il lui reste 2 possibilités de reste (1 et 2), et il a une chance sur deux (i.e. 1/2) d'obtenir l'un ou l'autre.

Dans une division par 5, il lui reste 4 possibilités de reste (1, 2, 3 ou 4), et il a une chance sur 4 (i.e. 1/4) d'obtenir l'un ou l'autre.

Dans une division par 7, il lui reste 6 possibilités de reste (1, 2, 3, 4, 5 et 6), et il a une chance sur 6 (i.e. 1/6) d'obtenir l'un ou l'autre.

Plus généralement, dans une division par p, il lui reste $p-1$ possibilités de reste $(1, 2, \ldots, \; p-1)$, et il a une chance sur $p-1$ (i.e. 1/(p-1)) d'obtenir l'un ou l'autre.

Tous ces événements ayant des probabilités indépendantes, la probabilité d'obtenir leur conjonction est le produit des probabilités de chaque événement séparé (les événements considérés étant "x et n ont même reste dans une division par 3", "x et n ont même reste dans une division par 5", etc.).

Ce produit s'écrit :

$$\prod_{p\ premier\ <\sqrt{n}} \frac{1}{p-1}$$

On peut le réécrire :

$$\prod_{p\ premier\ <\sqrt{n}} \frac{1}{p^{-(-1)}-1}$$

puis

$$-\prod_{p\ premier\ <\sqrt{n}} \frac{1}{1-p^{-(-1)}}$$

et l'on reconnaît alors $-\zeta(-1)$. Ramanujan a démontré que $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$. La note [1] fournit une démonstration simple de ce fait.

On obtient donc comme probabilité globale qu'un nombre x soit d'une part premier, et d'autre part ne partage aucun de ses restes avec n dans une division par un nombre premier inférieur à $\sqrt{n}$ [2] :

$$\frac{\frac{n}{2}}{ln\left(\frac{n}{2}\right)} \times (-\zeta(-1))$$

soit :

$$\frac{n}{2\ ln\ n - 2\ ln\ 2} \times \frac{1}{12}.$$

Ceci semble rendre la conjecture de Goldach vraie à partir de $n = 92$ [3].

1. Par définition $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ...$ On remarque qu'en faisant la différence terme à terme :

$$\begin{aligned} S - B = \quad & 1 + 2 \quad +3 + 4 \quad +5 + 6 \quad ... \\ & -1 + 2 \quad -3 + 4 \quad -5 + 6 \quad ... \\ = \quad & 0 + 4 \quad +0 + 8 \quad +0 + 12 \quad ... = 4(1 + 2 + 3 + ...) = 4S \end{aligned}$$

Donc $S - 4S = B$, i.e. $-3S = B$, d'où $S = -\frac{B}{3} = -\frac{\frac{1}{4}}{3}$ Ainsi, on retrouve le résultat attendu : $S = -\frac{1}{12}$.

2. Le fait pour x de ne partager aucun reste avec n dans les divisions par les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$ n'a rien à voir avec le fait d'être premier à n. Cette condition est nécessaire (i.e. *impliquée*) mais non suffisante (i.e. *impliquante*). Par exemple, 17 et 81, dont la somme vaut 98, sont tous les deux premiers à 98, mais ils n'en sont pas pour autant des décomposants de Goldbach (de 98) puisque 17 partage le reste de 2 avec 98 lorsqu'on les divise par 3 (Gauss écrit cela $17 \equiv 98\ (mod\ 3)$, c'est lui qui a attiré l'attention de tous sur l'importance de travailler dans les corps premiers).

3. $\frac{92}{2\ ln\ 92 - 2\ ln\ 2}.\frac{1}{12} = 1.0012254835$ alors que $\frac{90}{2\ ln\ 90 - 2\ ln\ 2)}.\frac{1}{12} = 0.9851149163$.