Réécrire (Denise Vella-Chemla, 6.12.2019)

On cherche à démontrer la conjecture de Goldbach. La section qui suit a été rédigée formellement par Leila Schneps (je lui avais envoyé la note ici http://denisevellachemla.eu/fibres-inter.pdf), je la remercie vivement de m'avoir offert son aide.

1. Caractérisation des décomposants de Goldbach d'un nombre pair

Fixons un nombre pair n supérieur à 4, double d'un nombre composé (car les doubles de nombres premiers vérifient trivialement la conjecture). Pour tout nombre premier p_k entre 3 et $\sqrt{n}$, notons $F(p_k, n)$ l'ensemble des entiers m qui sont :

i) impairs,

ii) compris entre $\sqrt{n}$ et $n/2$,

iii) non congrus à 0 modulo p_k (i.e. non divisibles par p_k),

iv) non congrus à n modulo p_k (i.e. le reste après division de m par p_k n'est pas égal au reste après division de n par p_k).

On pose maintenant $D(n) = \cap F(p_k, n)$, c'est l'intersection des ensembles $F(p_k, n)$ pour tous les premiers p_k compris entre 3 et $\sqrt{n}$.

Démontrons que si $D(n)$ est non vide, il ne contient que des nombres premiers.

Lemme 1 : Soit m un entier positif impair. Si m n'est divisible par aucun nombre premier compris entre 3 et $\sqrt{m}$, alors m est premier.

Démonstration : Supposons que m ne soit pas premier. Alors il existe un nombre premier $p < m$ qui divise m. Mais on sait que p n'est pas compris entre 3 et $\sqrt{m}$, donc $p > \sqrt{m}$. On pose $k = m/p$. On a donc $kp = m$. Si $k \geq \sqrt{m}$, alors puisqu'on a aussi $p > \sqrt{m}$, on obtient $kp > m$, ce qui est impossible. On doit donc avoir $k < \sqrt{m}$. Mais comme tout entier, l'entier k est divisible par un nombre premier $q \leq k$. Comme q divise k et k divise m, on a que q divise aussi m, et comme $k \leq \sqrt{m}$, on a que $q \leq \sqrt{m}$, ce qui contredit notre hypothèse de départ que m n'est divisible par aucun premier $\leq \sqrt{m}$. QED.

Appliquons ce résultat maintenant à $D(n)$ pour obtenir que $D(n)$ ne contient que des nombres premiers.

Lemme 2 : Si $D(n)$ est non vide, il ne contient que des nombres premiers.

Démonstration : Soit $m \in D(n)$. Alors m est impair et $m \leq n/2$. On sait par le lemme 1 que si m n'est divisible par aucun premier compris entre 3 et $\sqrt{m}$, alors m est premier. Mais par la définition de $D(n)$, on sait déjà que m n'est divisible par aucun premier compris entre 3 et $\sqrt{n}$, et puisque $m < n$, on a $\sqrt{m} < \sqrt{n}$ et donc a fortiori m n'est divisible par aucun premier compris entre 3 et $\sqrt{m}$, donc par le lemme 1, m est bien premier. QED.

Lemme 3 : Si $D(n)$ est non vide et m appartient à $D(n)$, alors $n - m$ est premier.

Démonstration : On commence par montrer qu'aucun nombre premier p_k compris entre 3 et $\sqrt{n}$ ne divise $n - m$. En effet, si $n - m$ est divisible par p_k, alors m est congru à n modulo p_k, ce qui contredit le fait que m appartient à $D(n)$. Ensuite, on note que puisque $n - m < n$, on a $\sqrt{n-m} < \sqrt{n}$ et donc a fortiori, $n-m$ n'est divisible par aucun premier $\leq \sqrt{n-m}$, donc par le lemme 1, $n-m$ est bien un nombre premier.

Si $D(n)$ est non vide, alors n vérifie la conjecture de Goldbach.