

Transcription d'extraits de cours *Théorie de la mesure et intégration de Lebesgue, Contexte historique et motivations*, par Cédric Villani (Extraits de cours magistral d'ouverture, à destination d'étudiants de Licence 3, Université de Rennes, 4 septembre 2025)

Introduction

Et bonjour tout le monde. Tout va bien ? Eh bien c'est parti.

Cette année, on va parler de théorie de la mesure. Et en pratique, quand on dit théorie de la mesure, on entend par là intégration. Alors, on peut parler de théorie de la mesure comme d'une mesure de quelque chose, un phénomène physique ou ce qu'on veut, ou bien de théorie de la mesure quand on mesure une quantité, un objet, dans laquelle on va se retrouver à calculer des longueurs, calculer des surfaces, calculer des volumes, calculer n'importe quelle quantité, on doit en mesurer toutes les composantes, toutes les parties. Et c'est bien dans ce second sens qu'on va entendre mesure ici. Donc, quand on dit théorie de la mesure, en pratique, c'est une théorie de l'intégration.

Et la théorie de l'intégration qui s'est imposée, on va y revenir, c'est la théorie de l'intégration de LEBESGUE. C'est une année un peu spéciale pour enseigner ça, puisque c'est l'année des 150 ans de LEBESGUE avec des célébrations qui vont avec. Sur le site de l'Académie des Sciences, quelque part, vous trouverez Célébration de LEBESGUE. C'est moi qui ai été invité par l'Académie à écrire le petit laïus qui évoquait les 150 ans de LEBESGUE et de ses contributions. On y reviendra.

Et pour commencer, dans cette première séance, on va parler de contexte historique et de motivations. Pourquoi une théorie de l'intégration ? Pourquoi est-ce que ça demande spécifiquement à être une théorie ? Pourquoi ça a été revu plusieurs fois ? Pourquoi celle de LEBESGUE en particulier s'est imposée ? Cette première séance sera donc un peu plus générale, comme on le verra dans l'introduction, un peu plus générale que les suivantes qui seront l'occasion de l'approfondir. Si le début vous semble un peu trop simple, n'ayez pas peur, ça se compliquera tant et plus. Dans la théorie de LEBESGUE, il y a tellement de paradoxes et de choses qui sont incluses dans l'outil puissant que même pour les spécialistes, même pour les experts, même pour des gens comme moi qui ont utilisé, littéralement, des centaines de milliers de fois dans leurs écrits et leurs formules l'intégrale, il reste des choses qui sont presque mystérieuses.

De l'analyse de Fourier à l'intégrale de Riemann

Fourier dégage les principes fondamentaux de ce qu'on appelle maintenant l'analyse de Fourier. Premièrement, toute fonction, pas trop dégoûtante, peut s'écrire, peut se développer comme une somme de sinusoides qui sont comme un alphabet élémentaire dans lequel on peut écrire toutes les fonctions. Deuxièmement, on reviendra sur tout ça plus tard mais ici on est sur la fresque historique. Deuxièmement, plus la fonction est lisse, moins les grandes fréquences sont représentées. Donc il y a un lien ainsi entre la régularité et ces coefficients de Fourier qui sont liés par des formules intégrales. Il y a un troisième principe qui n'est pas explicité du temps de Fourier mais qui le sera

Référence de la vidéo : <https://www.youtube-nocookie.com/embed/ILYVxm0EIKQ>.

Transcription des sous-titres downsub : Denise Vella-Chemla, septembre 2025.

plus tard, qu'on appelle aujourd'hui principe d'incertitude, disant qu'il est impossible qu'un signal soit à la fois parfaitement localisé en fréquence et parfaitement localisé en position.

En tout cas, Fourier dégage ces grands principes et il fait le lien donc entre intégration et régularité. Et ça, c'est un nouveau chapitre de l'analyse qui s'ouvre, dans lequel on pourra parler de régularité, avec le langage de l'intégration.

Et du fait qu'on est amené pour résoudre ces équations de la physique à résoudre des équations portant sur des fonctions un peu quelconques, il va y avoir une motivation considérable pour généraliser la notion de fonction. On va encore moins qu'avant travailler sur des fonctions qui sont explicitement données par des formules, mais se demander qu'est-ce que c'est qu'une fonction en général ? Qu'est-ce que c'est que l'ensemble des fonctions ? Et ce sont des préoccupations qui se développent au cours du XIXe siècle.

Vers la deuxième moitié du siècle en question, de 1850 jusqu'à la fin du XIXe siècle, on se retrouve à travailler de plus en plus sur des fonctions générales, ou génériques, et à développer le langage de la théorie des ensembles. Et puis l'analyse est reprise à ses bases. Les grands noms de l'époque sont CANTOR pour la théorie des ensembles, WEIERSTRASS et RIEMANN. De cette époque, les années 1850, date l'intégrale de RIEMANN. Tout le monde ici a suivi un cours sur l'intégrale de RIEMANN. Qui n'a pas suivi de cours sur l'intégrale de RIEMANN ? Cela ne concerne personne. Dans tous les cas, on reviendra dessus mais ce n'est pas mal, en préliminaire, que vous vous rafraîchissiez les idées sur l'intégrale de RIEMANN.

Que dit RIEMANN ? On se donne une fonction ici, on ne va pas la dessiner continue, on ne va pas la prendre continue. Elle peut être a priori régulière. (*Cédric Villani dessine une courbe plutôt lisse, avec deux points singuliers, où les ordonnées sautent brutalement d'un point à un autre et il précise que l'image en l'un des points singuliers est un point isolé, en dehors des courbes lisses.*) Voilà. Mettons que là elle soit comme ça, et là, elle soit comme ça, et que la valeur ici soit là. Et on veut en trouver l'intégrale. Au tout début, une des premières méthodes, quand il y avait le calcul différentiel au début, une des premières méthodes de calcul de l'intégrale, c'était d'en trouver une primitive. Une fois qu'on a une primitive, la différence des valeurs de la primitive vous donne l'intégrale sur l'intervalle correspondant. Si vous n'avez pas de primitive, vous allez chercher à raisonner en fonction de l'aire sous la courbe. Et RIEMANN vous dit que ce qu'on sait calculer, les aires qu'on sait calculer, ce sont celles qui sont faites d'unions de rectangles parce que l'aire d'un rectangle, on sait ce que c'est et donc l'aire d'une fonction dont le graphe est un ensemble de rectangles, on saura ce que c'est. Et donc on va chercher à approcher la fonction par au-dessus et par en dessous par des fonctions dont le graphe est une série de rectangles, des fonctions en escalier, quelque chose comme ça, par en dessous et par au-dessus, et ainsi de suite.

Et on définit l'intégrale d'une fonction en escalier. Alors même pour ça, il y a un petit raisonnement à faire parce que là, je vous écris une fonction en escalier. Évidemment, elle est donnée par un ensemble fini de données. Ce sont les intervalles et les valeurs. Mais il faut vérifier que c'est indépendant du choix de ces intervalles. Par exemple, là, quand je vois le graphe de la fonction, mais sans que ce soit là-dessus, j'ai bien évidemment envie de la découper en 5 intervalles. Mais si ça se trouve, ne sachant pas exactement les valeurs, j'aurais envie de la développer en 7 intervalles

plutôt, en subdivisant certains intervalles. Évidemment, c'est cohérent. Il y a un petit raisonnement à faire pour démontrer que quelle que soit la façon dont ma fonction s'écrit comme une somme de fonctions indicatrices d'intervalle, quand je vais ajouter toutes les aires des rectangles qui constituent le graphe, j'obtiendrai le même nombre à la fin. Et ce nombre, ça va être l'intégrale de la fonction en escalier.

Alors si ici la longueur est égale à a_i , et la valeur (ici c'est l'axe 0) ici est égale à y_i , l'intégrale de cette fonction f ici ce sera la somme

$$\sum_i a_i y_i.$$

Alors, on définit l'intégrale de fonctions en escalier, et puis on considère d'une part la plus grande intégrale, le sup des intégrales de g , on suppose que g est en escalier et g est inférieure ou égale à f , et d'autre part la plus petite intégrale de fonction en escalier majorant la fonction f . Je suppose la fonction h en escalier et h supérieure ou égale à f . Je considère

$$\begin{aligned} &\sup\{g, g \text{ en escalier}, g \leq f\}, \\ &\inf\{h, h \text{ en escalier}, h \geq f\}. \end{aligned}$$

Si ces deux nombres sont égaux, on dit que f est RIEMANN-intégrable et l'intégrale au sens de RIEMANN de f est égale à cette valeur commune, à la fois le sup des intégrales des fonctions en escalier minorantes et le inf des intégrales des fonctions en escalier majorantes. Jusqu'ici tout va bien ?... J'ai entendu "Oui".

De l'intégrale de Lebesgue au groupe de Lwów

On est alors dans une époque où il y a besoin de s'appropriier autant que possible les différentes notions, de raisonner de plus en plus abstraitement. Et encore, ça ne suffira pas, puisqu'on se rend compte au tout début du XXe siècle qu'il y a des problèmes logiques impossibles à résoudre dans le niveau de formalisme qui était là. C'était le fameux paradoxe de Russell et autres, et vous avez une nouvelle couche de refonte et de redéfinition sur ces bases de l'ensemble de l'édifice mathématique au début du XXe siècle.

C'est précisément à ce moment-là que surgit le chapitre suivant dans l'histoire qui s'appelle l'intégrale de LEBESGUE. Alors, qu'est-ce qu'on va dire sur le contexte dans lequel apparaît l'intégrale de LEBESGUE ? D'abord, on est dans un contexte français, ce n'est pas seulement LEBESGUE mais ce sont aussi ses contemporains BOREL et BAIRE qui s'intéressent à définir comment décrire les ensembles de façon générale, les ouverts, les fermés, leurs unions, leurs intersections, quels sont les ensembles qu'on peut construire, définir, manipuler. Et donc, c'est ce qu'on appelle les ensembles mesurables, les ensembles boréliens, ou bien les ensembles au sens de BAIRE. On reviendra là-dessus. Mais donc il y a ce contexte de mathématique française où l'on s'intéresse à la description des ensembles et LEBESGUE qui arrive, et qui va avoir la bonne façon de gérer les choses pour définir l'intégrale.

Donc ça, c'est le chapitre suivant, au tout début du XXe siècle. C'est dès la thèse qu'apparaît sa mesure, la mesure de LEBESGUE, écoutez-le vous en parler.

LEBESGUE lui-même : “Je dois payer une certaine somme. Je fouille dans mes poches et j’en sors des pièces et des billets de différentes valeurs. Je les verse à mon créancier dans l’ordre où elles se présentent, jusqu’à atteindre le total de ma dette. C’est l’intégrale de RIEMANN. Mais je peux opérer autrement. Ayant sorti tout mon argent, je réunis les billets de même valeur, les pièces semblables, et j’effectue le paiement en donnant ensemble les signes monétaires de même valeur. C’est mon intégrale”.

Tel que présenté comme ça, on peut dire “oui, c’est tout bête d’y penser”. C’est une sommation en tranches horizontales au lieu d’être en tranches verticales. Le fait qu’il se soit écoulé presque 1000 ans entre le moment où on a commencé à raisonner verticalement et où on a commencé à raisonner horizontalement vous montre bien que ce n’était pas si facile. Et il y avait plusieurs raisons conceptuelles fondamentales pour que ça ait attendu aussi longtemps. Cela rend plus abstrait, on y reviendra, plus abstrait et moins simple à calculer l’intégrale de LEBESGUE par rapport à l’intégrale de RIEMANN, mais ça lui donne une puissance en matière de gestion de problèmes, de généralisation, et en particulier de passage à la limite qui est juste inimaginable.

Donc on va y revenir et vous faire les deux dessins ici qui vont illustrer ça. Alors je vais faire le même genre de fonction ici. Alors toujours, on se met en dimension 1. Ça peut être encore plus compliqué, il y a peut-être des oscillations comme ça, je ne sais pas. Et ici, donc, comme ça, comme ça, comme ça. Alors, ça, c’est RIEMANN : une fonction d’escalier en dessous, avec peut-être des tailles différentes, vous voyez, entre les différents intervalles. Au fond, vous voyez bien, là ? Voilà, ça c’est RIEMANN. Et alors, il faudrait, je ne vais pas les faire tous, mais il faudrait que je fasse aussi ceux (*les rectangles*) du dessus quoi, vous voyez, etc. Et maintenant, je vais faire le LEBESGUE. Attention, ici, c’est la même valeur ici et là. Ah, là, je n’ai pas respecté. Pardon, ici aussi. Voilà !

Donc, par rapport à l'analogie, De l'intégrale de Lebesgue...

Cédric VILLANI - Introduction à la théorie de la mesure (intégration de Lebesgue) - Extraits

Université de Rennes
3,95 k abonnés

S'abonner

Par rapport à l'analogie, celle que je viens de vous dire concernant RIEMANN, il faut imaginer que là, c'est le temps, et qu'au fur et à mesure du temps, vous avez autant d'échéances, vous avez une certaine somme qui arrive. L'intégrale de la somme, la somme de toutes les sommes si vous voulez, c'est la somme totale au cours du temps que vous avez reversé. Ici (*montrant l'intégrale de RIEMANN*) au fur et à mesure que ça se présente, vous donnez ce qui tombe.

Tandis qu'ici, vous commencez par attendre que tout le temps soit écoulé et vous commencez par ici. Ça c'est par exemple 1 €, 2 €, 3 €, etc. Ici vous avez la somme en argent, c'est l'axe vertical.

Donc dans un cas, ce qui est très important, c'est l'espace de départ. Dans l'autre cas, ce qui est très important, c'est l'espace d'arrivée. Dans un cas, le fait que la fonction soit définie sur les réels ou les entiers ou n'importe quel espace, c'est très important. Et dans le second cas, on s'en fiche un peu. Ce qui va donner à ce procédé d'intégrale de LEBESGUE une fluidité considérable. On est sur des fonctions à valeur réelle. Donc l'espace d'arrivée, on sait toujours ce que c'est. C'est toujours l'espace des réels et on se fiche un peu (beaucoup) de savoir exactement quelle est la structure de l'espace de départ dans le procédé de LEBESGUE. Ce qui va être utile dans certaines catégories dans des proportions considérables.

À grands traits, les évolutions qui viennent ensuite, et qu'on aura l'occasion de voir et de reprendre. D'abord, donc ça, on est dans le tout début du XXe siècle et les procédés, la théorie est vite, assez vite, reprise, et en particulier, dans la foulée, vous avez la naissance de l'*analyse fonctionnelle*, où on cherche à faire des raisonnements mathématiques en s'intéressant à l'espace géométrique de l'ensemble des fonctions, avec des raisonnements sur tout un ensemble de fonctions, et d'habitude on dit un *espace de fonctions*. Et un espace de fonctions, ce n'est pas juste un ensemble de toutes les fonctions, c'est un ensemble fonctions avec une structure, une distance, un produit scalaire parfois, quelque chose qui met des relations, qui met de la géométrie sur cet espace. La démarche est implicite déjà à partir de Fourier, et elle est rendue explicite dans la foulée de la découverte de LEBESGUE, en particulier par le groupe d'analyse fonctionnelle polonais, des gens comme STEINHAUS, NIKODYM, un certain nombre de mathématiciens, et le plus brillant et le plus emblématique, BANACH, qui explicitement reprennent dans les idées de LEBESGUE le fondement de la façon de faire les choses et introduisent la fameuse notation des espaces L^p , les espaces de LEBESGUE, en définissant la norme L^p d'une fonction f comme l'intégrale de f à la puissance p puissance $\frac{1}{p}$:

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int f^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

et puis s'ensuit un ensemble de considérations et de réflexions là-dessus.