Corrections du texte
"Changement de signe de $(n-x)^2 - x^3$ et décomposants de Goldbach"

ia mistral

23 octobre 2026

1. L'observation à expliquer

Pour n pair et x impair, $3 \le x < n/2$, le programme `diff-de-puiss.py` fait écrire l'image

$$f_n(x) = (n-x)^2 - x^3,$$

qui décroît du positif au négatif lorsque x croît. Notons a l'antécédent de la dernière image positive et b celui de la première image négative. L'observation : *très souvent, a ou b est un décomposant de Goldbach de n (c'est-à-dire x et $n-x$ premiers tous les deux), mais pas toujours — et les échecs sont fréquents quand n est double d'un premier.*

2. Le lieu du changement de signe : purement archimédien

f_n est strictement décroissante sur $[3, n/2]$ car $f_n'(x) = -2(n-x) - 3x^2 < 0$: il y a donc exactement un changement de signe, et $b = a+2$: a et b sont deux impairs consécutifs, il n'y a pas d'impair entre eux, sauf cas d'image nulle. Le point de bascule réel x^* vérifie

$$(n-x^*)^2 = x^{*3} \iff n = x^* + x^{*3/2}.$$

Posons $x^* = c^2$: alors $n = c^2(1+c)$, et $n \sim c^3$, d'où

$$\boxed{x^* = n^{2/3}\left(1 - \frac{2}{3\,n^{1/3}} + \cdots\right)}$$

(mesuré : moyenne $a/n^{2/3} \approx 0{,}95$ sur $8 \le n \le 3000$, en croissance lente ver

2.1. Le cas de l'image exactement nulle

Si $(n-x)^2 = x^3$ en entiers, alors x^3 est un carré, donc x est un carré parfait $x = c^2$, et réciproquement $n = c^2(1+c)$ donne $f_n(c^2) = 0$. Pour c impair : $n = 36, 150, 392, 810, 1452, 2366, \ldots$ ($c = 3, 5, 7, 9, 11, 13$). Le fait remarquable : **cet antécédent d'image nulle est un carré, donc automatiquement composé — il ne peut jamais être un décomposant de Goldbach.** Dans ce cas les deux candidats sont $a = c^2 - 2$ et $b = c^2 + 2$.

3. Pourquoi ça marche parfois : de la chance, à densité quantifiée

Le lieu $x^* \approx n^{2/3}$ ne dépend que de la taille de n (la place archimédienne : l'information portée par la valeur réelle de n, par opposition à ses congruences) ; il est aveugle à l'arithmétique. Dire que a ou b est un dg revient à exiger une décomposition de Goldbach dans une fenêtre de largeur 2 autour de $n^{2/3}$ — une exigence bien plus forte que Goldbach lui-même, qui dispose de toute la fenêtre $[3, n/2]$. Le succès est donc un événement de probabilité

$$q_n \approx 1 - \left(1 - \frac{2}{\log a} \cdot \frac{2C_2\,\sigma(n)}{\log n}\right)^2, \qquad \sigma(n) = \prod_{p\mid n,\ p>2} \frac{p-1}{p-2},$$

($C_2 = 0{,}66016$). Vérification exhaustive sur les pairs $8 \le n \le 3000$:

tranche de n	6–100	102–500	502–1000	1002–2000	2002–3000
taux de succès mesuré	0,67	0,30	0,25	0,21	0,23
prédiction q_n (moyenne)	—	0,35	0,26	0,21	0,19

Le taux décroît en tendance comme $\sigma(n)/\log^2 n$ (les remontées locales, comme $0{,}21 \to 0{,}23$ sur la dernière tranche, sont du bruit : la moyenne de $\sigma(n)$ et la proportion des $n = 2p$ varient d'une tranche à l'autre) : la concordance est un artefact des petits n, appelé à disparaître — même morale que pour $I_n(x) - 1$ (note `puiss2puiss3` du 18.10.2026).
Deux contre-vérifications de la nature « aléatoire » du point a :

- $P(a$ premier$)$ mesuré $= 0{,}425$ contre $2/\log a$ théorique $= 0{,}45$: a se comporte, vis-à-vis de sa primalité, comme n'importe quel impair de son ordre de grandeur ;
- $P(n-a$ premier $\mid a$ premier$)$ mesuré $= 0{,}311$ contre $2C_2\sigma(n)/\log n = 0{,}299$: la série singulière gouverne, comme pour toute paire de Goldbach.

Répartition des échecs ($n \le 3000$) : a composé : 861 cas ; a premier mais $n - a$ composé : 438 cas — les deux sources échangent leur rôle selon la taille, aucune structure cachée.

4. Pourquoi ça rate sur les doubles de premiers : σ minimal

Ce n'est pas $n = 2p$ qui est spécial, c'est $\sigma(n)$ minimal. Si $n = 2p$, aucun petit premier impair ne divise n, donc $\sigma(n) \approx 1$: le nombre attendu de décompositions de Goldbach, $\sim 2C_2\sigma(n)\,n/\log^2 n$, est le plus petit possible, et la « chance » que la fenêtre de largeur 2 en $n^{2/3}$ tombe sur un dg est minimale. Témoignent les taux de succès par classe ($8 \le n \le 3000$) :

classe de n	effectif	taux de succès
$3 \mid n$ ($\sigma \ge 2$)	499	**0,37**
$5 \mid n$, $3 \nmid n$	200	0,22
$n = 2p$	237	0,19
autres	562	0,18

Test décisif : en se restreignant aux n divisibles ni par 3 ni par 5 (même $\sigma \approx 1$ pour tous), les taux s'égalisent :

$$n = 2p : 0{,}19 \qquad \text{autres (sans facteur 3 ni 5)} : 0{,}18.$$

Dans une telle classe, le fait que $n/2$ soit premier ne change rien : « double d'un premier » n'est qu'un indicateur indirect de « $\sigma(n) = 1$ » — ce n'est pas une valeur approchée de $\sigma(n)$, c'est une autre condition sur n qui l'entraîne ($n = 2p$ force p à être grand, donc $\sigma(2p) = (p-1)/(p-2) \approx 1$, sans s'y réduire : $28 = 2 \cdot 14$ n'est pas double d'un premier et a pourtant $\sigma \approx 1$) — exactement comme, dans la note $x^{10} \equiv 1$, le dernier chiffre de p n'était qu'un indicateur indirect de $p \bmod 5$: il ne l'approxime pas, il la détermine ou non sans porter la même information. À petits n (fenêtre de son programme, 6–104) l'écart paraît spectaculaire ($2p$: 0,36 de succès contre 0,79 pour le reste) parce que la moitié des autres pairs sont divisibles par 3 ($\sigma = 2$, facteur doublement de la probabilité) et que $n^{2/3}$ y est petit — donc souvent premier par hasard.
Échecs typiques pour $n \le 100$: $28, 32, 34{=}2 \cdot 17, 38{=}2 \cdot 19, 44, 46{=}2 \cdot 23, 62{=}2 \cdot 31, 64, 68, 70, 74{=}2 \cdot 37, 80, 82{=}2 \cdot 41, 86{=}2 \cdot 43, 94{=}2 \cdot 47$ — les $2p$ s'y accumulent, mais $28, 32, 44, 64, 68, 70, 80$ aussi, tous $\sigma \approx 1$.

5. Une autre équation ? Famille, gamme musicale, équation de Fermat (23.10.2026, suite)

5.1. La loi de la famille $(n-x)^A - x^B$

La bascule de $(n-x)^A - x^B$ est en $x^* \approx n^{A/B}$. La probabilité qu'un candidat (a ou b) soit dg vaut $P \approx \frac{2}{\log x^*} \cdot \frac{2C_2\sigma(n)}{\log n}$; avec les deux candidats, le taux de la famille est $1-(1-P)^2$, et c'est ce dernier que donne le tableau. Il croît en B/A, non parce que l'équation "voit" mieux, mais parce que la bascule descend vers les petits décomposants, où un petit impair est plus souvent premier. Mesuré (pairs 100–3000) :

(A,B)	$(3,4)$	musicale	$(2,3)$	$(2,5)$	$(2,7)$	$(2,12)$
taux	0,198	0,198	0,238	0,332	0,351	0,484

Limite de la famille : quand B/A croît, la bascule descend vers un x fixe et petit, et l'équation se dégénère en la question "$n-c$ est-il premier ?", avec un seul candidat ($c = 3$: taux 0,279 ; $c = 5$: 0,279 ; avec les cinq candidats $3, 5, 7, 11, 13$: 0,846). L'extrême de la famille est Goldbach aux petits premiers, territoire des jumeaux. **Choisir l'équation, c'est seulement choisir l'endroit de la fenêtre où l'on interroge la densité des décomposants ; cette densité, elle, est fixée par $\sigma(n)/\log^2 n$.**

5.2. L'équation musicale 2^{n-x} contre 3^x

La gamme nous agrée car $2^{19} \approx 3^{12}$ ($3^{12}/2^{19} = 1{,}0136$, comma pythagoricien de 23,5 cents ; 19/12 est une convergente de $\log_2 3$). L'équation 3^x vs 2^{n-x} (comparer $x \log 3$ et $(n-x)\log 2$) bascule en

$$x^* = n \, \frac{\log 2}{\log 2 + \log 3} = 0{,}38686\, n.$$

Pour $n = 98$: $x^* = 37{,}91$, dernier antécédent positif $a = 37$ **qui est un dg** — voilà l'origine du pressentiment. Mieux encore : les deux puissances du comma, transportées dans le monde fini modulo 49 (le plus grand diviseur impair de 98, là où vivent les caractères), donnent $3^{12} \equiv 36$ et $2^{19} \equiv 37 \pmod{49}$ — deux résidus consécutifs, dont le second est précisément le dg 37. Et la "consonance" $h_n(x) = (n-x)\log 2 - x \log 3$ (nulle à la bascule) classe les dg de 98 par distance à la bascule : $h(19) = 33{,}9$, $h(31) = 12{,}4$, $h(37) = 1{,}63$, $h(39) = -1{,}9$ — 37 est le décomposant le plus consonant. Mais consonance $\neq$ probabilité : le taux de l'équation musicale (0,198) est légèrement inférieur à celui de $(2, 3)$ (0,238), car le produit $\log x \, \log(n-x)$ y est plus grand qu'en $n^{2/3}$. Après passage aux logarithmes, il ne reste de la musique que la constante 0,38686.
Au passage : $(n-x)^2 - x^3$ est la cubique cuspidale $y^2 = x^3$ (avec $y = n - x$), paramétrée par (t^2, t^3) : les exposants 2 et 3 de son équation deviennent les deux coordonnées du paramétrage. Ses points entiers sont exactement les couples (t^2, t^3) ; ce sont eux qui donnent les bascules exactes $n = t^2(1+t)$ du cas d'image nulle. Les bonnes approximations $|a \log 2 - b \log 3|$ sont données par les convergentes de $\log_2 3$; l'équation $(2, 3)$ transpose les exposants a, b en puissances.

5.3. L'idée sioux : mettre l'équation dans le Snurpf

Dans $\mathbb{R}$, toute équation de tailles est aveugle : le taux est la densité locale et tend vers 0. Pour voir la primalité, l'équation doit être évaluée dans le monde fini. D'où :

$$\boxed{2^x \equiv 2 \pmod{x} \quad \text{et} \quad 2^{n-x} \equiv 2 \pmod{n-x}}$$

L'ensemble des solutions contient tous les dg, et ne contient en trop que les paires impliquant un pseudopremier base 2 (les "fausses consonances" de Fermat). Vérifié pour tous les pairs ≤ 1000 : 8220 paires vraies, 276 fausses — toutes portées par les trois pseudopremiers $341, 561, 645$. Le taux ne tend plus vers 0 : c'est l'erreur qui tend vers 0 (densité des pseudopremiers $\ll$ densité des premiers). L'analogie musicale est exacte : pour p premier, $2^p \equiv 2 \pmod{p}$, c'est-à-dire $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, l'égalité parfaite ; le pseudopremier est la consonance approchée, le comma que l'oreille arithmétique tolère.
Le revers, toujours le même : l'équation de Fermat détecte un dg qu'on lui donne, elle ne prouve pas qu'il existe dans la fenêtre $[3, n/2]$ — l'équation vit dans les congruences (le Snurpf, ici modulo x et $n-x$, des modules qui varient avec le candidat), la fenêtre vit dans les tailles réelles. Goldbach reste la jonction des deux mondes ; mais la détection à bas coût (crible de Fermat, c'est ainsi que Goldbach est vérifié très loin) permet de remplacer l'observation « la bascule tombe parfois sur un dg » par un énoncé quantifié : $\{\text{Fermat}_n\} \cap [3, n/2] \approx \text{dg}_n \cap [3, n/2]$, erreur bornée par les pseudopremiers.

5.4. Le fil des résidus quadratiques (23.10.2026, deuxième suite)

Question de Denise : un dg de n serait-il par exemple non-résidu quadratique des facteurs premiers de n ? Tests antérieurs : rien. Réponse : il existe une identité simple qui explique tous les échecs, et qui est la forme cachée de sa croix de Malte.

L'identité centrale. Pour tout x premier à n :

$$\boxed{-x(n-x) \equiv x^2 \pmod{n}}$$

(preuve : $-x(n-x) = -xn + x^2$). Donc $-p_1p_2$ est un carré modulo toute puissance impaire de la factorisation de n, pour tout candidat x, premier ou non — vérifié exhaustivement (5476/5476 candidats, $n \leq 300$). En langage de caractères : pour tout caractère multiplicatif χ modulo une puissance impaire $q^a \parallel n$:

$$\chi(n-x) = \chi(-1)\,\chi(x).$$

Le miroir $x \mapsto n-x$ est, dans le monde multiplicatif, la multiplication par -1. Toute la théorie des puissances (quadratique, cubique, toutes — le dual de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, raisonner d'un coup) est assujettie à cette identité : **aucun test de résiduosité modulo les facteurs de n ne peut distinguer un dg.**

Ce qui est vrai (et automatique). Vérifié sur les 8220 paires dg des pairs ≤ 1000 :

- $4 \mid n \Rightarrow$ les deux dg sont dans des classes de Gauss opposées ($4k+1$ et $4k+3$) ; $n \equiv 2 \pmod 4 \Rightarrow$ classes identiques (8220/8220). C'est la croix de Malte : l'involution $u \mapsto -u$ du groupe des unités.
- $8 \mid n \Rightarrow (2/p_1) = (2/p_2)$ (2052/2052).
- $n = 98$: les trois dg vérifient $(p/7) = -\,(98-p)/7$: $(19/7) = -(79/7)$, $(31/7) = -(67/7)$, $(37/7) = -(61/7)$.

Faut-il garder le facteur 2 ? Oui ; sa part d'harmonie n'existe que si $4 \mid n$ (caractère χ_{-4}), et double si $8 \mid n$ (χ_8 en plus). Pour $n \equiv 2 \pmod 4$ — en particulier $n = 2p$ — le facteur 2 ne fournit aucun caractère quadratique : toute l'information est dans le groupe des unités de la partie impaire. Encore une raison pour laquelle les doubles de premiers sont « purs ».

Et modulo les premiers $q \nmid n$? Aucun biais possible : le théorème des nombres premiers en progressions arithmétiques (provable, lui !) donne l'équirépartition des premiers entre résidus et non-résidus quadratiques mod q — donc les décompositions de Goldbach se partagent 50/50 de chaque côté, sans signature. La résiduosité est invisible dans les décompositions, au premier ordre comme aux ordres suivants (la série singulière $\sigma(n)$ capture déjà toute la correction locale).

Enseignement du fil résidus. La structure simple pressentie existe : les paires de Goldbach sont les orbites de l'involution $u \mapsto -u$ dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, et la fenêtre $[3, n/2]$ en est un domaine fondamental — le facteur 2 de la demi-fenêtre est la symétrie quadratique. Mais le « lien multiplicatif » entre les deux dg et la factorisation est l'identité $-p_1p_2 =$ carré, vide par principe ; la primalité des relevés est une information archimédienne (la fenêtre), à laquelle le monde multiplicatif est aveugle. Le mur, sous sa forme la plus nue.

6. Enseignement

1. Le changement de signe de $(n-x)^2 - x^3$ est un phénomène archimédien pur : unique bascule en $x^* \sim n^{2/3}$, solution de $n = x + x^{3/2}$, avec $b = a + 2$; il ne sait rien des premiers.
2. Sa rencontre avec un dg est un tirage de probabilité $\approx 8C_2\sigma(n)/\log^2 n$, décroissante vers 0 : la concordance est un artefact des petits n, à comparer au bruit de fond quantifié.

3. Les n de bascule exacte $n = c^2(1+c)$ $(36, 150, 392, 810, \dots)$ ont leur antécédent d'image nulle carré, donc composé par principe : jamais un dg, structurellement.
4. « Ça rate sur les doubles de premiers » = « $\sigma(n)$ est minimal » : à σ fixé, $2p$ ne se distingue pas des autres pairs (vérifié : 0,19 contre 0,18). C'est la série singulière, déjmesurée dans `minoproba` (2019), qui pilote — et son côté heuristique rencontre toujours la même barrière de parité.
5. L'exigence « un dg dans une fenêtre de largeur 2 autour de $n^{2/3}$ » est une conjecture de Goldbach raffinée à point fixe, strictement plus forte que Goldbach : la fonction seuil rétrécit la fenêtre $[3, n/2]$ jusqu'au point où l'énoncé cesse d'être heuristiquement presque sûr ($q_n \to 0$). Elle ne peut donc rien démontrer, mais elle mesure fidèlement la densité locale des décomposants.