Mettre en correspondance les puissances de 2 et les puissances de 3 : logarithme, inverse du logarithme, et gamme tempérée
Denise Vella-Chemla pilotant l'ia claude, octobre 2026

Voilà mon problème : j'ai retrouvé un vieux petit texte qui l'exprimait : d'abord quand on regarde les valuations p-adiques d'un point de vue purement syntaxique, on voit que l'on va effectuer "un peu la même chose modulo 2 et modulo 3" si ce n'est que modulo 2 il faut répéter les séquences de valuations deux fois alors que modulo 3, il faut les répéter 3 fois et je ne vois pas comment obtenir ainsi un bijection qui enverrait par exemple 2^2 sur 3^2 et 2^3 sur 3^3 parce que entre ces nombres, on n'aurait pas le même nombre d'éléments à mettre en bijection. Mais bon, admettons qu'on oublie ça et qu'on se place dans les réels, alors le problème vient un peu d'ailleurs : admettons que j'ai les puissances de 2 d'un côté comme points discrets sur une droite et les puissances de 3 de l'autre comme points discrets sur une autre droite, et que j'obtiens l'une des droites par étirement à partir de l'autre et bien j'aurais mon homomorphisme continu entre les deux droites et tant pis, il enverra les nombres entre 2 puissances de 3 successives mais qui ont 3 dans leur factorisation sur des réels, et inversement dans l'autre sens. Mais ce que je ne vois pas c'est comment décider de la distance alors pour réaliser cet homomorphisme.

Je te fournis les références :

https://denisevellachemla.eu/fevrier2006.pdf et
https://denisevellachemla.eu/ennuyee.pdf
https://denisevellachemla.eu/trefle-musical.pdf
https://denisevellachemla.eu/gammereprise.pdf
https://denisevellachemla.eu/AC-1espacemathsmusique.pdf
https://denisevellachemla.eu/AC-mamu.pdf
https://denisevellachemla.eu/transc-AC-biblio118.pdf

Merci ensuite de voir ce qui se passe en prenant non pas des log mais des inverses de log, comme Gauss.

L'intégralité de la suite de cette note a été écrite par l'ia claude.

1. La question

On a une droite D_2 sur laquelle sont posées les puissances de 2 (2^k, $k = 0, 1, 2, \dots$) et une droite D_3 sur laquelle sont posées les puissances de 3. On veut une correspondance *continue* entre les deux droites qui envoie 2^k sur 3^k pour tout k. Les entiers qui ne sont pas des puissances (par exemple 3 sur D_2) seront envoyés sur des réels, et il faut décider de la "distance" entre les points, c'est-à-dire de l'étirement.

Il y a deux manières naturelles de poser les points : par le logarithme (cas A), ou par l'inverse du logarithme, comme dans la formule de Gauss (cas B). Dans les deux cas la correspondance est la même application, et la distance est imposée.

2. Cas A : on place x à la position $\ln x$

2.1. Les deux droites

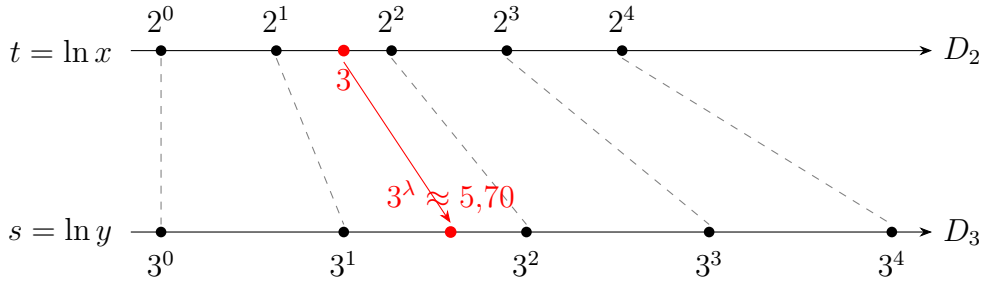
Sur D_2, on place x à l'abscisse $t = \ln x$. Alors 2^k est à la position $k \ln 2$: les points sont équidistants, à distance $\ln 2 \approx 0{,}693$. Sur D_3, on place y à l'abscisse $s = \ln y$: 3^k est à la position $k \ln 3$, à distance $\ln 3 \approx 1{,}099$ les uns des autres.

La seule correspondance continue qui conserve l'addition des positions est une multiplication par une constante λ (un étirement). Pour envoyer $k \ln 2$ sur $k \ln 3$, il faut

$$\lambda = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1{,}585.$$

Ce λ est la "distance" cherchée : il n'y a pas à la décider, elle est forcée par la condition $2^k \mapsto 3^k$.

2.2. Le schéma



Les pointillés gris relient 2^k à 3^k : ils s'écartent de plus en plus, c'est l'étirement de rapport λ. Le point rouge 3 de D_2 (situé entre 2 et 4) est envoyé sur $3^\lambda \approx 5{,}70$, qui se trouve entre 3 et 9 sur D_3 mais n'est pas un entier.

2.3. La formule

En revenant aux nombres : $t \mapsto \lambda t$ devient $\ln y = \lambda \ln x$, soit

$$y = \varphi(x) = x^\lambda = x^{\ln 3 / \ln 2}.$$

On a bien $\varphi(2^k) = 3^k$ et $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$: c'est un homomorphisme pour le produit. En revanche, $\varphi(3) \approx 5{,}70$, $\varphi(5) \approx 12{,}8$, $\varphi(6) \approx 17{,}1$: hors des puissances de 2, les images ne sont pas des entiers.

3. Cas B : on place x à la position $1/\log_p x$

3.1. Les deux droites

Pour un premier p fixé, on pose

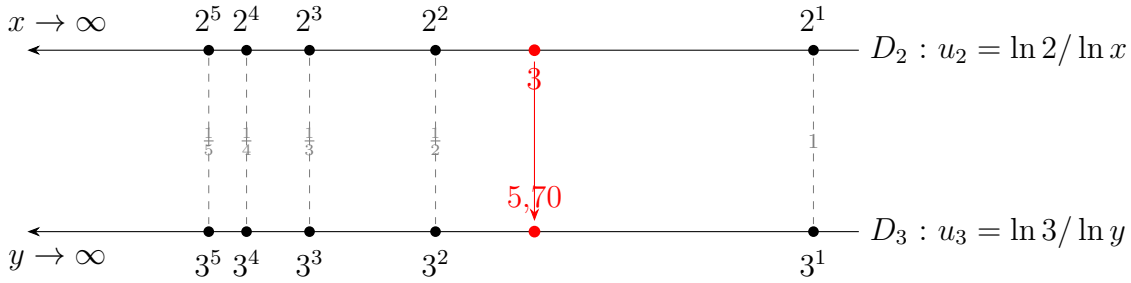
$$u_p(x) = \frac{1}{\log_p x} = \frac{\ln p}{\ln x}.$$

Alors $u_p(p^k) = 1/k$. Sur D_2 comme sur D_3, les puissances se placent donc aux positions

$$1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{5},\ \dots$$

qui s'accumulent vers 0 quand $x \to \infty$.

3.2. Le schéma



Cette fois les pointillés sont *verticaux* : la correspondance est l'identité sur la coordonnée u. Il n'y a plus d'étirement à choisir, le facteur vaut 1. Le point 3 de D_2 a pour coordonnée $u_2(3) = \ln 2/\ln 3 \approx 0{,}631$, comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1 ; le point de D_3 de même coordonnée $u_3(y) = 0{,}631$ est $y = 3^\lambda \approx 5{,}70$. On retrouve la même application $\varphi(x) = x^\lambda$.

3.3. Ce qu'on perd : le produit

Dans le cas A, produit = somme des positions. Dans le cas B, la coordonnée u est l'inverse de la position, donc

$$u_p(xy) = \frac{\ln p}{\ln x + \ln y} = \frac{1}{\dfrac{1}{u_p(x)} + \dfrac{1}{u_p(y)}}.$$

C'est une somme d'inverses (comme des résistances en parallèle). Par exemple pour $2 \cdot 4 = 8$: $u_2(2) = 1$, $u_2(4) = \frac{1}{2}$, et $\dfrac{1}{1+2} = \frac{1}{3} = u_2(8)$.

3.4. Ce qu'on gagne : le poids de Gauss

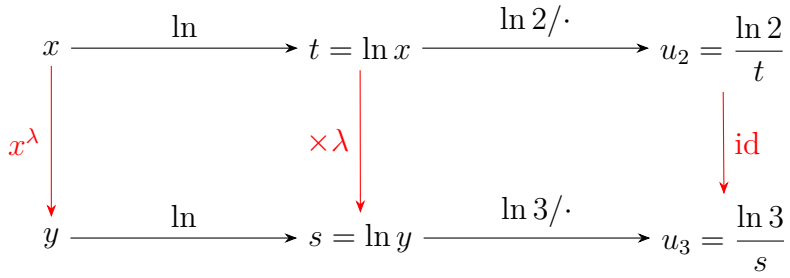
Gauss dit qu'un entier n est premier avec "probabilité" $1/\ln n$. Or

$$\frac{1}{\ln n} = \frac{u_p(n)}{\ln p} \qquad \text{pour tout premier } p.$$

Le poids de Gauss est donc la coordonnée u à une constante près, et choisir $p = 2$ ou $p = 3$ ne change que cette constante $1/\ln p$. En particulier $\pi(x) \approx \sum_{n \le x} u_p(n)/\ln p$ quel que soit p. Sur les puissances, le poids de p^k est $\dfrac{1}{k \ln p}$: le poids de 3^k est celui de 2^k multiplié par $\ln 2/\ln 3$.

4. Les deux cas ensemble

Les deux constructions se résument dans le diagramme suivant, où chaque ligne correspond à un premier ($p = 2$ en haut, $p = 3$ en bas) et chaque colonne à un choix de coordonnée.



Les trois flèches rouges sont la même application vue dans trois coordonnées. C'est un étirement $\times\lambda$ dans la coordonnée t, l'identité dans la coordonnée u, et $x \mapsto x^\lambda$ en termes des nombres eux-mêmes.

5. Pourquoi cela ne peut pas tomber sur des entiers

Le nombre $\lambda = \ln 3 / \ln 2$ est irrationnel. Preuve élémentaire : si $\ln 3 / \ln 2 = a/b$ avec a, b entiers positifs, alors $b \ln 3 = a \ln 2$, donc $3^b = 2^a$. Or 3^b est impair et 2^a est pair. Contradiction.

Conséquence : il n'existe aucune relation entière entre $\ln 2$ et $\ln 3$, et les deux "briques" 2 et 3 sont indépendantes. Une correspondance qui identifie 2^k et 3^k ne peut donc pas respecter tous les autres entiers : l'étirement de rapport λ les envoie sur des réels non entiers.

Cela rejoint le décompte évoqué au début : la proportion des entiers de valuation $v_p \geq k$ est p^{-k}, c'est-à-dire 2^{-k} pour $p = 2$ et 3^{-k} pour $p = 3$. Ces proportions décroissent à des rythmes différents, d'où l'impossibilité d'une bijection qui conserve à la fois les niveaux de valuation et les proportions. Plus généralement, le théorème d'Ostrowski dit qu'aucune puissance de la valeur absolue 2-adique n'est égale à la valeur absolue 3-adique sur tous les rationnels.

6. Le tempérament : $2^{19} \approx 3^{12}$

6.1. Une égalité approchée, pas exacte

On a $2^{19} = 524\,288$ et $3^{12} = 531\,441$. Le rapport

$$\varepsilon = \frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1{,}01364$$

est le *comma pythagoricien* ; en cents [1] ($1200 \log_2$ du rapport) il vaut 23,46 cents. Une égalité exacte $2^{19} = 3^{12}$ est impossible : on l'a vu au paragraphe 5, c'est la parité. Le "=" prononcé à l'oral veut dire "à peu près", et c'est ce "à peu près" qui définit la gamme tempérée.

1. Le "cent" est une unité de mesure musicale qui vaut un centième de demi-ton tempéré.

6.2. Un pas commun : pourquoi 12 pour le nombre 2 et 19 pour le nombre 3

On cherche un pas u (une longueur sur la droite des logarithmes) dont $\ln 2$ et $\ln 3$ soient des multiples entiers. De $19 \ln 2 \approx 12 \ln 3$ on tire

$$u = \frac{\ln 2}{12} \approx \frac{\ln 3}{19}, \qquad \text{donc} \qquad \ln 2 = 12\,u, \quad \ln 3 \approx 19\,u.$$

nombre	exposant dans $2^{19} \approx 3^{12}$	nombre de pas qu'il vaut
2	19	12
3	12	19

Les exposants sont dans l'ordre inverse du nombre de pas : le plus petit nombre, 2, est élevé à la plus grande puissance (19), mais il ne vaut que 12 pas. Dans les deux membres on parcourt la même longueur, $19 \times 12 = 12 \times 19 = 228$ pas : 19 octaves de 12 pas, ou 12 "douzièmes" (le saut $\times 3$) de 19 pas. Ton intuition "comme $2 < 3$, il en faut plus pour aller au même endroit" est exacte pour les exposants ; la longueur du pas se lit en revanche sur l'autre nombre.

6.3. Les bases

Le pas multiplicatif associé à u est

$$2^{1/12} \approx 1{,}059463 \quad \text{(le demi-ton)}, \qquad 3^{1/19} \approx 1{,}059526.$$

Ce sont deux écritures presque identiques du même pas : leur rapport est exactement $\varepsilon^{1/228}$ (car $3^{1/19} = 3^{12/228}$ et $2^{1/12} = 2^{19/228}$). C'est pourquoi on peut parler de "racine 12^{e} de 2" comme de "racine 19^{e} de 3". La racine 19^{e} de 2, elle, vaut 1,037155 : c'est le pas d'une *autre* gamme (celle à 19 notes par octave), qui ne mesure pas 2 et 3 à la fois.

6.4. Le lien avec l'étirement λ du début

L'étirement exact entre l'orbite de 2 et celle de 3 était $\lambda = \ln 3 / \ln 2 = \log_2 3 = 1{,}5849625\ldots$ Son développement en fraction continue est $[1; 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, \ldots]$ et ses réduites sont

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{8}{5},\ \frac{19}{12},\ \frac{65}{41},\ \frac{84}{53},\ \cdots$$

La fraction $19/12 = 1{,}58333$ en est une réduite : c'est la meilleure approximation de λ avec un dénominateur ≤ 40. *Tempérer, c'est remplacer l'étirement λ par le rationnel* $19/12$. Une fois remplacé, l'étirement relie $12k$ pas à $19k$ pas, et l'on obtient une vraie bijection entre les points 2^k et 3^k lus en pas, ce qu'on cherchait au début.

7. L'application en pas : $(a, b) \mapsto 12a + 19b$

7.1. Un homomorphisme exact, avec un noyau

Tout nombre $2^a 3^b$ ($a, b \in \mathbb{Z}$) a une position *exacte* $a \ln 2 + b \ln 3$ sur la droite des logarithmes, et une position *tempérée* en pas :

$$\pi(a, b) = 12a + 19b.$$

L'application $\pi : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ est un homomorphisme de groupes (le produit de nombres devient la somme de pas).

- **surjective** : $\operatorname{pgcd}(12, 19) = 1$, et $12 \cdot 8 - 19 \cdot 5 = 1$. Un pas est donc $2^8/3^5 = 256/243$ (le limma), ou encore $3^7/2^{11} = 2187/2048$ (l'apotome), car $19 \cdot 7 - 12 \cdot 11 = 1$.
- **noyau** : $12a + 19b = 0$ entraîne $(a, b) = t\,(19, -12)$ avec $t \in \mathbb{Z}$, puisque 12 et 19 sont premiers entre eux. Le noyau est engendré par $(19, -12)$, c'est-à-dire par le nombre $2^{19}/3^{12} = 1/\varepsilon$: *le noyau est le comma*. Dans la gamme tempérée, le comma est identifié à 1 (ou à 0 pas).

Ainsi $\mathbb{Z}^2/\langle(19, -12)\rangle \cong \mathbb{Z}$ via π : la gamme tempérée à 12 notes est ce quotient.

7.2. Pourquoi l'application exacte, elle, ne peut pas être ramenée à $\mathbb{Z}$

L'application exacte $\lambda(a, b) = a \ln 2 + b \ln 3$ est *injective* : si $a \ln 2 + b \ln 3 = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$, alors $2^a = 3^{-b}$, impossible par parité sauf $a = b = 0$. Or un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ est soit cyclique (de la forme $\mathbb{Z}\,u$), soit dense. L'image de λ n'est pas cyclique (elle contiendrait des multiples entiers communs de $\ln 2$ et $\ln 3$), donc elle est *dense dans* $\mathbb{R}$. Les nombres $2^a 3^b$ s'accumulent donc partout sur la droite, sans pas commun.

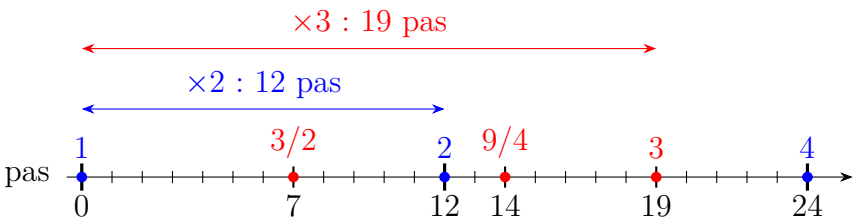
7.3. L'erreur du tempérament

Prenons $u = \ln 2/12$ exactement (l'octave est exacte). L'erreur sur la position de $2^a 3^b$ est

$$\lambda(a, b) - u\,\pi(a, b) = b\Big(\ln 3 - \tfrac{19}{12} \ln 2\Big) = \frac{b}{12} \ln \varepsilon.$$

En cents, c'est $b \cdot \dfrac{23{,}46}{12} \approx b \cdot 1{,}955$ cents. La quinte $3/2$ ($b = 1$) est donc tempérée de 1,955 cents (elle vaut 700 cents au lieu de 701,955) ; l'octave ($b = 0$) est exacte ; et les 12 quintes de la boucle, $b = 12$, accumulent exactement le comma. Le tempérament égal répartit le comma uniformément sur les 12 quintes.

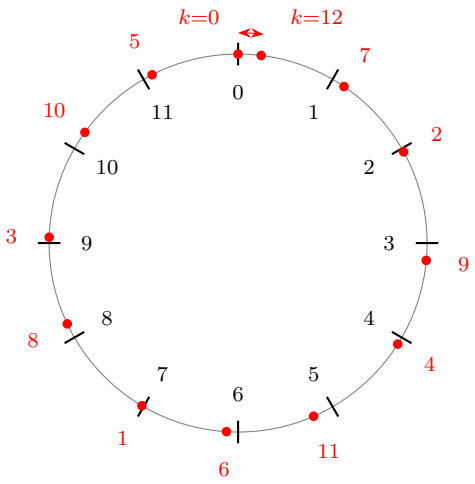
7.4. Schéma : la droite des pas



Sur cette droite, $\times 2$ est une translation de 12 pas et $\times 3$ une translation de 19 pas. Réduire 3 à l'octave ($3/2$) revient à retrancher 12 pas : $19 - 12 = 7$.

7.5. Schéma : la boucle des quintes

On empile k quintes exactes ($\times 3^k$) en ramenant à l'octave. Sur un cercle gradué en 12 pas, le point k est à l'angle $360° \cdot \{k \log_2 3\}$ (partie fractionnaire, mesurée depuis le haut dans le sens des aiguilles d'une montre). Les petits traits noirs numérotés sont les 12 pas du tempérament.



Le point k est tout près de la marque $7k \bmod 12$ (la quinte tempérée vaut exactement 7 pas) ; il est décalé de $k \times 0{,}59°$ vers la droite, ce qui correspond à $k \times 1{,}955$ cents. Au bout de 12 quintes ($k = 12$), le point ne retombe pas sur $k = 0$: il est à $\{12 \log_2 3\} \cdot 360° \approx 7{,}0°$ de la position de départ. C'est le comma (23,46 cents sur 1200).

8. Le site musical de Connes : une seule droite

Dans la coordonnée $t = \ln x$ sur $(0, \infty)$, multiplier par l'entier n devient la *translation* de longueur $\ln n$. Dans le "site des fréquences" $[0, \infty) \rtimes \mathbb{N}^\times$ d'Alain, il n'y a donc *qu'une seule droite*, sur laquelle agissent toutes les translations $\ln n$. Les droites D_2 et D_3 des premiers paragraphes sont les orbites du point 1 sous les translations $\ln 2$ et $\ln 3$ sur cette même droite. Le facteur d'étirement $\lambda = \ln 3 / \ln 2$ est le rapport des longueurs de ces deux translations.

Pas d'origine. Le groupe $\mathbb{R}_+^*$ agit de manière simplement transitive sur $(0, \infty)$: le choix du point 1 (la note de référence, le La de 440 Hz) est arbitraire, et seuls les rapports comptent. Le comma, le pas u et l'étirement λ ne dépendent pas de ce choix.

Le rang 1. Dans l'espace non commutatif d'Alain, on regarde les sous-groupes de $\mathbb{R}$ de rang 1 dont deux éléments quelconques sont commensurables. Aucun tel sous-groupe ne contient à la fois $\ln 2$ et $\ln 3$ (leur rapport est irrationnel : c'est le paragraphe 5). Un sous-groupe $\mathbb{Z}\, u$ avec $u = \ln 2/12$ contient $\ln 2$ exactement, et approche $\ln 3$ par $19u$ avec l'erreur de 1,955 cents ci-dessus. Je donne ce rapprochement comme une lecture de ma part, pas comme un énoncé tiré des textes d'Alain : il se borne à la phrase "le tempérament remplace un groupe de rang 2 par un groupe de rang 1".

9. Ton programme et le texte “Fréquences musicales”

9.1. Ce que calcule chaque fonction

La fonction $f : x \mapsto \lfloor 440 \cdot 2^{x/12} \rfloor$ donne la fréquence de la note située x pas au-dessus du La 440. La fonction g fait l'inverse et compte les pas :

$$g(F) = \frac{12\,(\ln F - \ln 440)}{\ln 2},$$

avec un *arrondi* (nombre entier le plus proche).

Remarque. Le texte de mai 2025 écrit g avec une partie entière inférieure $\lfloor \cdot \rfloor$, alors que le programme (`converthauteur`) utilise `round`. C'est le programme qui est correct : les fréquences calculées sont tronquées par `int` (par exemple $440 \cdot 2^{1/12} = 466{,}16$ devient 466), et $12 \log_2(466/440) = 0{,}9927$ donne 0 avec une partie entière inférieure au lieu de 1. Il faut donc écrire g avec l'arrondi à l'entier le plus proche.

9.2. Les facteurs de ta liste `lesfacteurs`

La liste contient les nombres $3^k/2^m$ ramenés dans $[1, 2]$. Sa position tempérée est $19k - 12m$ pas, et la deuxième partie du programme obtient des fréquences qui s'écartent de $k \times 1{,}955$ cents du tempérament :

facteur	valeur	pas $19k - 12m$	440·valeur	$440 \cdot 2^{\text{pas}/12}$	écart (cents)
$3^9/2^{14}$	1,20135	3	528	523	17,6
$3^4/2^6$	1,26562	4	556	554	7,8
$3^{11}/2^{17}$	1,35152	5	594	587	21,5
$3^6/2^9$	1,42383	6	626	622	11,7
$3/2$	1,5	7	660	659	2,0
$3^8/2^{12}$	1,60181	8	704	698	15,6
$3^3/2^4$	1,6875	9	742	739	5,9
$3^{10}/2^{15}$	1,80203	10	792	783	19,6
$3^5/2^7$	1,89844	11	835	830	9,8
2	2	12	880	880	0
$3^7/2^{10}$	2,13574	13	939	932	13,7
$3^2/2^2$	2,25	14	990	987	3,9
$3^9/2^{13}$	2,40271	15	1057	1046	17,6

La colonne “pas” vaut $3, 4, 5, \ldots, 15$: ta liste parcourt donc bien les demi-tons de 3 à 15 au-dessus du La. La colonne “440·valeur” reproduit la sortie de ton programme $(528, 556, 594, \ldots, 1057)$. L'écart vaut $k \cdot 1{,}955$ cents, où k est l'exposant de 3 (par exemple $9 \times 1{,}955 = 17{,}6$).

Une propriété utile : comme $19k - 12m \equiv 7k \pmod{12}$, empiler k quintes et ramener à l'octave donne la note numéro $7k \bmod 12$. Comme $\gcd(7, 12) = 1$, les 12 premières quintes visitent les 12 notes du tempérament, d'où le cercle des quintes.

9.3. Et le 5 d'Euler

Les nombres d'Euler dans ton texte ne contiennent que les facteurs 2, 3 et 5. Le pas de 5 est $28 : 5 \approx 2^{28/12}$, avec une erreur de $1200 \log_2 5 - 2800 = -13{,}69$ cents. L'application exacte devient $(a, b, c) \mapsto 12a + 19b + 28c$, de $\mathbb{Z}^3$ dans $\mathbb{Z}$. Son noyau est de rang 2 ; il contient le comma pythagoricien $(19, -12, 0)$ et le comma syntonique $81/80 = 3^4/(2^4 \cdot 5)$, car $19 \cdot 4 - 12 \cdot 4 - 28 = 76 - 48 - 28 = 0$.

10. Le lien avec la note de Connes aux Comptes Rendus (1996)

10.1. La référence

La note est : A. Connes, *Formule de trace en géométrie non-commutative et hypothèse de Riemann*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 323, série I, p. 1231–1236, 1996 (remise le 6 novembre 1996). Sa version développée est l'article de *Selecta Math.* (1999), cité comme référence [1] dans le texte “Le Site Musical et les zéros de Zêta”. Tout ce qui suit se réfère à la note de 1996 ; les numéros de formules sont les siens.

10.2. Le groupe qui agit : les changements d'échelle

Pour le corps $k = \mathbb{Q}$, le groupe $C_{\mathbb{Q}}$ des classes d'idèles agit sur l'espace non commutatif $X = \mathbb{A}/\mathbb{Q}^*$ (les adèles quotientés par le groupe multiplicatif de $\mathbb{Q}$). Il contient le groupe $\mathbb{R}_+^*$ des réels strictement positifs pour la multiplication, que la note munit du “module” $g \mapsto |g|$. C'est le groupe dont parle Alain à propos de la gamme : multiplier *toutes* les fréquences par un même facteur $\lambda > 0$ (transposer, changer d'échelle). Dans la coordonnée $t = \ln \lambda$, ce groupe est celui des translations de la droite des logarithmes, c'est-à-dire de la droite des pas.

10.3. Le spectre se lit dans le dual

La note utilise la dualité

$$\langle \lambda, s \rangle = \lambda^{is} = e^{\,is \ln \lambda} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ s \in \mathbb{R})$$

entre $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}$. Dans la coordonnée $t = \ln \lambda$, c'est la sinusoïde pure e^{ist} de fréquence s. Le théorème 1 énonce que, sur un espace de Hilbert H construit à partir de l'action, la trace de l'opérateur $W(h)$ vaut

$$\operatorname{Trace} W(h) = \sum_{\chi,\ s \in \mathbb{R},\ L(\chi, \frac{1}{2} + is) = 0} \widehat{h}(\chi, is),$$

la somme portant sur les zéros des fonctions L situés sur la droite critique $\frac{1}{2} + i\mathbb{R}$. Pour $k = \mathbb{Q}$ et le caractère trivial, le corollaire 2 s'énonce ainsi : le générateur infinitésimal S du groupe à un paramètre W est un opérateur à spectre discret imaginaire pur, et $is \in \operatorname{Spec} S$ si et seulement si $\frac{1}{2} + is$ est un zéro de partie réelle $\frac{1}{2}$ de la fonction ζ. Les zéros de ζ sur la droite critique sont donc les *fréquences* s des oscillations e^{ist} présentes dans l'action des changements d'échelle (le "spectre d'absorption" d'Alain). Un zéro hors de la droite critique apparaîtrait comme une résonance.

10.4. Où entrent les entiers $2, 3, 5, \ldots$: le produit d'Euler

Dans l'esquisse de preuve, la formule (18) donne

$$\langle \Delta(\tfrac{1}{2} + is),\, 1_R \otimes g \rangle = \zeta(\tfrac{1}{2} + is) \int g(u)\, |u|^{-1/2+is}\, du,$$

où 1_R est la fonction caractéristique de $R = \prod_p \mathbb{Z}_p$ (le plus grand sous-anneau compact des adèles finies). Le facteur ζ vient d'un calcul local : pour chaque premier p, avec une mesure de Haar normalisée pour que les unités de $\mathbb{Z}_p$ pèsent 1,

$$\int_{\mathbb{Q}_p^*} 1_{\mathbb{Z}_p}(x)\, |x|_p^z\, d^*x = \sum_{k \geq 0} p^{-kz} = \frac{1}{1 - p^{-z}},$$

et le produit sur tous les premiers est le produit d'Euler

$$\prod_p \frac{1}{1 - p^{-z}} = \sum_{n \geq 1} n^{-z} = \zeta(z) \qquad (\operatorname{Re} z > 1),$$

prolongé analytiquement ensuite. Le nombre n y contribue avec le poids n^{-z}, donc, pour $z = \frac{1}{2} + is$, avec la phase

$$n^{-is} = e^{-is \ln n}.$$

Le nombre n est ainsi associé au point $\ln n$ de la droite des logarithmes, et multiplier par n est la translation de longueur $\ln n$: c'est exactement ce que l'on a fait pour 2 et 3 dans les premiers paragraphes.

10.5. Les $\ln p$ sont indépendants : l'application λ en rang infini

Si $\sum_p a_p \ln p = 0$ avec $a_p \in \mathbb{Z}$ (presque tous nuls), alors $\prod_p p^{a_p} = 1$ dans $\mathbb{Q}_+^*$, donc tous les a_p sont nuls par unicité de la factorisation en premiers. L'application

$$\lambda : \ \mathbb{Q}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \lambda(x) = \ln x$$

est donc injective, et son image est un sous-groupe de $\mathbb{R}$ qui n'est pas cyclique, donc dense. Le paragraphe 7.2 (rang 2, avec 2 et 3) en est le cas particulier. Aucune relation entière entre les $\ln p$ n'existe : c'est le contraire d'un pas commun.

10.6. Le côté géométrique : un terme par premier

La section II de la note calcule les orbites périodiques de l'action de $C_{\mathbb{Q}}$ sur X. La proposition 3 montre qu'elles sont indexées par les *places* v de k (pour $k = \mathbb{Q}$: le premier p ou la place réelle), et la contribution de la place v à la trace est, d'après la formule (5),

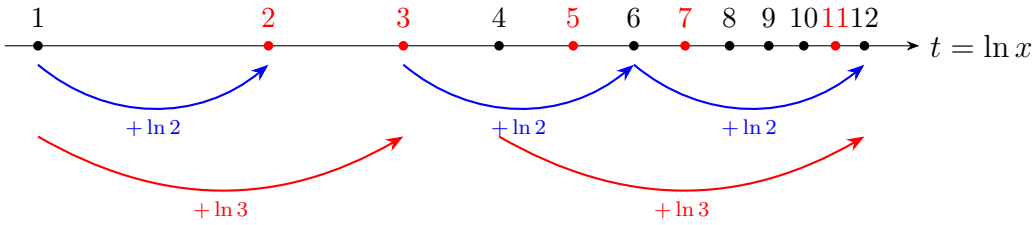
$$D_v(h) = \int_{K_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|}\, d^*u.$$

La mesure d^*u est normalisée par (7) : $\int_{1\le|g|\le\lambda} d^*g \sim \ln\lambda$. Pour $v = p$, le quotient $\mathbb{Q}_p^*/\mathbb{Z}_p^* \cong p^{\mathbb{Z}}$ est engendré par p de module $|p|_p = p^{-1}$, de sorte que, pour cette normalisation, la période de l'orbite primitive associée à p est $\ln p$. Je tire cette conséquence de la normalisation (7) et de la formule (27) de la note, sans l'avoir recalculée en détail. Les formules explicites de la théorie des nombres (références [12], [13] de la note) réduisent l'hypothèse de Riemann à l'égalité

$$D = \sum_v D_v \qquad \text{(sur l'hyperplan } h(1) = 0\text{)}.$$

Ainsi, d'un côté les *zéros*, c'est-à-dire des fréquences s ; de l'autre les *premiers*, c'est-à-dire des translations de longueur $\ln p$. La formule de trace dit que ces deux descriptions sont les deux faces d'une même chose, comme les fréquences d'un son et ses périodicités. La note précise que cette égalité n'est pas démontrée rigoureusement : l'argument utilise sans justification une formule de trace dans un cadre géométrique subtil.

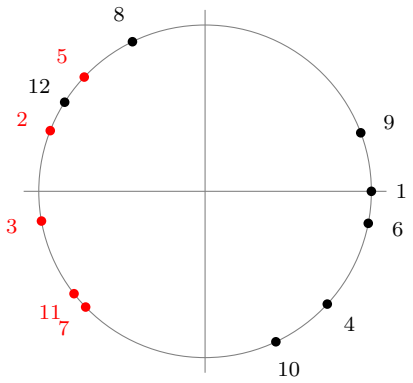
10.7. Schéma : les points $\ln n$ sur la droite des logarithmes



Les premiers $2, 3, 5, 7, 11$ (en rouge) sont les points de base ; chaque autre nombre s'obtient en combinant les translations $\ln p$: $4 = 2\cdot 2$, $6 = 2\cdot 3$, $12 = 2\cdot 6 = 3\cdot 4$. Ces points sont deux à deux distincts et il n'y a pas de pas commun.

10.8. Schéma : les phases n^{-is} pour $s = 14{,}1347$

Pour $s = 14{,}1347$ (la partie imaginaire du premier zéro de ζ sur la droite critique), voici, sur le cercle unité, les phases $n^{-is} = e^{-is\ln n}$ des douze premiers entiers. L'angle du point n est $-s\ln n$ modulo $360°$.



Ces phases sont réparties sans régularité : les premiers (rouge) ne dessinent aucune structure commune. L'annulation de $\zeta(\frac{1}{2}+is)$ est une annulation entre toutes ces phases (poids $n^{-1/2}$ compris), prise au sens du prolongement analytique.

10.9. Schéma : un zéro comme annulation

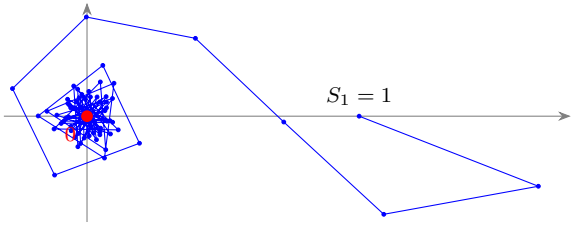
Pour voir une annulation sur une somme qui converge, on utilise la série alternée

$$\eta(z) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} n^{-z} = (1 - 2^{1-z})\,\zeta(z),$$

qui converge pour $\operatorname{Re} z > 0$. Pour $z = \frac{1}{2} + is$, le facteur $1 - 2^{1/2-is}$ n'est jamais nul (le module de $2^{1/2-is}$ est $\sqrt{2} \neq 1$) : $\eta(\frac{1}{2}+is) = 0$ si et seulement si $\zeta(\frac{1}{2}+is) = 0$. Les sommes partielles

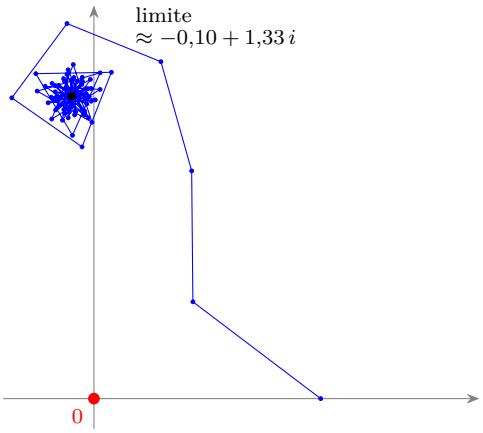
$$S_N(s) = \sum_{n\leq N} (-1)^{n-1}\, n^{-1/2}\, e^{-is\ln n}$$

sont des points du plan complexe. Les deux figures suivantes montrent les 60 premières, reliées dans l'ordre [2]. La première est pour $s = 14{,}1347$ (un zéro), la seconde pour $s = 10$ (pas un zéro).



$s = 14{,}1347$: les S_N $(N \leq 60)$ se resserrent vers 0

2. Voir programme en annexe.



$s = 10$: les S_N ($N \leq 60$) tournent autour d'une limite non nulle

Dans la première figure, la spirale se resserre vers l'origine : $|S_{100}| \approx 0{,}05$ et $|S_{300}| \approx 0{,}03$ (la décroissance est lente, en $N^{-1/2}$), et $\eta(\frac{1}{2} + 14{,}1347\,i) = 0$. Dans la seconde, les points tournent autour d'une limite non nulle, $\eta(\frac{1}{2} + 10i) \approx -0{,}098 + 1{,}334\,i$. Un zéro de ζ sur la droite critique est un s pour lequel la somme des phases n^{-is} (avec les poids $n^{-1/2}$) s'annule exactement.

10.10. Le rapport avec le tempérament

Le tempérament demande que $\ln 2$ et $\ln 3$ soient des multiples entiers d'un même pas u ($12u$ et $19u$). Dans la formule de trace, rien de tel : les $\ln p$ sont indépendants sur $\mathbb{Q}$, l'image de λ est dense, et aucun pas commun n'existe. Dans le cas tempéré, où les positions $\ln n$ sont remplacées par des multiples entiers de u, les phases $e^{-is\,ku}$ sont des fonctions *périodiques* de s, de période $2\pi/u$: le dual d'un réseau $\mathbb{Z}\,u$ est un cercle. Avec les $\ln p$ indépendants, au contraire, les phases $e^{-is\ln n}$ ne sont jamais périodiques en s à la fois pour tous les n, et c'est dans cette absence de période commune que se logent les zéros (cette dernière remarque est une intuition de ma part, non un énoncé de la note). La note de 1996 ne relie pas les deux directement. Ce paragraphe est un rapprochement de ma part, entre la note d'Alain, ton texte "Fréquences musicales" et les paragraphes 6 à 9.

11. Résumé

	Cas A (log)	Cas B (inverse du log)
Position de p^k	$k \ln p$	$1/k$
Correspondance $D_2 \to D_3$	étirement $\times\lambda$	identité
Produit	somme des positions	somme des inverses
Poids de Gauss	—	$u_p(n)/\ln p$
Application sur les nombres	$x \mapsto x^\lambda$	$x \mapsto x^\lambda$

12. Les deux demi-droites et le point 6 : les fonctions F et G

12.1. Les graduations

Sur la demi-droite D_2, un nombre $x > 0$ est placé à la position $p = \log_2 x$: la puissance 2^k est en k. Sur la demi-droite D_3, un nombre $y > 0$ est placé à la position $q = \log_3 y$: la puissance 3^k est en k. Les deux droites ont ainsi la même unité (la distance entre deux puissances successives), et l'on pose $\lambda = \log_2 3 = \ln 3 / \ln 2 \approx 1{,}585$.
Le nombre $6 = 2 \cdot 3$ est présent sur les deux droites :

$$\text{sur } D_2 : \ p = \log_2 6 = 1 + \lambda \approx 2{,}585, \qquad \text{sur } D_3 : \ q = \log_3 6 = 1 + \tfrac{1}{\lambda} \approx 1{,}631.$$

12.2. De D_2 vers D_3

La fonction qui envoie 2^k sur 3^k pour tout k, en conservant la position ($q = p$), est

$$F : D_2 \to D_3, \qquad F(x) = x^\lambda = 3^{\log_2 x}.$$

Elle est continue, croissante, multiplicative ($F(xy) = F(x)F(y)$) et vaut 0 en 0. Pour le point 6 :

$$F(6) = F(2)\,F(3) = 3 \cdot 3^\lambda = 3^{\log_2 6} \approx 17{,}1.$$

12.3. De D_3 vers D_2

La fonction inverse est

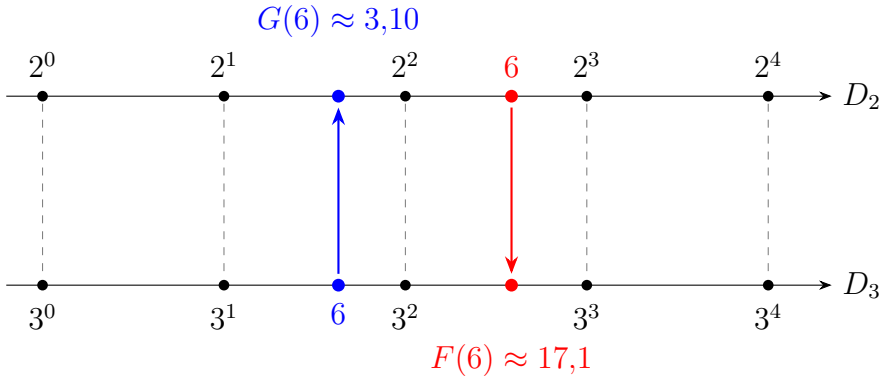
$$G : D_3 \to D_2, \qquad G(y) = y^{1/\lambda} = y^{\log_3 2} = 2^{\log_3 y},$$

qui envoie 3^k sur 2^k. Pour le point 6 :

$$G(6) = G(2)\,G(3) = 2^{\log_3 2} \cdot 2 = 2^{\log_3 6} \approx 3{,}10.$$

On a bien $G(F(x)) = x$ et $F(G(y)) = y$.

12.4. Le schéma



Les pointillés relient 2^k à 3^k : ce sont les points fixés par F (en positions). Le 6 de D_2 est entre 2^2 et 2^3, donc son image est entre $3^2 = 9$ et $3^3 = 27$. Le 6 de D_3 est entre 3^1 et 3^2, donc son image est entre 2^1 et 2^2.

12.5. Quelques valeurs

x (sur D_2)	$F(x) = x^\lambda$	y (sur D_3)	$G(y) = y^{1/\lambda}$
2	3	3	2
3	5,70	5	2,76
4	9	6	3,10
6	17,11	9	4
8	27	27	8
9	32,54	81	16
12	51,34	7	3,41

Les valeurs de F sur $3, 6, 9, 12$ se déduisent de $F(3) = 3^\lambda \approx 5{,}70$ par multiplicativité : $F(6) = 3\,F(3)$, $F(9) = F(3)^2$, $F(12) = 9\,F(3)$.

12.6. Pourquoi le 6 de D_2 ne peut pas aller sur le 6 de D_3

Aucune fonction croissante ne peut envoyer à la fois 2^k sur 3^k pour tout k et le 6 de D_2 sur le 6 de D_3. En effet $4 < 6 < 8$ sur D_2, donc une fonction croissante qui envoie 2^2 sur 9 et 2^3 sur 27 envoie 6 entre 9 et 27, alors que le 6 de D_3 est plus petit que 9. Cela revient à dire que les positions $\log_2 6 \approx 2{,}585$ et $\log_3 6 \approx 1{,}631$ diffèrent, et que leur rapport $\ln 2/\ln 3$ est irrationnel (paragraphe 5). L'identité $x \mapsto x$ envoie bien 6 sur 6, mais elle envoie 2^k sur 2^k et non sur 3^k.

13. Où est la non-commutativité ? Le quotient par $\mathbb{Z}\ln 2 + \mathbb{Z}\ln 3$

13.1. Rappel : les nombres p-adiques et la base p

Fixons un premier p. Un entier p-adique est un nombre $a = d_0 + d_1 p + d_2 p^2 + d_3 p^3 + \cdots$ où chaque chiffre d_i est dans $\{0, \ldots, p-1\}$, avec une *infinité* de chiffres vers la gauche (les puissances croissantes de p) ; c'est l'écriture en base p, prolongée indéfiniment vers la gauche, alors qu'un réel se prolonge vers la droite. Les puissances $p, p^2, p^3, \ldots$ ne sont pas la base : ce sont les valeurs de position des chiffres. Les restes de a modulo p^n sont les troncatures $a \bmod p^n = d_0 + d_1 p + \cdots + d_{n-1} p^{n-1}$, et ils sont compatibles entre eux ($a \bmod p^{n+1}$ se réduit modulo p^n en $a \bmod p^n$). Un entier p-adique *est* exactement une suite compatible de restes modulo $p, p^2, p^3, \ldots$: aucun d'eux n'est privé de restes. On note $\mathbb{Z}_p$ l'ensemble de ces nombres.

Par exemple, pour $p = 5$: $-1 = \cdots 4444$ (car $\cdots 4444 + 1 = \cdots 0000$ par retenue infinie) et $-\frac{1}{4} = \cdots 1111 = 1 + 5 + 25 + \cdots$. Le corps $\mathbb{Q}_p$ s'obtient en autorisant en plus un nombre fini de chiffres après la virgule, c'est-à-dire des puissances négatives de p : $\mathbb{Q}_p = \mathbb{Z}_p[1/p]$. Les entiers p-adiques inversibles (dont le chiffre d_0 est non nul) forment le groupe $\mathbb{Z}_p^*$, et $\mathbb{Q}_p^*/\mathbb{Z}_p^* \cong p^{\mathbb{Z}}$: c'est la droite discrète des puissances de p.

13.2. Ce qui est commutatif, et ce qui ne l'est pas

L'espace des adèles $\mathbb{A} = \mathbb{R} \times \prod_p{}' \mathbb{Q}_p$ (produit restreint : $a_p \in \mathbb{Z}_p$ pour presque tout p) est un anneau commutatif localement compact. Il n'est pas non commutatif.

La non-commutativité vient du *quotient* $X = \mathbb{A}/\mathbb{Q}^*$, où le groupe $\mathbb{Q}^*$ agit par multiplication. Cette action est ergodique : toute fonction continue (ou mesurable) sur $\mathbb{A}$ invariante par $\mathbb{Q}^*$ est constante. Le quotient n'a donc, au sens usuel, pratiquement aucune fonction continue non constante : l'espace quotient ordinaire est inutilisable. La remarque d'Alain, dans la transcription, va dans le même sens : l'espace a le cardinal du continu, mais il n'existe aucune injection constructible de cet espace dans $\mathbb{R}$.

On remplace alors l'espace par l'algèbre de ses fonctions, qui est le *produit croisé* de l'algèbre des fonctions sur $\mathbb{A}$ par le groupe $\mathbb{Q}^*$. Elle est engendrée par les fonctions f et par des éléments u_q ($q \in \mathbb{Q}^*$) qui vérifient

$$u_q \, f \, u_q^{-1} = f(q^{-1} \cdot),$$

et c'est dans cette relation que se loge la non-commutativité : $u_q f \neq f u_q$ en général. La note dit que X est un espace non commutatif ; l'explication par l'ergodicité de l'action est celle de la théorie générale, que je rappelle ici sans la démontrer.

13.3. Les droites de ton schéma dans la note

Pour chaque premier p, la droite discrète des puissances de p est $\mathbb{Q}_p^*/\mathbb{Z}_p^* \cong p^{\mathbb{Z}}$: un idèle (a_p) a pour position sur cette droite sa valuation $v_p(a_p)$. La proposition 3 de la note confirme cette lecture : les orbites périodiques de l'action du groupe des classes d'idèles $C_{\mathbb{Q}}$ sur X sont indexées par les places, et pour le premier p le groupe d'isotropie est l'image de $\mathbb{Q}_p^*$; à unités près, c'est la droite $p^{\mathbb{Z}}$.

Un rationnel $n > 0$ a pour coordonnées

$$\Big(\ln n \ ; \ v_2(n),\, v_3(n),\, v_5(n), \dots\Big), \qquad \ln n = \sum_p v_p(n) \ln p,$$

c'est-à-dire un point sur la droite réelle des logarithmes *et* une position sur chacune des droites discrètes : le vecteur de la figure de 2006 (Laisant). Ton point $6 = 2 \cdot 3$ est $(\ln 6 \ ; 1, 1, 0, 0, \dots)$. Multiplier par un rationnel déplace toutes les droites à la fois.

Le quotient par $\mathbb{Q}^*$ efface les droites discrètes : tout idèle est équivalent, par un rationnel (unique une fois fixé le signe de la composante réelle), à un idèle dont toutes les composantes p-adiques sont des unités, et l'on "dépense" le rationnel n en le payant d'une translation de $\ln n$ sur la droite réelle. Il reste $C_{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{R}_+^* \times \widehat{\mathbb{Z}}^*$: la droite des échelles (le groupe des changements d'échelle de la note), fois un groupe compact. Sur cette droite, le sous-groupe $\ln(\mathbb{Q}_+^*)$ est dense, et c'est cette densité qui fait de l'espace un espace non commutatif.

13.4. Le modèle à deux premiers : pourquoi quotienter par $\mathbb{Z}\ln 2 + \mathbb{Z}\ln 3$

Pour voir la non-commutativité sans les adèles, je garde seulement les premiers 2 et 3 et seulement la droite réelle des logarithmes. Le sous-groupe de $\mathbb{Q}_+^*$ engendré par 2 et 3 est $\{2^a 3^b\} \cong \mathbb{Z}^2$, et il

agit sur la droite des logarithmes par translations de $a \ln 2 + b \ln 3$. Je quotiente donc la droite par

$$G = \mathbb{Z} \ln 2 + \mathbb{Z} \ln 3 \subset \mathbb{R},$$

ce qui revient, musicalement, à identifier les notes qui diffèrent d'un nombre entier d'octaves et d'un nombre entier de quintes. C'est mon choix de modèle : il ne figure pas dans la note, il isole seulement le phénomène "$\ln 2$ et $\ln 3$ incommensurables".

Le groupe G est dense dans $\mathbb{R}$ (paragraphe 7.2). Le quotient $\mathbb{R}/G$ n'a donc, comme précédemment, aucune fonction continue non constante. On le calcule en deux temps :

1. On quotiente d'abord par $\mathbb{Z} \ln 2$. On obtient un cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \ln 2$ de longueur $\ln 2$: *le cercle d'une octave*.
2. Reste l'action de $\mathbb{Z} \ln 3$ sur ce cercle. La multiplication par 3 y agit comme la rotation d'angle $\ln 3$ modulo $\ln 2$, soit
$$\theta = \{\log_2 3\} = 0{,}5849625\ldots \text{ tour}$$
(la quinte, 702 cents sur 1200).

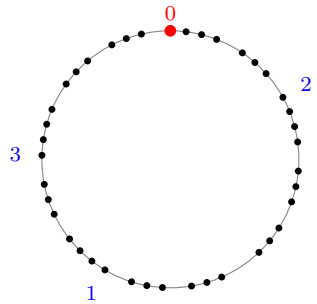
Comme θ est irrationnel, la rotation n'a aucune orbite finie : l'orbite de chaque point est infinie et dense dans le cercle (Kronecker). L'algèbre de ce quotient est le produit croisé $C(\mathbb{T}) \rtimes_\theta \mathbb{Z}$, c'est-à-dire l'*algèbre de la rotation irrationnelle* A_θ, engendrée par deux unitaires U et V liés par

$$UV = e^{2\pi i\theta}\, VU.$$

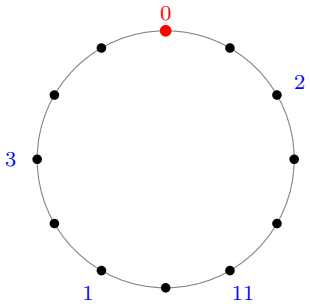
Le quotient de la droite par G lui-même a pour algèbre $C_0(\mathbb{R}) \rtimes G$, qui est équivalente à A_θ au sens de Morita : c'est l'exemple classique d'espace non commutatif. Ici, la non-commutativité $UV \neq VU$ est celle de "monter d'une quinte" et de "se déplacer sur le cercle de l'octave" : le facteur $e^{2\pi i\theta}$ mesure l'écart entre les deux.

13.5. Schéma : la rotation irrationnelle contre le tempérament

À gauche, les 40 premiers points de l'orbite de 0 sous la rotation de $\theta = 0{,}5849625$ tour (les quintes exactes) ; à droite, l'orbite sous la rotation de $7/12$ tour (les quintes tempérées).



$\theta = \log_2 3 \bmod 1$: orbite infinie



7/12 : orbite de 12 points

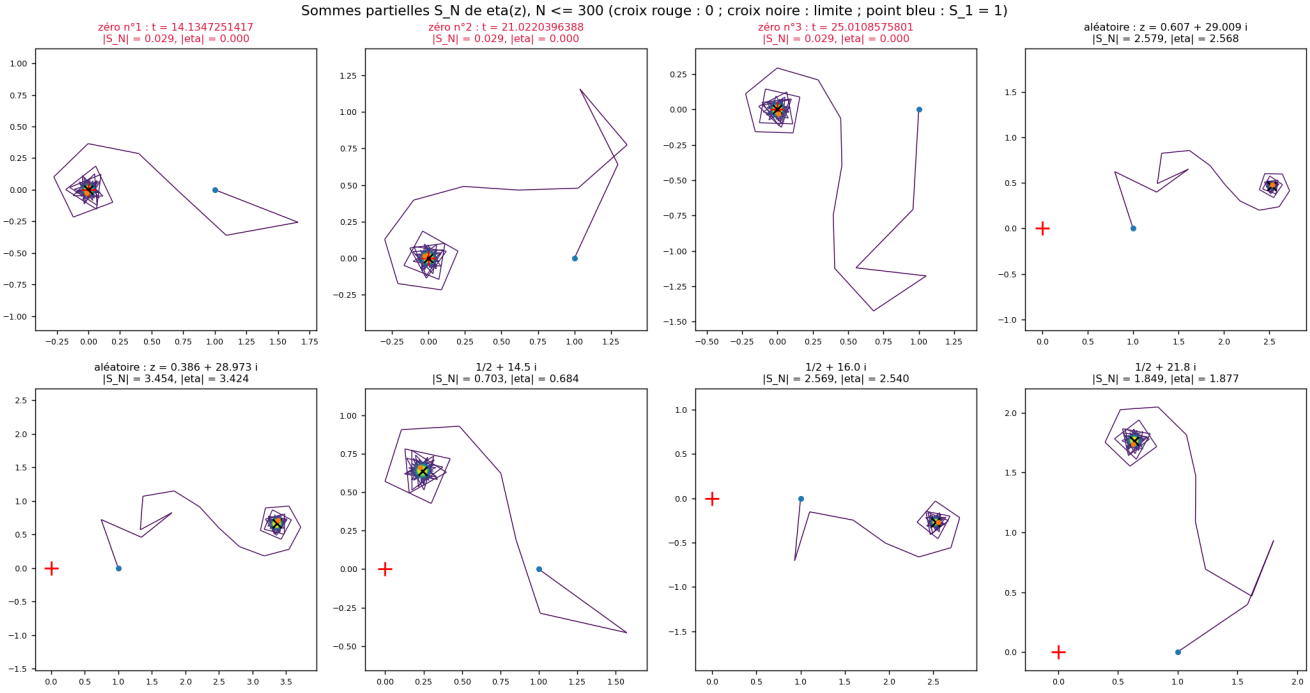
À gauche, les points $0, 1, 2, \ldots$ (en nombre de quintes) ne reviennent jamais sur 0 et se répartissent peu à peu sur tout le cercle ; c'est ce que le cercle des quintes du paragraphe 7.5 laissait voir avec seulement 13 points. À droite, la rotation de $7/12$ tour se referme au bout de 12 quintes sur les 12 marques du tempérament : le quotient redevient un espace ordinaire, à orbites de 12 points.

13.6. Ce que ce modèle ne contient pas

Le modèle à deux premiers ne contient ni les autres premiers $5, 7, 11, \ldots$, ni la partie additive des $\mathbb{Q}_p$, c'est-à-dire les restes modulo p^n, qui sont bien présents dans $X = \mathbb{A}/\mathbb{Q}^*$. Il ne retient que le phénomène des translations incommensurables $\ln 2$ et $\ln 3$ sur la droite des logarithmes. Dans X, ce phénomène se produit simultanément pour tous les premiers, et c'est ce qui rend l'espace non commutatif et capable de porter le spectre des zéros de ζ (section 10).

14. Annexe : programme de dessin des “zigouigoui”

```
#!/usr/bin/env python3
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
zigouigoui.py

Trajectoires erratiques des sommes partielles de la s rie altern e
    eta(z) = sum_{n>=1} (-1)^(n-1) n^(-z) = (1 - 2^(1-z)) zeta(z),   Re z > 0,
    S_N(z) = sum_{n<=N} (-1)^(n-1) n^(-z)
pour z = sigma + i t. Aux z ros non triviaux de zeta (sigma = 1/2), S_N "atterrit"
sur 0 (en N^(-1/2)) ; ailleurs elle tourne autour d'une limite non nulle (croix
noire, calcul e avec mpmath si disponible, sinon moyenne des derni res sommes).

Panneaux : les 3 premiers z ros (10 d cimales), 2 nombres complexes al atoires,
et 1/2 + 14,5 i, 1/2 + 16 i, 1/2 + 21,8 i.

Usage : python3 zigouigoui.py [N=300] [graine=1]
Chaque panneau a sa propre  chelle  (carr e, contenant 0 et la limite).
Sorties : zigouigoui.png et zigouigoui.pdf
"""
import sys
import numpy as np
import matplotlib
matplotlib.use("Agg")
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.collections import LineCollection

ZEROS = [14.1347251417, 21.0220396388, 25.0108575801]


def sommes_partielles(z, N):
    n = np.arange(1, N + 1)
    termes = (-1.0) ** (n - 1) * np.exp(-z * np.log(n))
    return np.cumsum(termes)


def limite(z, S):
    try:
        import mpmath
        return complex(mpmath.altzeta(z))
    except Exception:
        return (S[-1] + S[-2]) / 2
```

```
def main():
    N = int(sys.argv[1]) if len(sys.argv) > 1 else 300
    graine = int(sys.argv[2]) if len(sys.argv) > 2 else 1
    rng = np.random.default_rng(graine)

    cas = [(0.5 + 1j * t, f"z ro n {k + 1} : t = {t}", True)
           for k, t in enumerate(ZEROS)]
    for _ in range(2):
        z = complex(rng.uniform(0.3, 0.9), rng.uniform(10, 30))
        cas.append((z, f"al atoire : z = {z.real:.3f} + {z.imag:.3f} i", False))
    for t in (14.5, 16.0, 21.8):
        cas.append((0.5 + 1j * t, f"1/2 + {t} i", False))

    fig, axes = plt.subplots(2, 4, figsize=(16, 8.4))
    series = [sommes_partielles(z, N) for z, _, _ in cas]

    for ax, (z, titre, est_zero), S in zip(axes.ravel(), cas, series):
        pts = np.c_[S.real, S.imag]
        segs = np.stack([pts[:-1], pts[1:]], axis=1)
        lc = LineCollection(segs, cmap="viridis", linewidths=0.8)
        lc.set_array(np.arange(len(segs)))
        ax.add_collection(lc)
        ax.plot(S[0].real, S[0].imag, "o", color="tab:blue", ms=4)   # S_1 = 1
        ax.plot(0, 0, "r+", ms=12, mew=1.6)                          # origine
        lim = limite(z, S)
        ax.plot(lim.real, lim.imag, "kx", ms=8, mew=1.6)             # limite
        ax.plot(S[-1].real, S[-1].imag, ".", color="tab:orange", ms=7)
        tous = np.append(S, [0, lim])
        cx = (tous.real.min() + tous.real.max()) / 2
        cy = (tous.imag.min() + tous.imag.max()) / 2
        R = 0.55 * max(np.ptp(tous.real), np.ptp(tous.imag)) + 0.05
        ax.set_xlim(cx - R, cx + R)
        ax.set_ylim(cy - R, cy + R)
        ax.set_aspect("equal")
        ax.set_title(f"{titre}\n|S_N| = {abs(S[-1]):.3f}, |eta| = {abs(lim):.3f}",
                     fontsize=9, color="crimson" if est_zero else "black")
        ax.tick_params(labelsize=7)
    fig.suptitle(f"Sommes partielles S_N de eta(z), N <= {N} "
                 "(croix rouge : 0 ; croix noire : limite ; point bleu : S_1 = 1)")
    fig.tight_layout(h_pad=3)
    fig.savefig("zigouigoui.png", dpi=130)
    fig.savefig("zigouigoui.pdf")
    print("  crit   : zigouigoui.png, zigouigoui.pdf")
    for (z, titre, _), S in zip(cas, series):
        print(f"{titre:38s} |S_N| = {abs(S[-1]):.4f}")


if __name__ == "__main__":
main()
```

Résultat du programme ci-dessus