Vision algorithmique de la Conjecture de Goldbach

Denise Vella-Chemla

23/11/2011

On appelle séquence d'entiers une suite finie ordonnée d'entiers. La fonction concaténation prend en argument deux séquences $s1$ et $s2$ et retourne la séquence constituée des éléments de $s1$ suivis des éléments de $s2$.

Considérons les séquences d'entiers suivantes :

$$s_0 = \{1, 3\}$$
$$s_1 = \{1, 3, 5\}$$
$$s_2 = \{3, 5, 7\}$$

Définissons la fonction $f(S)$ qui associe à la séquence d'entiers S une séquence d'entiers contenant tous les éléments de S auxquels on a ajouté 2.
Définissons alors s_{i+1} de la façon suivante : $s_{i+1} = f(s_i)$ si et seulement si le dernier élément de s_i augmenté de 4 n'est pas un nombre premier et $s_{i+1} = concat(\{1\}, f(s_i))$ sinon.

Démontrer la conjecture de Goldbach équivaut à démontrer que toutes les séquences engendrées par l'algorithme ainsi défini contiennent un nombre premier.
Les séquences pour les nombres pairs de 6 à 100 sont fournies ci-dessous. Les nombres premiers sont bleus.

Essayons d'imaginer une récurrence : admettons que la conjecture de Goldbach soit vraie jusqu'à $n-2$, i.e. pour chaque nombre k inférieur ou égal à $n-2$, on a trouvé un nombre premier (au moins) dans la séquence de nombres associée à k. Par définition, la séquence de nombres à associer à n est totalement déterminée par celle associée à $n-2$ et par la valeur de $n-2$. Mais imaginons que cela ne soit pas le cas, imaginons que ces nombres soient en quelque sorte choisis au hasard : la séquence associée à n contient $B = \pi(n) - 1$ nombres choisis au pire parmi $A = \dfrac{n-2}{2}$ nombres (voire donc parmi moins). Il y a C_A^B combinaisons de nombres possibles.

Calculons :

$$C_A^B \quad = \frac{\left(\dfrac{n-2}{2}\right)!}{(\pi(n)-1)!\left(\dfrac{n-2}{2} - \pi(n) + 1\right)!}$$

$\pi(n)$ tend vers $n/ln(n)$ selon le théorème des nombres premiers de Hadamard et La Vallée-Poussin. Le dénominateur se simplifie en $n/2$ si l'on assimile $ln(n) - 2$ à $ln(n)$.
C_A^B devient $\dfrac{n}{2}\left(\dfrac{n}{2}-1\right)\left(\dfrac{n}{2}-2\right)\ldots\left(\dfrac{n}{ln(n)}\right)$

Le fait que ce nombre soit supérieur à $n/ln(n)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n garantirait-il par le principe des tiroirs que la nouvelle ligne contient forcément elle-aussi un nombre premier au moins ?

Autre possibilité : par l'hypothèse de récurrence, toutes les lignes pour les nombres inférieurs à n contiennent un nombre premier. Mais on peut "étendre" ces lignes de multiples manières, en leur adjoignant des nombres quelconques, et en obtenant de la sorte des multitudes de lignes (à dénombrer) qui "couvrent" peut-être toutes ces combinaisons que l'on peut obtenir pour n.

6 :	1	3																						
8 :	1	3	5																					
10 :	3	5	7																					
12 :	1	5	7	9																				
14 :	1	3	7	9	11																			
16 :	3	5	9	11	13																			
18 :	1	5	7	11	13	15																		
20 :	1	3	7	9	13	15	17																	
22 :	3	5	9	11	15	17	19																	
24 :	1	5	7	11	13	17	19	21																
26 :	3	7	9	13	15	19	21	23																
28 :	5	9	11	15	17	21	23	25																
30 :	1	7	11	13	17	19	23	25	27															
32 :	1	3	9	13	15	19	21	25	27	29														
34 :	3	5	11	15	17	21	23	27	29	31														
36 :	5	7	13	17	19	23	25	29	31	33														
38 :	1	7	9	15	19	21	25	27	31	33	35													
40 :	3	9	11	17	21	23	27	29	33	35	37													
42 :	1	5	11	13	19	23	25	29	31	35	37	39												
44 :	1	3	7	13	15	21	25	27	31	33	37	39	41											
46 :	3	5	9	15	17	23	27	29	33	35	39	41	43											
48 :	1	5	7	11	17	19	25	29	31	35	37	41	43	45										
50 :	3	7	9	13	19	21	27	31	33	37	39	43	45	47										
52 :	5	9	11	15	21	23	29	33	35	39	41	45	47	49										
54 :	1	7	11	13	17	23	25	31	35	37	41	43	47	49	51									
56 :	3	9	13	15	19	25	27	33	37	39	43	45	49	51	53									
58 :	5	11	15	17	21	27	29	35	39	41	45	47	51	53	55									
60 :	1	7	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	49	53	55	57								
62 :	1	3	9	15	19	21	25	31	33	39	43	45	49	51	55	57	59							
64 :	3	5	11	17	21	23	27	33	35	41	45	47	51	53	57	59	61							
66 :	5	7	13	19	23	25	29	35	37	43	47	49	53	55	59	61	63							
68 :	1	7	9	15	21	25	27	31	37	39	45	49	51	55	57	61	63	65						
70 :	3	9	11	17	23	27	29	33	39	41	47	51	53	57	59	63	65	67						
72 :	1	5	11	13	19	25	29	31	35	41	43	49	53	55	59	61	65	67	69					
74 :	1	3	7	13	15	21	27	31	33	37	43	45	51	55	57	61	63	67	69	71				
76 :	3	5	9	15	17	23	29	33	35	39	45	47	53	57	59	63	65	69	71	73				
78 :	5	7	11	17	19	25	31	35	37	41	47	49	55	59	61	65	67	71	73	75				
80 :	1	7	9	13	19	21	27	33	37	39	43	49	51	57	61	63	67	69	73	75	77			
82 :	3	9	11	15	21	23	29	35	39	41	45	51	53	59	63	65	69	71	75	77	79			
84 :	1	5	11	13	17	23	25	31	37	41	43	47	53	55	61	65	67	71	73	77	79	81		
86 :	3	7	13	15	19	25	27	33	39	43	45	49	55	57	63	67	69	73	75	79	81	83		
88 :	5	9	15	17	21	27	29	35	41	45	47	51	57	59	65	69	71	75	77	81	83	85		
90 :	1	7	11	17	19	23	29	31	37	43	47	49	53	59	61	67	71	73	77	79	83	85	87	
92 :	3	9	13	19	21	25	31	33	39	45	49	51	55	61	63	69	73	75	79	81	85	87	89	
94 :	5	11	15	21	23	27	33	35	41	47	51	53	57	63	65	71	75	77	81	83	87	89	91	
96 :	7	13	17	23	25	29	35	37	43	49	53	55	59	65	67	73	77	79	83	85	89	91	93	
98 :	1	9	15	19	25	27	31	37	39	45	51	55	57	61	67	69	75	79	81	85	87	91	93	95
100 :	3	11	17	21	27	29	33	39	41	47	53	57	59	63	69	71	77	81	83	87	89	93	95	97