

## Décalages, Denise Vella-Chemla, 27 novembre 2024

On fournit pour rappel, dans le tableau ci-dessous, quelques nombres de zéros de la fonction  $\zeta$  jusqu'à tel nombre  $n$ .

$n$	$\#\{Z = s + it \text{ est un zéro non trivial de la fonction } \zeta \text{ de Riemann tel que } t \leq n\}$
100	236
200	396
500	811
1000	1419
2000	2515
5000	5447
10000	9877
20000	18046
50000	40433
100000	74920
200000	139501
500000	319387
1000000	600269
2000000	1132490

On trouve dans la littérature que Backlund a donné une formule exacte pour  $N(t)$  qui est :

$$(1) \quad N(t) = \frac{1}{\pi}\theta(t) + 1 + S(t)$$

avec  $\theta(t) = \arg \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{i}{2}t\right) - t \log(\sqrt{\pi})$  la fonction de Riemann-Siegel et  $S(t) = \frac{1}{\pi} \arg \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$ .

On teste ces formules avec le programme ci-dessous et on obtient les graphiques ci-après.

```
import mpmath
from mpmath import siegeltheta,zeta,arg
import math
from math import pi, e
import matplotlib.pyplot as plt
import time

def S(t):
    return(arg(zeta(1/2+1j*t))/pi)

def backlund(t):
    return((siegeltheta(t)/pi)+1+S(t))

def leclair(n):
    return((2*pi*(n-11/8))/lambertw((n-11/8)/e)).real
```

```

nmax = 25000
t1 = time.time()
fic = open("zeros25000",'r')
zeros = fic.readlines()
zeros = map(float,zeros)
k = 0
for k in range(nmax):
    res1 = backlund(k)
    plt.scatter(k,res1,s=4,color='red')
plt.legend(['Backlund N(t) = (Riemann-Siegel(t)/pi)+1+arg(zeta(zero(t)))/pi '])
plt.show()
t2 = time.time()
print('exec. en ',t2-t1,' s.')
```

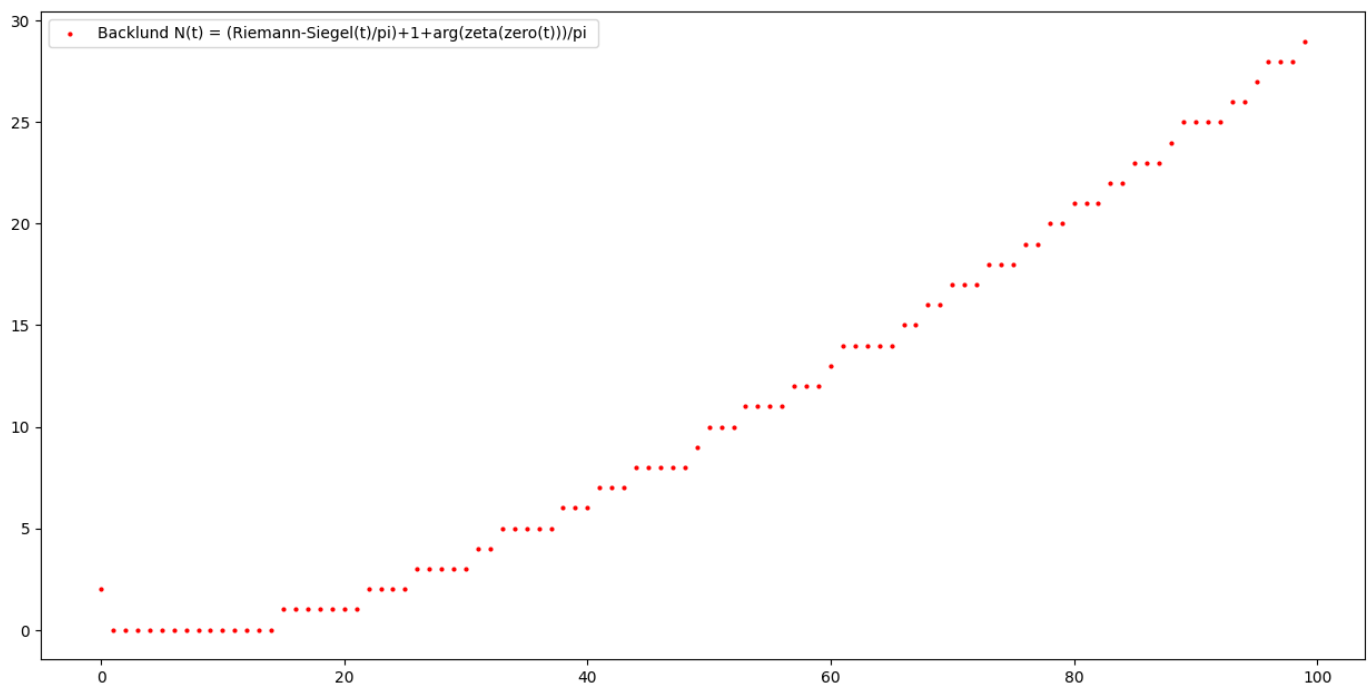


FIGURE 1

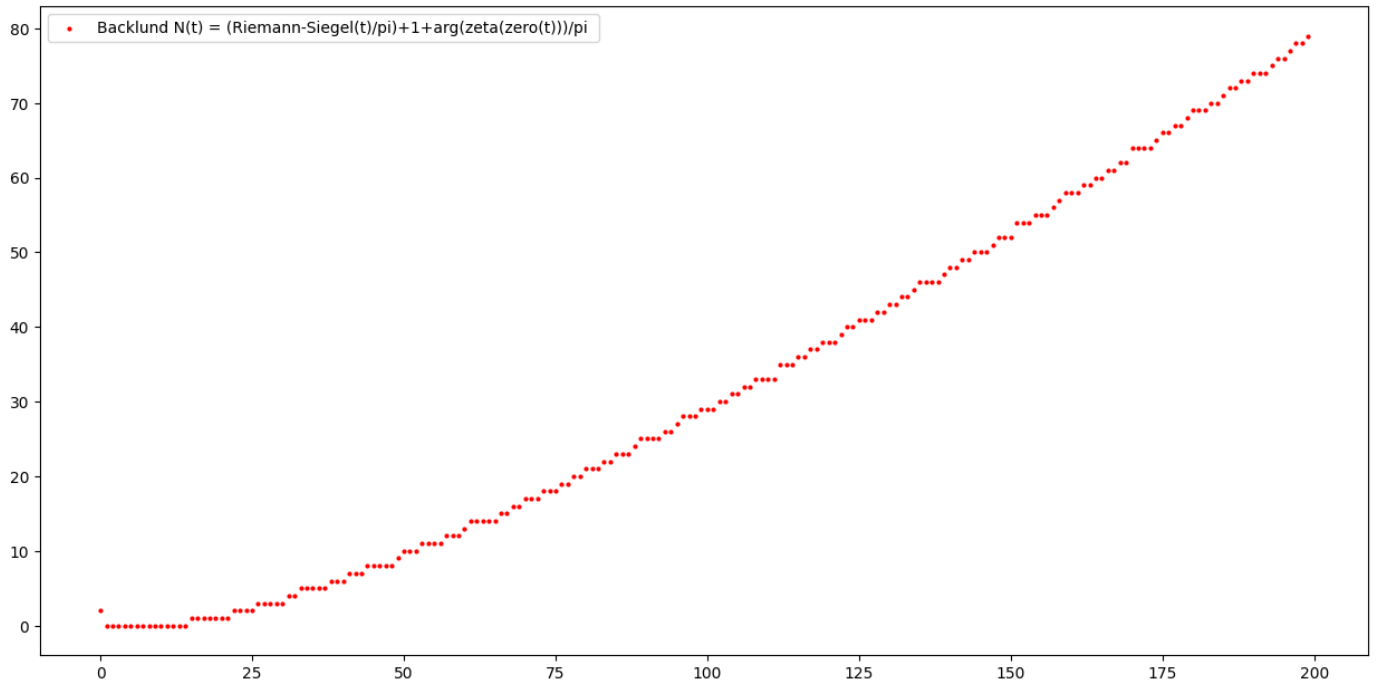


FIGURE 2



FIGURE 3

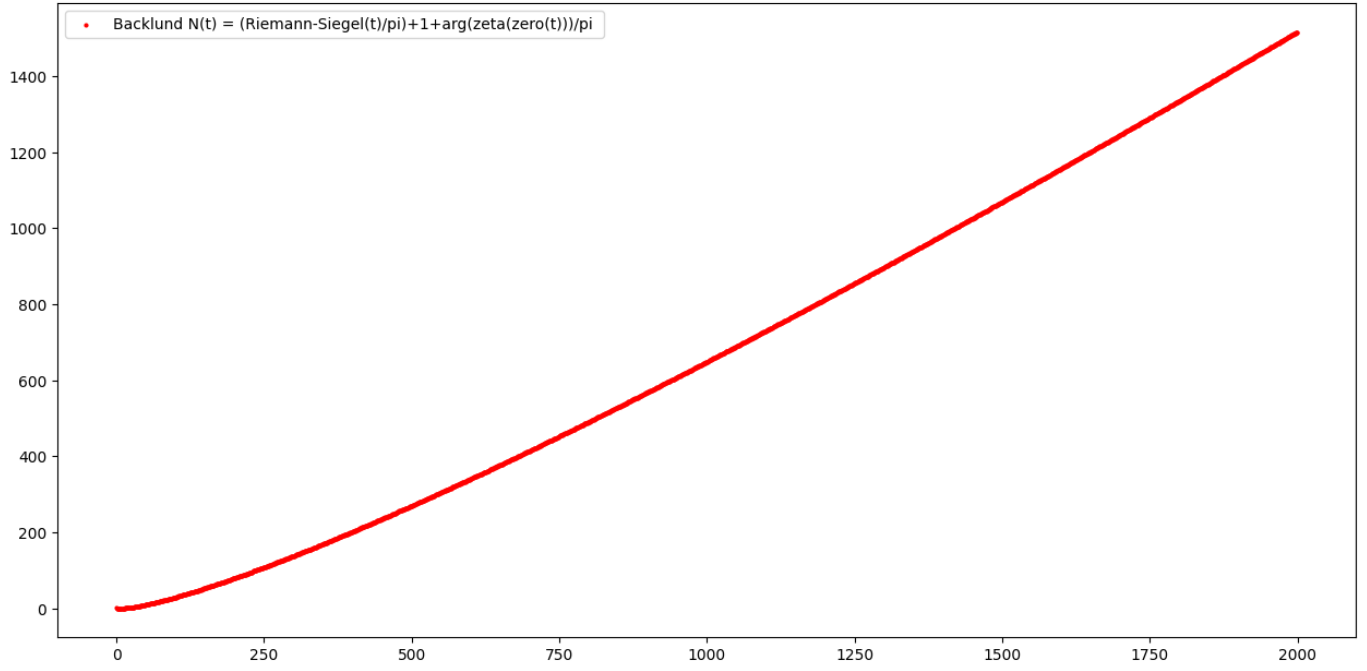


FIGURE 4

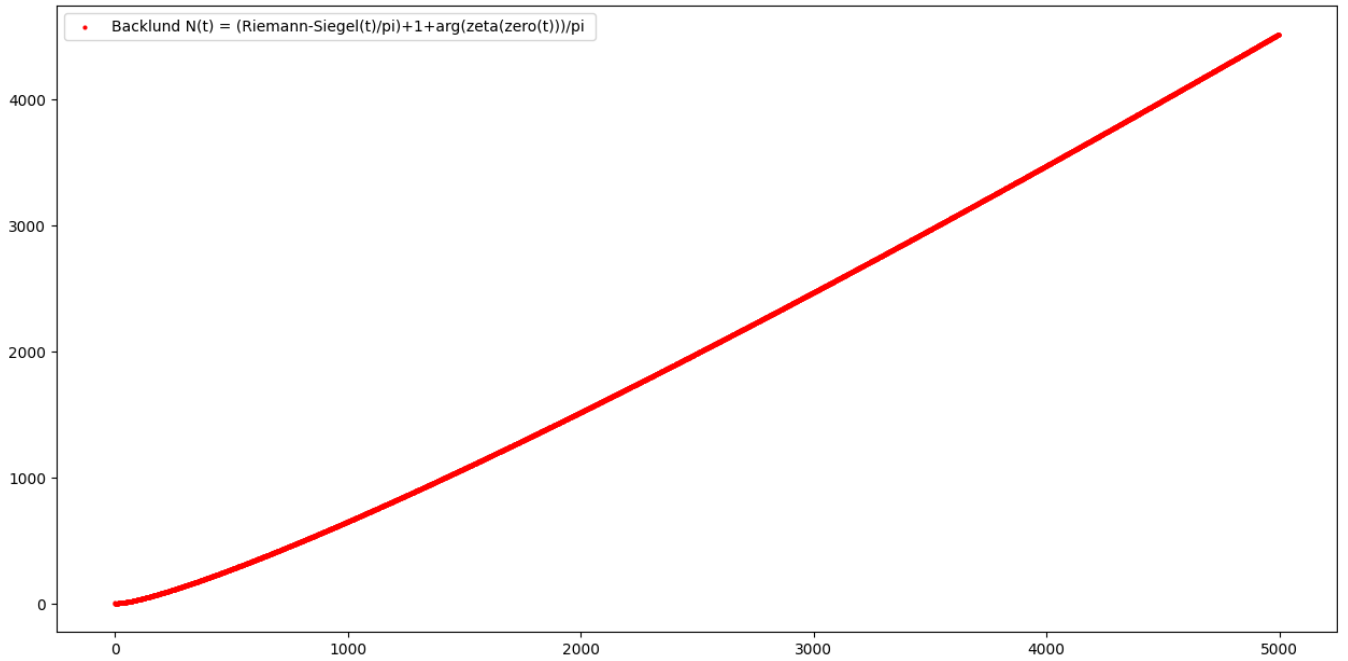


FIGURE 5

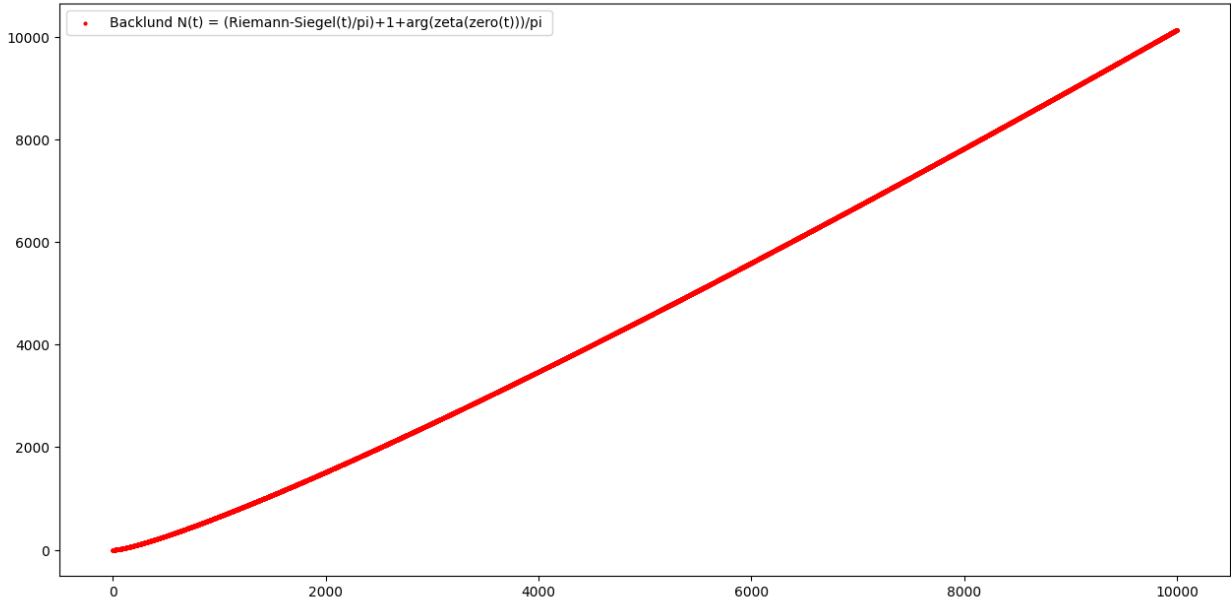


FIGURE 6

On teste également la formule fournie par França, LeClair et Mussardo <sup>1</sup>

$$(2) \quad N(t) = \frac{2\pi \left(n - \frac{11}{8}\right)}{W\left(\frac{n - \frac{11}{8}}{e}\right)}$$

pour calculer les zéros de  $\zeta$  par le programme ci-dessous

<sup>1</sup>Voir les différentes références de leur travail autour de la fonction  $\zeta$  de Riemann :

( <https://arxiv.org/pdf/1307.8395>,  
<https://arxiv.org/pdf/1407.4358>,  
<https://arxiv.org/pdf/1410.3520>,  
<https://arxiv.org/pdf/1502.06003> \*,  
<https://arxiv.org/pdf/1509.03643>,  
<https://arxiv.org/pdf/1809.06158>,  
<https://arxiv.org/pdf/2101.10336>,  
<https://arxiv.org/pdf/2406.01828> ).

```

from scipy.special import lambertw
import math
from math import pi, e
import matplotlib.pyplot as plt
import time

def fleclair(n):
    return((2*pi*(n-11/8))/lambertw((n-11/8)/e).real)

t1 = time.time()
fic = open("zeros25000",'r')
zeros = fic.readlines()
zeros = map(float,zeros)
k = 0
for zz in zeros:
    res1 = fleclair(k)
    plt.scatter(k,res1,s=4,color='red')
    plt.scatter(k,zz,s=4,color='blue')
    k = k+1
plt.legend(['fct de LeClair : f(n)=2 pi (n-11/8)/W((n-11/8)/e) ', 'zeros de zeta'])
plt.show()
t2 = time.time()
print('exec. en ',t2-t1,' s.')

```

et on obtient seulement jusqu'à 25000, les correspondances impressionnantes ci-dessous

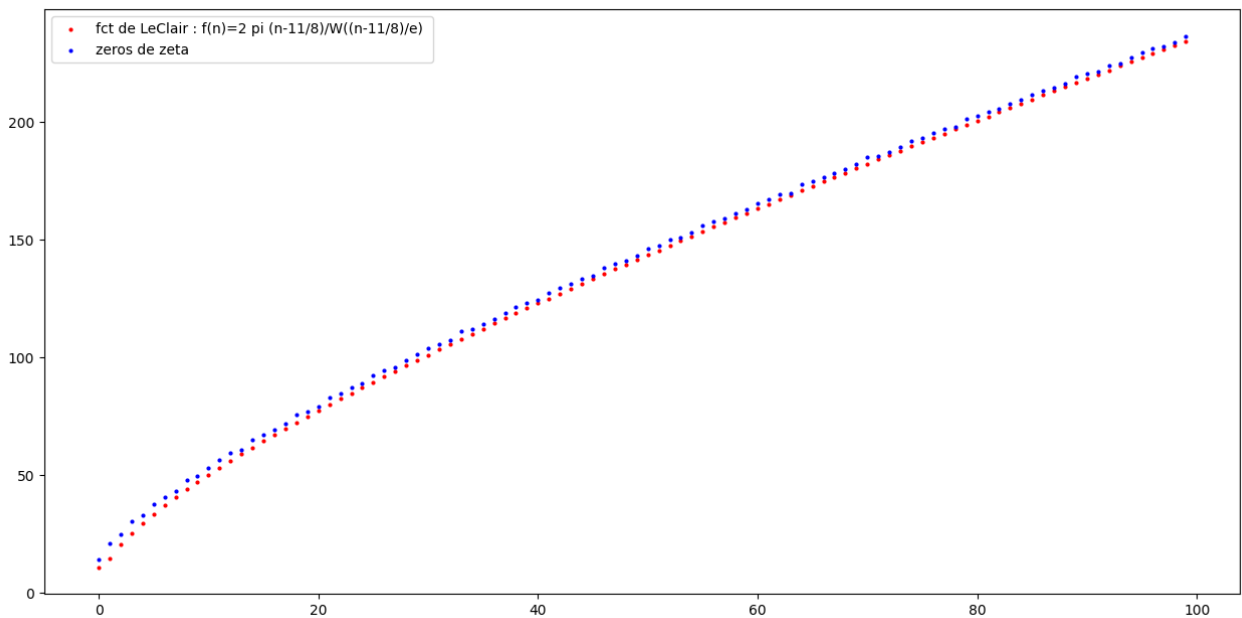


FIGURE 7

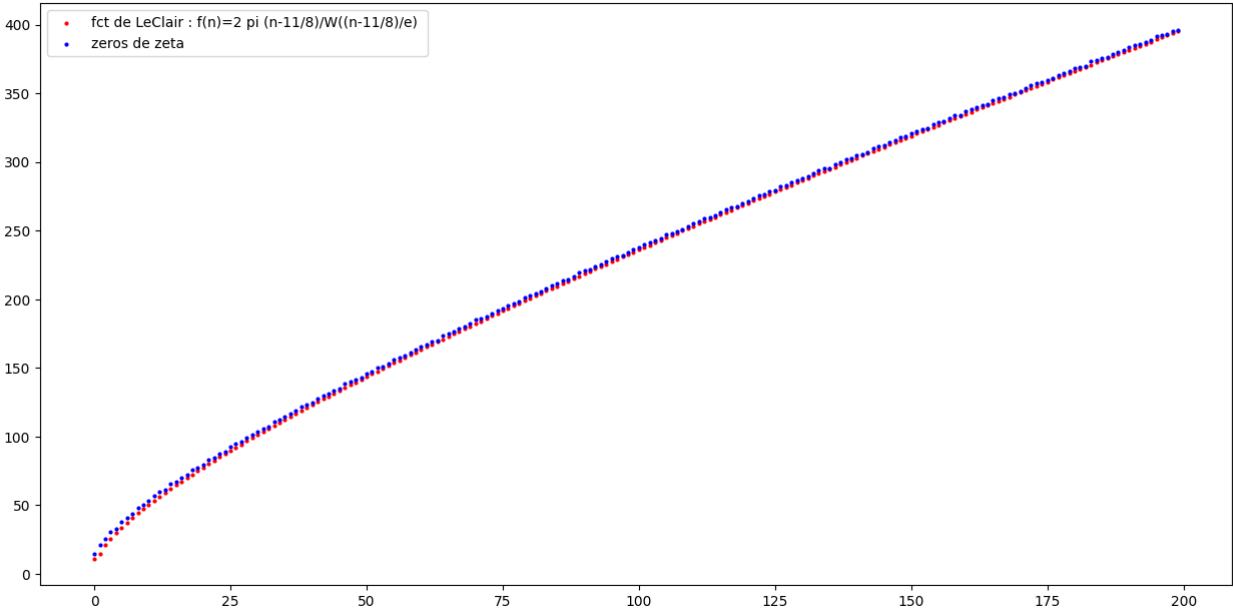


FIGURE 8

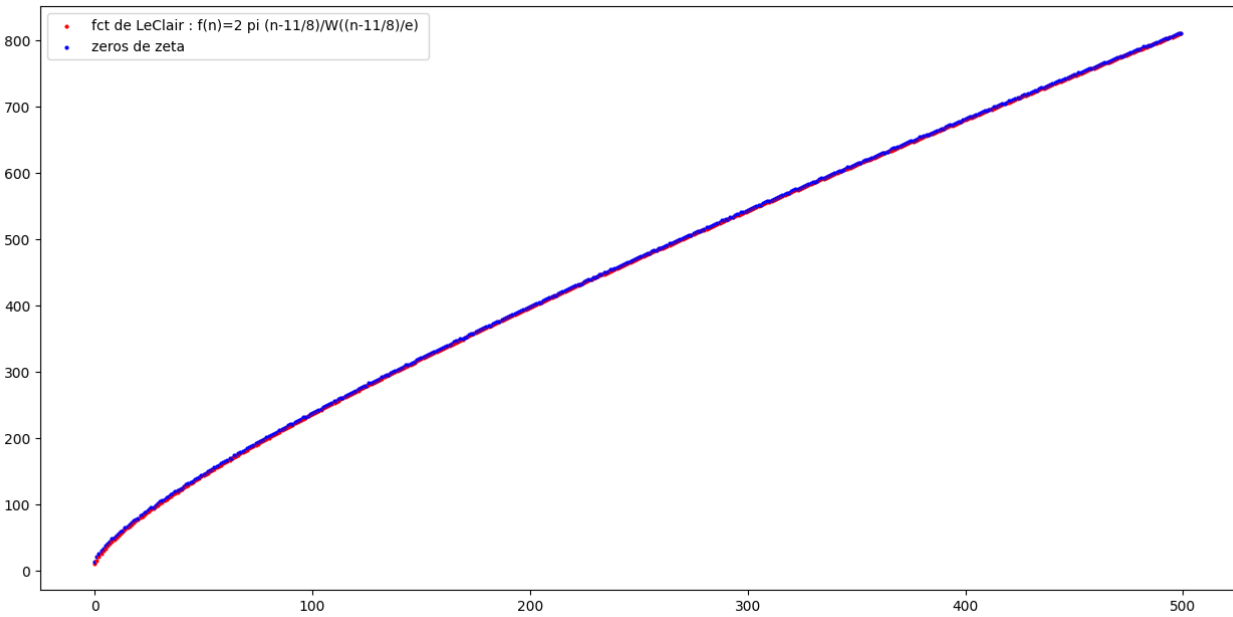


FIGURE 9

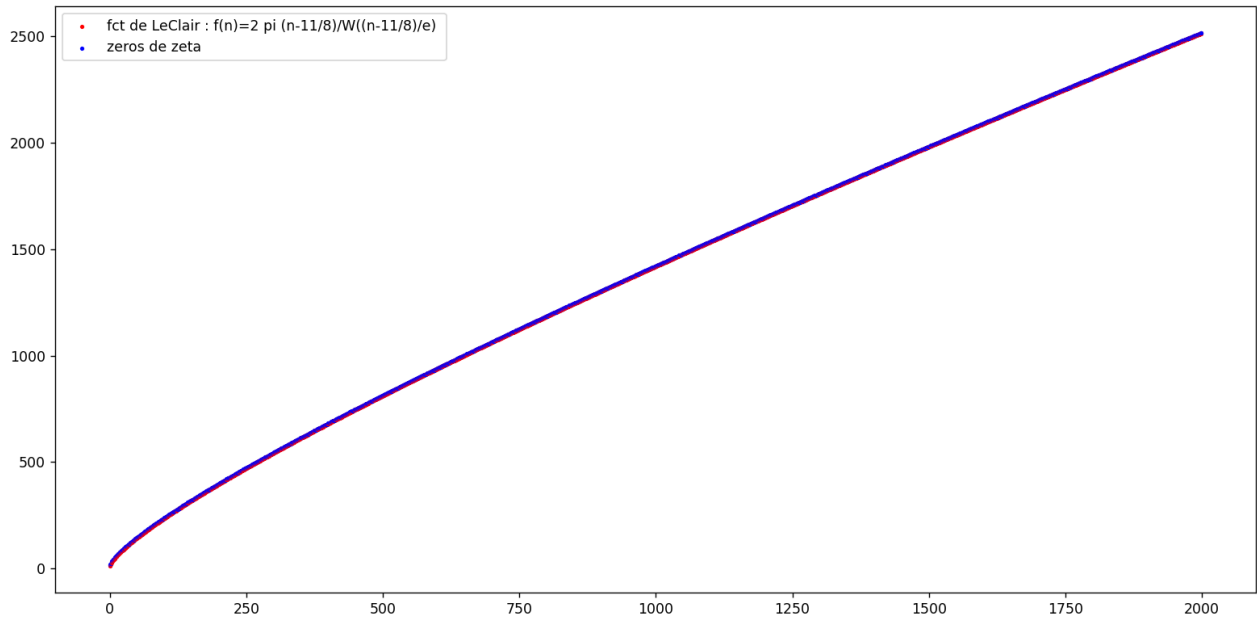


FIGURE 10

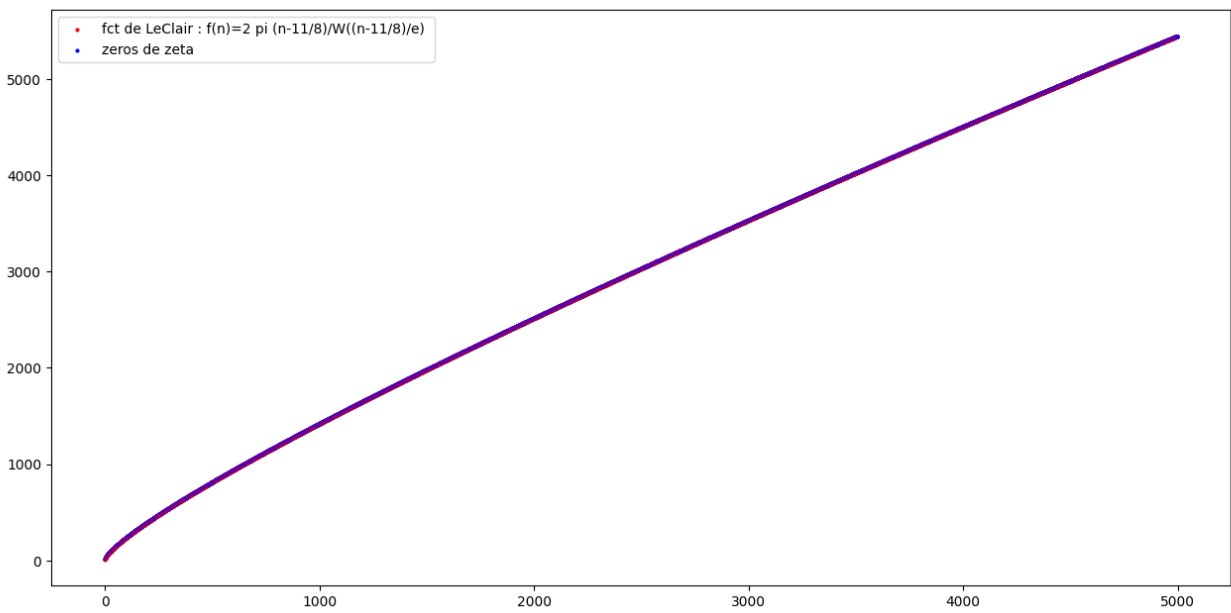


FIGURE 11



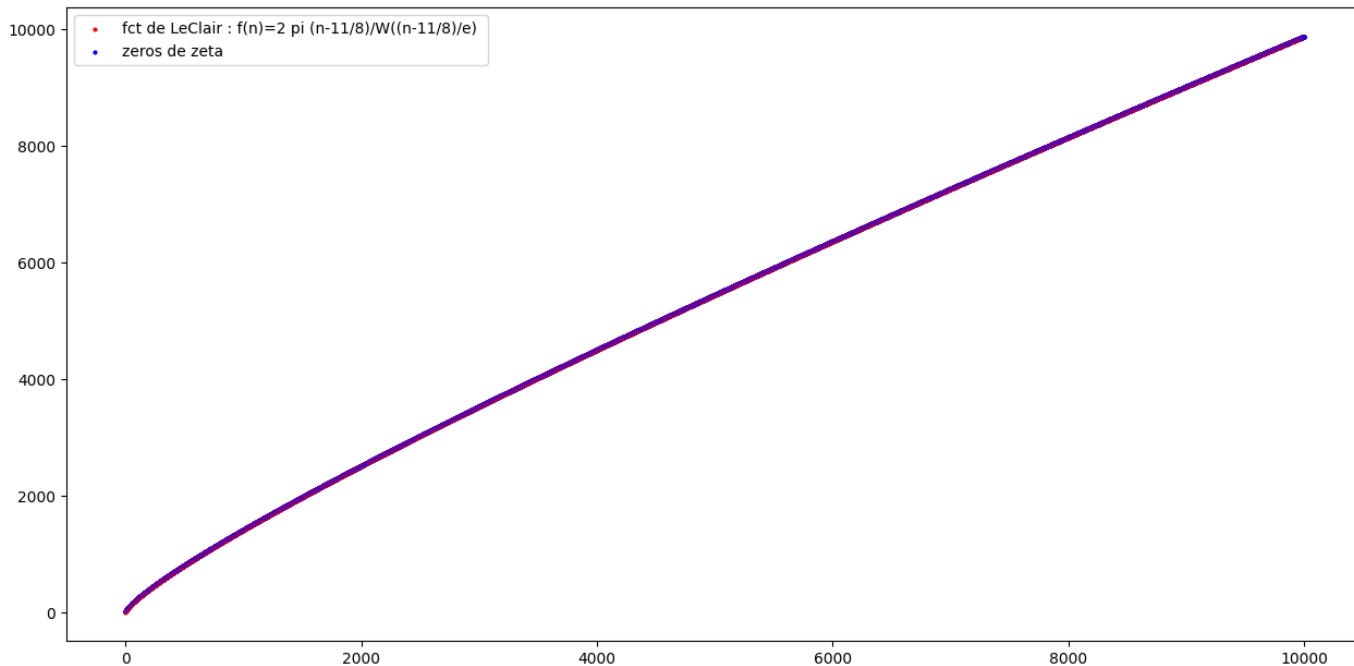
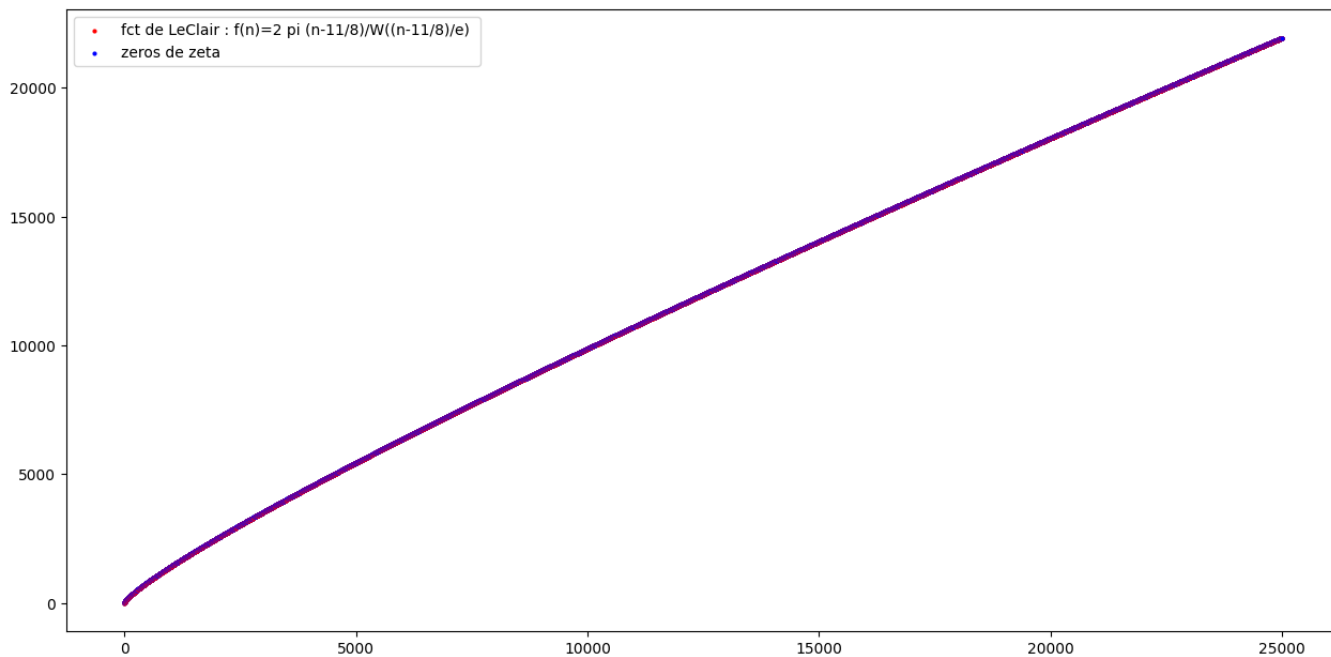


FIGURE 12



On utilise le programme `python` suivant pour vérifier les pics vers des minima locaux sur les abscisses correspondant aux parties imaginaires des zéros non triviaux de  $\zeta$  :

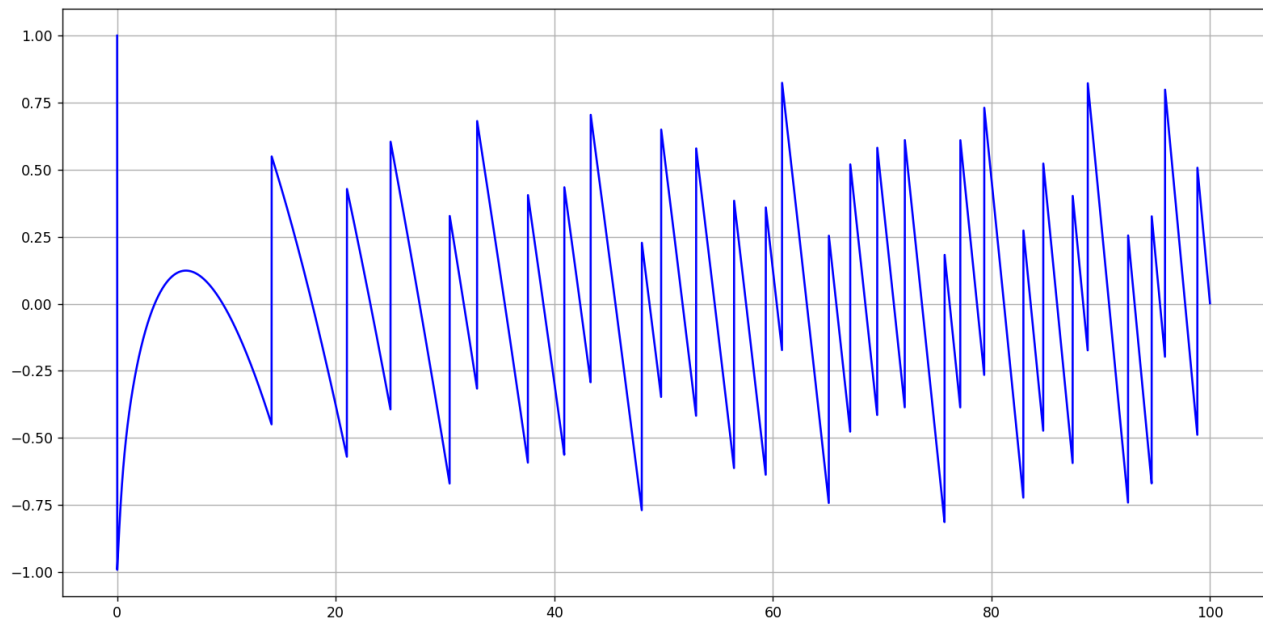
```

import mpmath
from mpmath import zeta,arg
from math import pi,e
import matplotlib.pyplot as plt

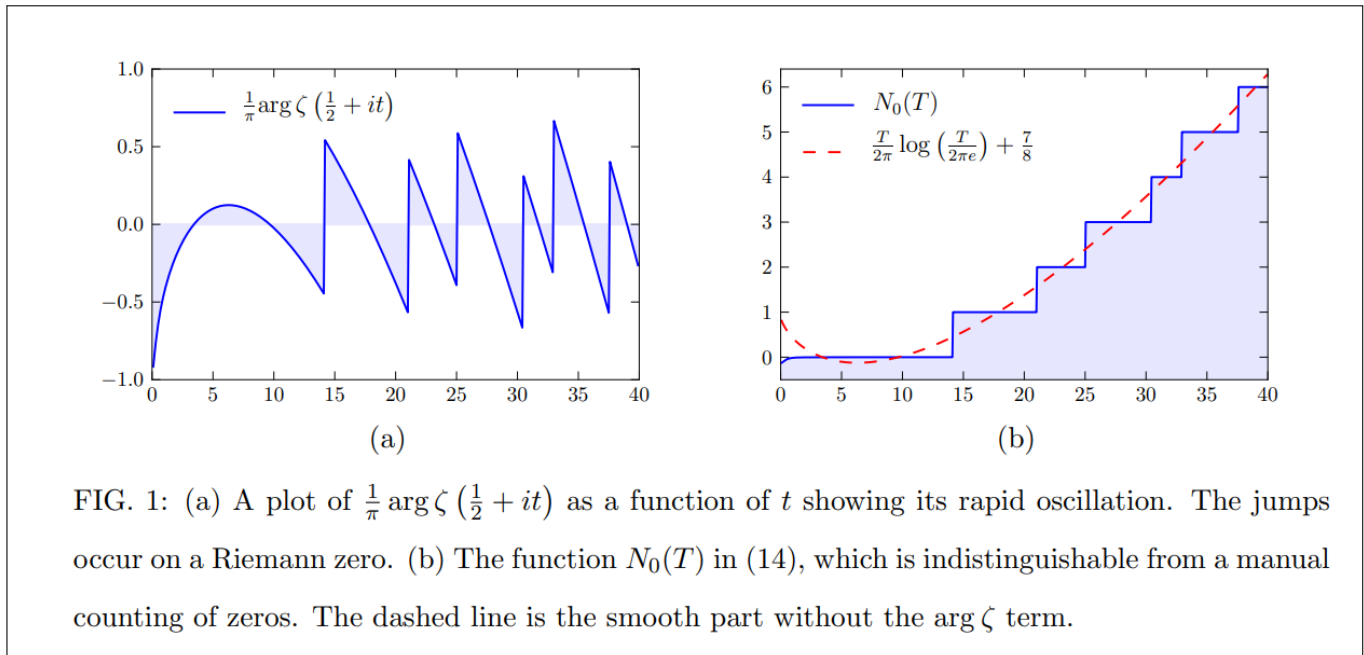
lesx = []
lesy = []
for k in range(10000):
    lesx.append(k*0.01)
for xx in lesx:
    y = (1/pi)*arg(zeta(0.5+1j*xx))
    lesy.append(y)
plt.grid(True)
plt.plot(lesx,lesy,color='blue')
plt.show()

```

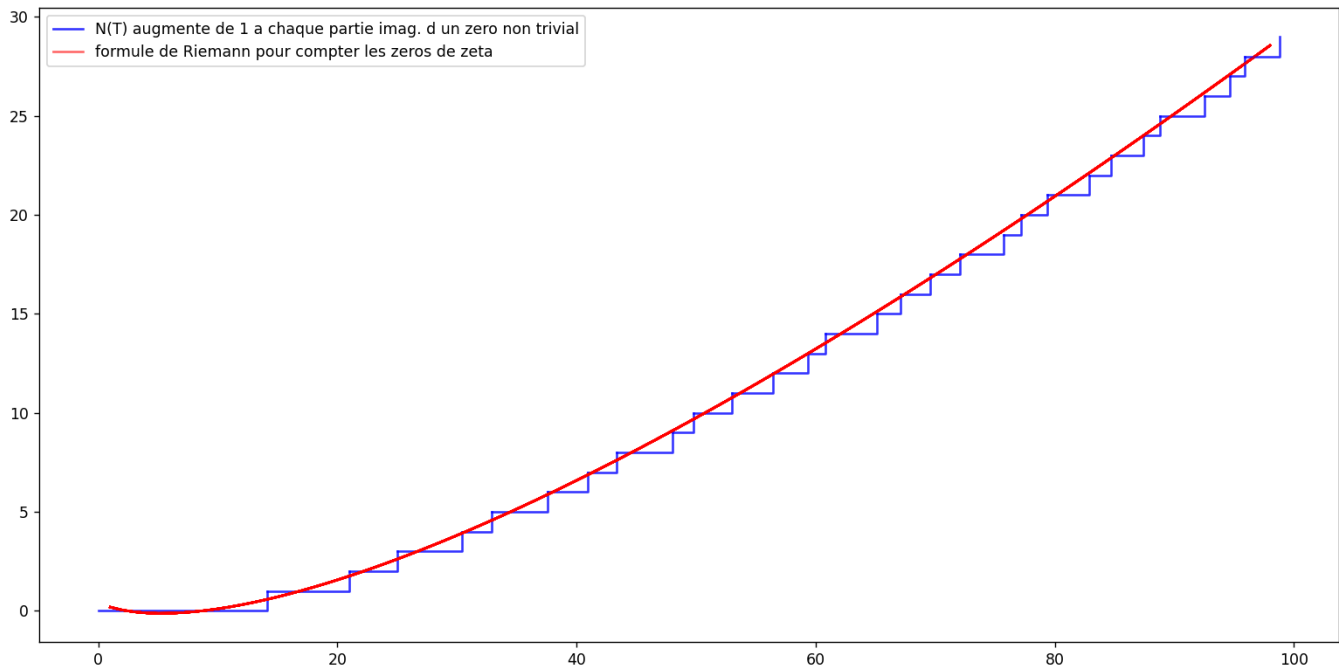
et le programme affiche le graphique prévu :



L'extrait correspondant dans l'un des articles de LeClair et al. est ci-dessous :



On programme également le second graphique :



Le problème est qu'en regardant les fonctions sur les 6 premières figures de la présente note (courbes rouges des Fig. 1 à 6) et celles des 6 figures suivantes (Fig. 7 à 12), alors qu'elles devraient normalement permettre d'obtenir sensiblement les mêmes résultats, on dirait que l'une serait plutôt la réciproque de l'autre. Mais on ne parvient pas à "réciproquer" une fonction telle que la fonction  $N(t)$  définie par l'égalité (1).

On utilise le programme ci-dessous, pour calculer la formule fournie par Riemann dans son article <sup>2</sup> : cette formule fournit le nombre de zéros de  $\zeta$  tel qu'il peut être calculé en se positionnant sur les lignes des fichiers fournis par Odlyzsko ici

[https://www-users.cse.umn.edu/odlyzko/zeta\\_tables/index.html](https://www-users.cse.umn.edu/odlyzko/zeta_tables/index.html)

(avec l'éditeur libre Gnu-Emacs, au hasard ;- ) numérotées 100, 200, 500, etc, jusqu'à 2 millions.

$$f(T) = \frac{T}{2\pi} \left( \log \left( \frac{T}{2\pi} \right) - 1 \right) + \frac{7}{8}$$

```
import math
from math import pi,e,log
import time

def N0(T):
    return((T/(2*pi))*((log(T/(2*pi))-1))+7/8

nmax = 2000000
t1 = time.time()
for k in range(1,nmax):
    print(k,' --> ',N0(k))
t2 = time.time()
print('exec. en ',t2-t1,' s.')
```

Le résultat de l'application de cette formule est à trouver dans le fichier à l'adresse

<https://denisevellachemla.eu/resultat-calcul-N-formule-Riemann.txt>.

Trouver dans ce fichier les nombres de zéros tels qu'ils sont fournis dans la table en tête de cette note peut se faire en utilisant un "Search" dans un fichier, en l'occurrence par exemple, "search" de la suite de caractères "811 -" pour trouver que 811 a pour image 100 (et non pour antécédent 100).

On teste également par le programme `python` ci-dessous que très peu loin à droite de la droite critique (sur la droite de partie réelle 0.500001), la formule de Riemann-Siegel appliquée aux parties imaginaires des zéros non triviaux de  $\zeta$  calcule bien des multiples de  $\pi$  (on effectue le calcul pour un zéro sur 1000 pour que le fichier résultant ne soit pas trop lourd).

---

<sup>2</sup>et démontrée asymptotiquement par Alain Connes pour l'opérateur qu'il a mis au point avec Henri Moscovici, voir cet article <https://arxiv.org/pdf/2402.13082> .

```

import mpmath
from mpmath import siegeltheta,zeta,arg
import math
from math import pi, e
import matplotlib.pyplot as plt
import time

fic = open("zeros2millions",'r')
zeros = fic.readlines()
zeros = map(float,zeros)
indice = 0
for z in zeros:
    if indice%1000 == 0:
        print(z,' --> ',siegeltheta(z)+arg(zeta(0.500001+1j*z)))
        print(indice,' --> ',((indice+1)-1.5)*pi)
    indice = indice+1

```

Le résultat de ce programme qui montre que l'égalité (3) ci-dessous est presque vérifiée

$$(3) \quad \theta(y_n) + \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \arg \left( \zeta \left( \frac{1}{2} + \delta + i y_n \right) \right) = \left( n - \frac{3}{2} \right) \pi$$

est à lire à cette adresse :

<https://denisevellachemla.eu/res-multiples-de-pi.pdf>.

On souhaite maintenant, car cela est intrigant, tester le dessin ci-dessous, extrait de l'un des articles dont les références ont été fournies :

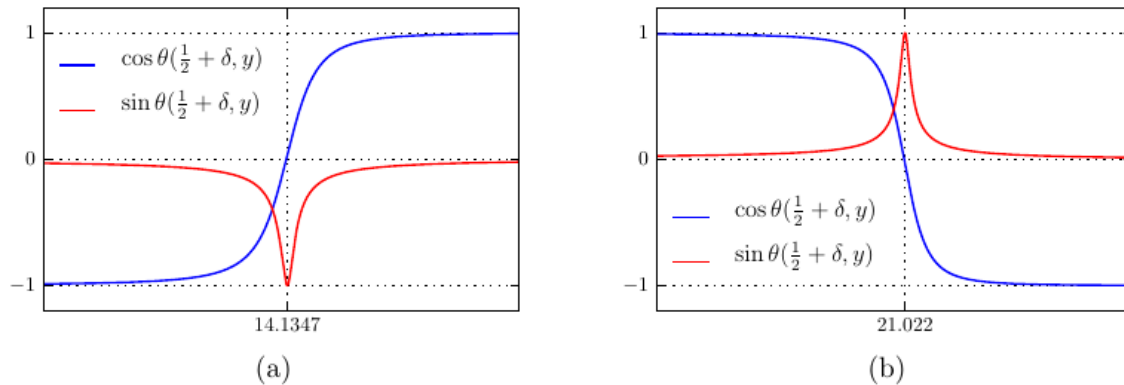


FIG. 1: Exactly on a zero we have  $\cos \theta = 0$  and  $\sin \theta = \pm 1$ . This is illustrated for the first (a) and second (b) Riemann zeros, respectively. We plot  $\cos \theta \left( \frac{1}{2} + \delta, y \right)$  and  $\sin \theta \left( \frac{1}{2} + \delta, y \right)$  versus  $y$ , for  $0 < \delta \ll 1$ .

Ce dessin indique que sur les zéros, du moins sur leur partie imaginaire, ont lieu des événements très particuliers : annulation de cosinus et minimisation ou maximisation de sinus.

On teste ceci par le programme ci-dessous :

```

import mpmath
from mpmath import siegeltheta,cos,sin
import matplotlib.pyplot as plt

fic = open("zeros2millions",'r')
zeros = fic.readlines()
zeros = map(float,zeros)
indice = 0
for z in zeros:
    print(indice,' ',z,' --> le cos = ',cos(siegeltheta(0.500001+1j*z)), ' le sin = ',
          sin(siegeltheta(0.500001+1j*z)))
    indice = indice+1

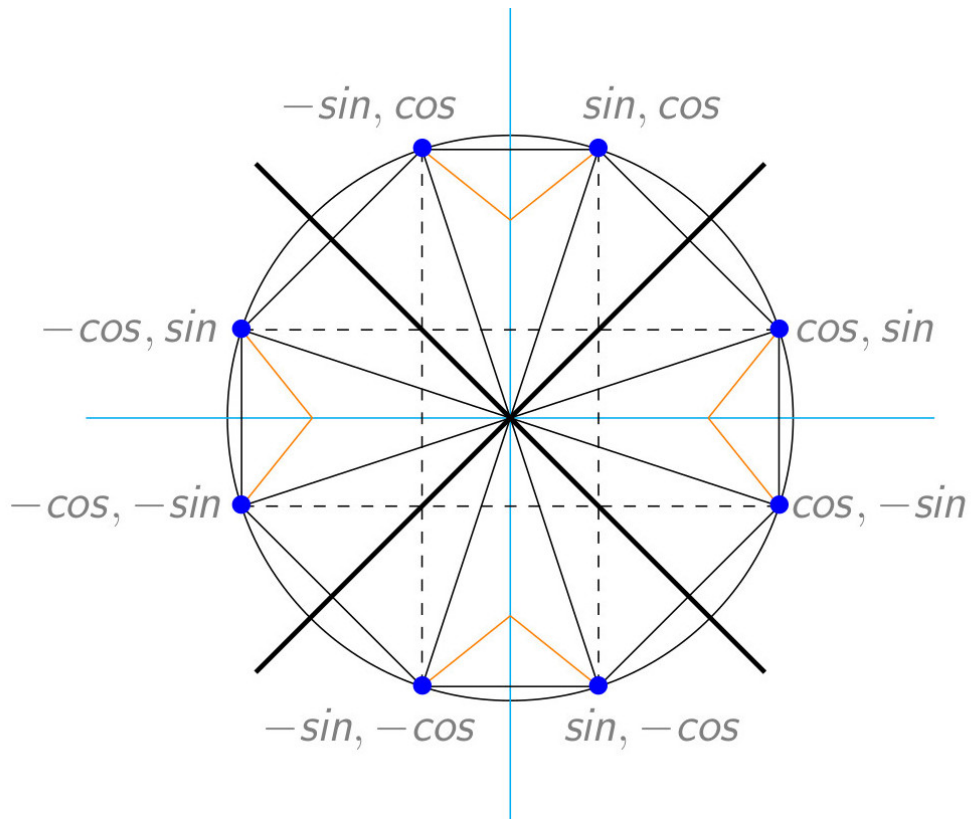
```

On constate, voir ci-dessous les 28 premières valeurs, pour les 28 premiers zéros, notamment à partir du troisième zéro (et voir les résultats du programme testé pour 2 millions de zéros ici <https://denisevellachemla.eu/resles2millionsdezeroscosetsin.txt>),

qu'il ne se passe pas tout à fait ce qui est énoncé dans l'article, mais qu'effectivement, aux zéros, le cosinus complexe et le sinus complexe s'échangent "presque", i.e. les parties entières des nombres réels ainsi que les 2 premières décimales des nombres obtenus sont égales (on n'écrit que les 2 premiers chiffres après la virgule pour les parties imaginaires des zéros non triviaux de  $\zeta$  pour que le tableau entre dans la page).

$z_k$	$\cos(\theta(0.500001 + i z_k))$	$\sin(\theta(0.500001 + i z_k))$
14.13	(0.293388937669013 + 1.13029869698163j)	(1.49685640683923 - 0.221542382048759j)
21.02	(-3.65067833260755 - 5.55158585205924j)	(5.61453043670892 - 3.60975052325182j)
25.01	(51.8388221640843 + 71.4168263447541j)	(-71.4214116762003 + 51.8354940559466j)
30.42	(1279.73552271554 - 4113.64685890455j)	(4113.64696972589 + 1279.73548823956j)
32.93	(24841.8641073917 + 26496.1795441578j)	(-26496.1795542006 + 24841.8640979759j)
37.58	(-869400.988764962 - 2041151.68295039j)	(2041151.6829506 - 869400.988764874j)
40.91	(30840719.7915146 + 28754620.4954137j)	(-28754620.4954137 + 30840719.7915146j)
43.32	(-387072960.34808 + 249779472.513394j)	(-249779472.513394 - 387072960.34808j)
48.00	(43178983996.6938 - 9403272567.82428j)	(9403272567.82428 + 43178983996.6938j)
49.77	(104422162981.218 + 268200880066.318j)	(-268200880066.318 + 104422162981.218j)
52.97	(-5783591004856.14 - 5132458416844.01j)	(5132458416844.01 - 5783591004856.14j)
56.44	(291839841072518.0 + 50806726623293.6j)	(-50806726623293.6 + 291839841072518.0j)
59.34	(-7.26756835888617e + 15 + 5.42279106626694e + 15j)	(-5.42279106626694e + 15 - 7.26756835888617e + 15j)
60.83	(-3.56012563984149e + 16 - 2.31911008361045e + 16j)	(2.31911008361045e + 16 - 3.56012563984149e + 16j)
65.11	(4.61580677618116e + 18 + 4.4928653739874e + 18j)	(-4.4928653739874e + 18 + 4.61580677618116e + 18j)
67.07	(-4.37421017348352e + 19 + 4.75817723092702e + 19j)	(-4.75817723092702e + 19 - 4.37421017348352e + 19j)
69.54	(-7.10014608270834e + 20 - 1.09057332806705e + 21j)	(1.09057332806705e + 21 - 7.10014608270834e + 20j)
72.06	(2.39156360313659e + 22 - 6.59809515156994e + 21j)	(6.59809515156994e + 21 + 2.39156360313659e + 22j)
75.70	(-2.09210515573582e + 24 + 1.18322703834867e + 24j)	(-1.18322703834867e + 24 - 2.09210515573582e + 24j)
77.14	(-1.03304355079634e + 25 - 9.61656561252754e + 24j)	(9.61656561252754e + 24 - 1.03304355079634e + 25j)
79.33	(1.74491206884717e + 26 - 1.52662029971126e + 26j)	(1.52662029971126e + 26 + 1.74491206884717e + 26j)
82.91	(-1.08377054037024e + 28 + 1.70145786519358e + 28j)	(-1.70145786519358e + 28 - 1.08377054037024e + 28j)
84.73	(-1.86371342211539e + 29 - 7.92302814453351e + 28j)	(7.92302814453351e + 28 - 1.86371342211539e + 29j)
87.42	(6.21390260752283e + 30 - 5.20020790876873e + 30j)	(5.20020790876873e + 30 + 6.21390260752283e + 30j)
88.80	(3.89806768717041e + 31 + 1.94114160950907e + 31j)	(-1.94114160950907e + 31 + 3.89806768717041e + 31j)
92.49	(-5.54122808234602e + 33 - 5.74915262473488e + 32j)	(5.74915262473488e + 32 - 5.54122808234602e + 33j)
94.65	(2.93741347642162e + 34 - 1.0052904554354e + 35j)	(1.0052904554354e + 35 + 2.93741347642162e + 34j)
95.87	(5.64649058275168e + 35 - 2.92179827134397e + 35j)	(2.92179827134397e + 35 + 5.64649058275168e + 35j)
98.83	(-1.47267877047931e + 37 + 3.00620553960502e + 37j)	(-3.00620553960502e + 37 - 1.47267877047931e + 37j)

Le cosinus et le sinus s'échangent comme ils le font sur le schéma ci-dessous, quand ils concernent deux angles en complémentarité adéquate par rapport à  $\frac{\pi}{2}$ .



Pour finir sur une note gaie, par curiosité et pour le fun, on utilise les 3 fonctions  $d_1(n)$ ,  $d_2(n)$  et  $d_3(n)$  (on a remplacé  $2\pi$  par 6 et  $2\pi e$  par 17 pour  $d_1$ , et utilisé  $5\pi$  ou  $6\pi$  au dénominateur pour  $d_2(n)$  et  $d_3(n)$ ) :

$$d_1(T) = \frac{T}{6} \log \left( \frac{T}{17} \right) + 1$$

$$d_2(T) = \frac{T}{2\pi} \log \left( \frac{T}{5\pi} \right) + 1$$

$$d_3(T) = \frac{T}{2\pi} \log \left( \frac{T}{6\pi} \right) + 1$$

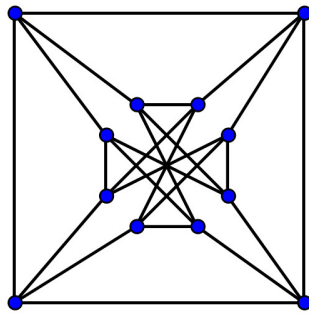
Les valeurs du tableau fournies en début de note sont ainsi modifiées :

$n$	$\#\{Z = s + it \text{ est un zéro non trivial de la fonction } \zeta \text{ de Riemann tel que } t \leq n\}$	$d_1(n)$	$d_2(n)$	$d_3(n)$
100	236	104	102	95
200	396	208	204	192
500	811	523	510	486
1000	1419	1047	1018	976
2000	2515	2095	2032	1959
5000	5447	5238	5071	4913
10000	9877	10478	10130	9843
20000	18046	20956	20239	19715
50000	40433	52389	50537	49364
100000	74920	104776	100996	98822
200000	139501	209545	201856	197808
500000	319387	523846	504254	494986
1000000	600269	1047662	1007995	990577
2000000	1132490	2096375	2016138	1983276

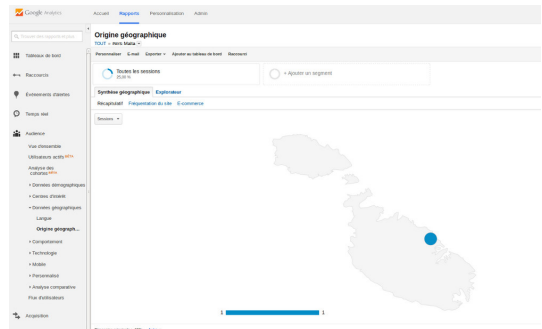
Les valeurs pour tous les nombres jusqu'à  $2.10^6$  sont consultables ici <https://denisevellachemla.eu/resmondeliden.txt> <sup>3</sup> <sup>4</sup>.



La croix des chevaliers de l'Ordre de Malte



dessin géométrique d'un graphe spécial



une visite à mon site depuis l'île de Malte



<sup>3</sup>Comme on s'y attendait bien sûr, le rapport  $\frac{d(T)}{T}$ , pour la fonction  $d_1(n)$ , qui vaut 1.04 pour la première ligne du tableau et 1.0481875 pour la dernière ligne du tableau tendra inévitablement vers  $2^{\frac{1}{12}} = 1,059463$  qui est l'intervalle d'un demi-ton dans la gamme tempérée.

<sup>4</sup>et ici <https://denisevellachemla.eu/resmondeliden2.txt> et ici <https://denisevellachemla.eu/resmondeliden3.txt> pour les deux dernières colonnes  $d_2(n)$  et  $d_3(n)$ .