

Une découverte géométrique concernant certaines décompositions de Goldbach (Denise Vella-Chemla, 17 août 2023).

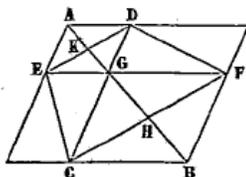
On s'intéresse aux trois décompositions de Goldbach de 98 que sont  $19 + 79 = 31 + 67 = 37 + 61$ .

On trouve d'abord dans le livre "La géométrie grecque" de Paul Tannery aux éditions Jacques Gabay la figure suivante, vers la toute fin du livre (ce livre de géométrie ne contient que deux figures) :

**Ce lemme est la réciproque d'Euclide, I, 43. Il s'agit de prouver que, si un parallélogramme  $AB$  est découpé en quatre autres  $ADGE$ ,  $DF$ ,  $FGCB$ ,  $CE$ , en sorte que  $DF$  et  $CE$  soient équivalents, le sommet commun  $G$  sera sur la diagonale  $AB$  (*fig. 1*).**

**Pour le prouver, Héron prolonge  $AG$  jusqu'à la rencontre en  $H$  avec  $FC$ , et joint  $HB$ . Il s'agit de prouver que  $HB$  est dans le prolongement de  $AH$ .**

Fig. 1.



Les autres lignes de la figure étant tracées, « les aires  $DF$ ,  $EC$  étant égales, les triangles  $DGF$ ,  $ECG$  seront équivalents. Ajoutant à chacun le triangle  $GCF$ , les triangles  $DCF$ ,  $ECF$  seront équivalents. Comme ils ont même base  $CF$ , d'après (40),  $CF$  sera parallèle à  $DE$ . Mais, d'après (34), (29) et (26), les triangles  $AEK$ ,  $DKG$  seront égaux : donc  $EK = KD$ ; donc, d'après le lemme II,  $CH = HF$ . Mais (34)  $BF = CG$  et les angles  $BFH = HCG$ . Donc (4) les triangles sont égaux,  $BH = HG$  et les angles  $BHF = CHG$ . Ajoutant de part et d'autre l'angle  $GHF$ , la somme des angles  $CHG + GHF = BHF + GHF$ . Mais la première somme est égale à deux droits, donc aussi la seconde. Ainsi, du point  $H$  de la droite  $CF$ , on a mené, de part et d'autre de cette droite,  $HA$  et  $HB$  qui font avec elle et d'un même côté des angles dont la somme est de deux droits. Donc  $HA$  et  $HB$  sont en ligne droite ».

C. Q. F. D.

FIGURE 1 : page 172 du livre "Géométrie grecque" de Paul Tannery

Alors on utilise GeoGebra, on reproduit les parallélogrammes de Héron, et on prend quelques mesures.

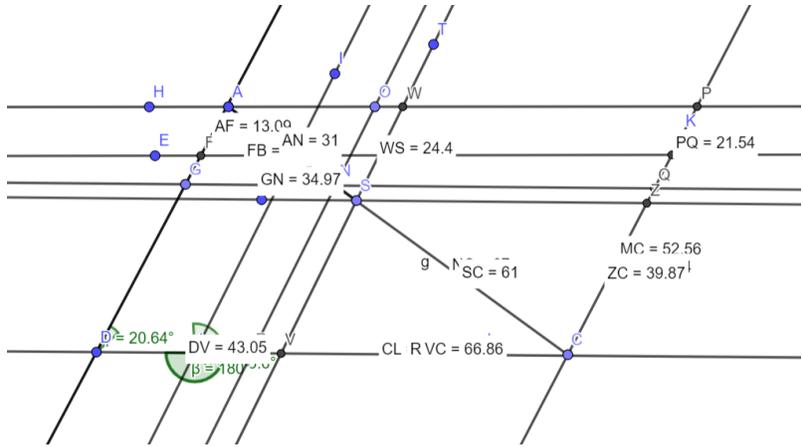


FIGURE 2 : *essai en GeoGebra avec des parallélogrammes*

Enfin, on “rectangule” pour n’avoir qu’une solution à étudier. Ça donne cette figure un peu brouillonne.

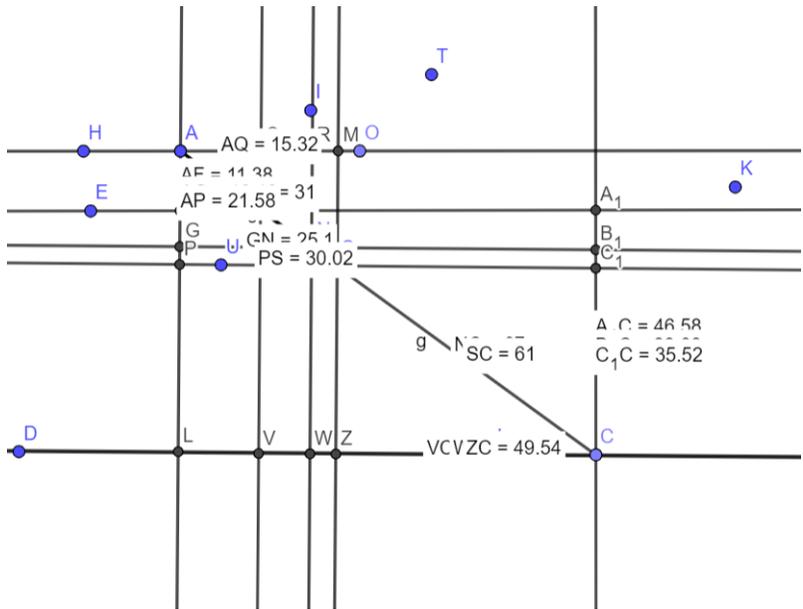


FIGURE 3 : *essai en GeoGebra avec des rectangles*

Voyons dans un tableau la valeur du nombre premier recherché  $p$ , les valeurs  $a$  et  $b$  proposées par **GeoGebra** pour les côtés du rectangle dont ce nombre premier est la diagonale (dans un premier temps, intéressons-nous aux seuls nombres premiers décomposants de Goldbach de 98) :

$p$	$a$	$b$	$c$	$98 - p$	$a$	$b$	$c$
19	11.38	15.32	19.08	79	46.58	64.24	79.35
31	18.19	25.1	30.998	67	39.03	54.46	67.0017
37	21.58	30.02	36.97	61	35.52	49.54	60.9580

Et là, les nombres, obtenus par la fonctionnalité de recherche de mesure des segments offerte par **GeoGebra**, interpellent, on ne peut pas ne pas constater des coïncidences troublantes au niveau

des parties fractionnaires, alors on approxime les parties fractionnaires des nombres proposés par **GeoGebra** par des parties fractionnaires connues (les demis, les quarts, les huitièmes, les tiers, les neuvièmes, et leurs multiples ...).

Pour obtenir 19, ou avoisinant, on va prendre  $11 + \frac{1}{3}$  au lieu de 11.38 (qui est d'ailleurs approximatif) et  $15 + \frac{1}{3}$  en place de 15.32.

Pour obtenir 79, son complémentaire, au lieu de 46.58, on va prendre  $46 + \frac{1}{2}$  et au lieu de 64.24, on va prendre  $64 + \frac{1}{4}$ .

Et on réitère pour la décomposition  $31 + 67$  et pour la décomposition  $37 + 61$ .

Voici le tableau qui montre les valeurs des diagonales pour les valeurs de remplacement  $d$ ,  $e$  et  $f$  en place des  $a$ ,  $b$ ,  $c$ <sup>1</sup>.

$p$	$d$	$e$	$f$	$98 - p$	$d$	$e$	$f$
19	$11 + \frac{1}{3}$	$15 + \frac{1}{3}$	19.067	79	$46 + \frac{1}{2}$	$64 + \frac{1}{4}$	79.31149
31	$18 + \frac{1}{9}$	$25 + \frac{1}{9}$	30.96094	67	39	$54 + \frac{1}{2}$	67.0167
37	$21 + \frac{2}{3}$	$30 + \frac{1}{9}$	37.096133	61	$35 + \frac{1}{2}$	$49 + \frac{1}{2}$	60.91387

Ce qui surprend, c'est que pour les largeurs (petits côtés des rectangles), on a utilisé exclusivement des puissances de 3 pour obtenir leur partie fractionnaire, alors que pour les longueurs (grands côtés des rectangles), on a utilisé exclusivement des puissances de 2 pour obtenir leur partie fractionnaire, et on voit qu'ainsi, on a bien approximé les nombres premiers décomposants de Goldbach de 98.

Cet exemple est à relier à la musique : les mélodies qui sont harmonieuses à notre oreille le sont parce qu'il se trouve que  $2^{19} \simeq 3^{12}$ <sup>2</sup>. Dans l'exemple présenté ci-dessus, ce sont les proportions des rectangles "de Goldbach" qui pourraient être harmonieuses : elles mettraient en rapport des longueurs proportionnelles, les unes à base de puissances de 3 (y compris négatives) et les autres faisant intervenir des puissances de 2.

On complète maintenant le tableau par les mesures pour tous les impairs pour voir si les décompositions de Goldbach (i.e. de 98 en somme de deux nombres premiers) se distinguent des autres décompositions (i.e. sommes de deux impairs contenant un nombre composé au moins).

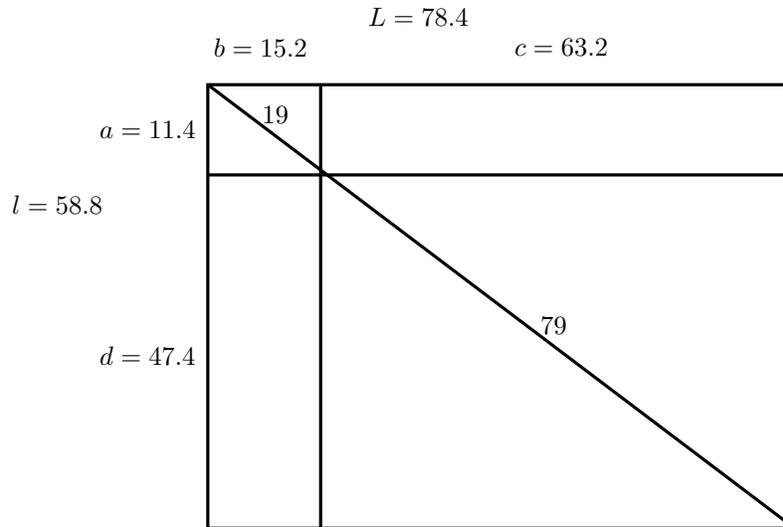
On a linéarisé le problème : la formule d'obtention des largeurs des rectangles est  $\frac{3}{5} + \frac{6}{5}k$  et celle d'obtention des longueurs est  $\frac{4}{5} + \frac{8}{5}k$ .

1. calculées par la formule de Pythagore  $\sqrt{l^2 + L^2}$  dans un rectangle de largeur  $l$  et de longueur  $L$ .

2. On pourra se reporter à , <http://denise.vella.chemla.free.fr/transc-AC-dualite.pdf> ou encore à l'article de blog *Music of spheres* <http://noncommutativegeometry.blogspot.com/2012/>, ou bien à la transcription d'une vidéo de Pierre Cartier à laquelle on n'a plus accès <http://denise.vella.chemla.free.fr/musique-spheres-PC-EK.pdf> et qui était accessible précédemment sur le site de Jean-Michel Kantor.

$k$	$\frac{3}{5} + \frac{6}{5}k$	$\frac{4}{5} + \frac{8}{5}k$	$n - k$	$a + kb$	$a' + kb'$
1	0.6	0.8	97	58.2	78.6
3	1.8	2.4	95	57	76
5	3	4	93	35.2	74.4
7	4.2	5.6	91	54.6	72.8
9	5.4	7.2	89	53.4	71.2
11	6.6	8.8	87	52.2	69.6
13	7.8	10.4	85	51	68
15	9	12	83	49.8	66.4
17	10.2	13.6	81	48.6	64.8
19	11.4	15.2	79	47.4	63.2
21	12.6	16.8	77	46.2	61.6
23	13.8	18.4	75	45	60
25	15	20	73	43.8	58.4
27	16.2	21.6	71	42.6	56.8
29	17.4	23.2	69	41.4	55.2
31	18.6	24.8	67	40.2	53.6
33	19.8	26.4	65	39	52
35	21	28	63	37.8	50.4
37	22.2	29.6	61	36.6	48.8
39	23.4	31.2	59	35.4	47.2
41	24.6	32.8	57	34.2	45.6
43	25.8	34.4	55	33	44
45	27	36	53	31.8	42.4
47	28.2	37.6	51	30.6	40.8
49	29.4	39.2	49		

Trouver les longueurs  $c$  et  $d$  en fonction de  $a$  et  $b$  est un peu prise de tête, on a ce dessin-là :



et ces formules-là :

$$\begin{aligned}
 98^2 &= (a + d)^2 + (b + c)^2 \\
 &= a^2 + 2ad + d^2 + b^2 + 2bc + c^2
 \end{aligned}$$

On connaît les valeurs de  $a$  et  $b$  et leurs formules linéaires de calcul, on arrive à une formule telle que celle ci-dessous, on doit se débrouiller...

$$98 - a^2 - b^2 = d^2 + \left(\frac{6}{5} + \frac{12}{5}k\right)d + c^2 + \left(\frac{8}{5} + \frac{16}{5}k\right)c$$

Il s'agira maintenant de voir avec ce qu'on a réalisé si les décompositions de Goldbach n'ont pas un comportement particulier (de minimisation ou maximisation par exemple) des distances aux nombres de parties fractionnaires en lien avec 3 pour les largeur et longueur du rectangle supportant le petit sommant, et en lien avec 2 pour les largeur et longueur du rectangle supportant le grand sommant.

(poursuite du travail, 19.8.2023)

On utilise d'abord google, puis python pour voir l'allure des surfaces  $z = x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy$  et  $z = 98$  qu'on a parcourues sans trop le réaliser ci-dessus.

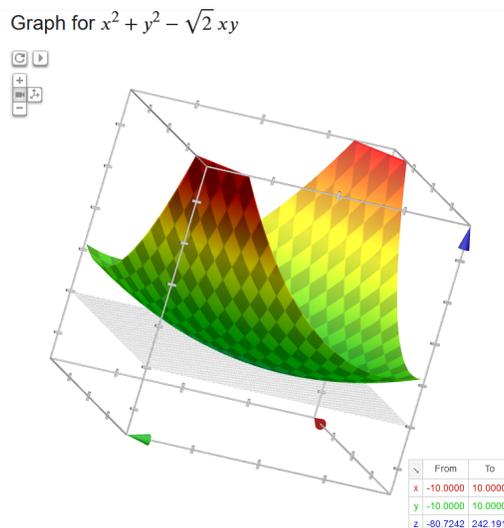


FIGURE 4 : *essai avec le grapheur de fonctions google*

surface multicol.  $z=x^2+y^2-\sqrt{2}xy$  surface bleue  $z=98$

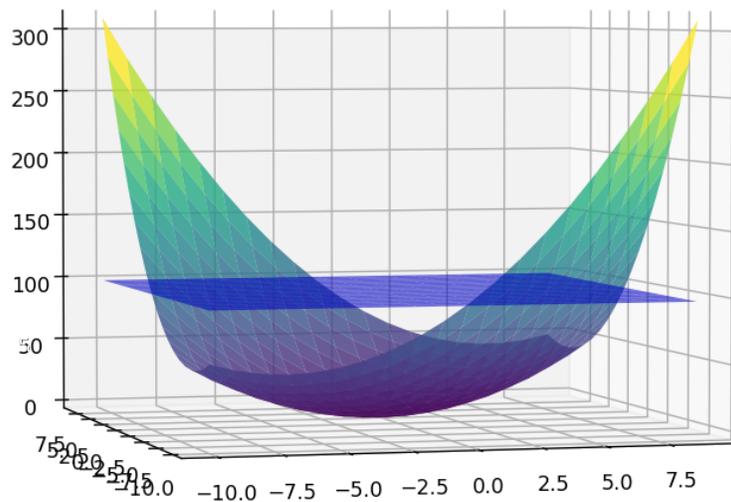


FIGURE 5 : *essai en python*

Programme d'obtention de la surface (dite "hamac" !) :

```
import numpy as np
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import matplotlib.pyplot as plt
import math
from numpy import sqrt
from matplotlib import cm

def f(x, y):
    return x**2 + y**2 - sqrt(2)*x*y

def g(x,y):
    return x*0 + 98

x = np.arange(-10, 10)
y = np.arange(-10, 10)
X, Y = np.meshgrid(x, y)
Z = f(X, Y)

xp = np.arange(-10, 10)
yp = np.arange(-10, 10)
XP, YP = np.meshgrid(xp, yp)
ZP = g(XP,YP)

fig = plt.figure()
ax = plt.axes(projection = '3d')
ax.set_title('surface multicol.  $z=x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy$  surface bleue  $z=98$ ')
ax.plot_surface(X, Y, Z, alpha = 0.8, cmap = 'viridis')
ax.plot_surface(XP, YP, ZP, alpha = 0.6, color='blue')
plt.show()
```



FIGURE 6 : Héron à la lunette astronomique

On trouve sur la frise de certains mathématiciens ici <https://fr.mathigon.org/timeline> une courte biographie de Héron d’Alexandrie.

Héron d’Alexandrie (Ἡρόν ὁ Ἀλεξανδρῆς, premier siècle après J. C.) était un mathématicien grec et un ingénieur. Il vécut dans la ville d’Alexandrie en Égypte, et est l’un des plus grands “expérimentateurs” de l’Antiquité.

Ses inventions incluent un orgue hydraulique, des moulins à vent, des pantographes<sup>3</sup>, ainsi qu’une turbine à vapeur radiale appelée éolipile, sphère de vent ou moteur de Héron.

La formule de Héron permet de calculer l’aire d’un triangle quelconque, en utilisant juste les longueurs de ses côtés  $a, b, c$  :

$$\text{Aire} = \sqrt{\frac{\text{Périmètre}}{2} \left( \frac{\text{Périmètre}}{2} - a \right) \left( \frac{\text{Périmètre}}{2} - b \right) \left( \frac{\text{Périmètre}}{2} - \cancel{b} \right)}_c$$

---

3. un *pantographe* est un instrument composé de tiges articulées, qui sert à reproduire mécaniquement un dessin.