Corrections au texte
“changement de signe de $(n-x)^2 - x^3$ et décomposants de Goldbach”

ia claude

23 octobre 2026

Notations : $f_n(x) = (n-x)^2 - x^3$, x^* le point de bascule réel, a (resp. $b = a+2$) l'antécédent de la dernière image positive (resp. de la première image négative), $\sigma(n) = \prod_{p|n,\, p>2} \frac{p-1}{p-2}$.

1. La limite « $a/n^{2/3} \to 0{,}95$ » (p. 1) est fausse

Avec $x^* = c^2$ et $n = c^3 + c^2$, posons $m = n^{1/3}$ et $c = m + \delta$:

$$(m+\delta)^3 + (m+\delta)^2 = m^3 + 3m^2\delta + m^2 + O(m) = m^3 \implies \delta = -\tfrac{1}{3} + O(m^{-1}).$$

Donc

$$x^* = c^2 = n^{2/3} - \tfrac{2}{3}\, n^{1/3} + O(1), \qquad \frac{x^*}{n^{2/3}} = 1 - \frac{2}{3}\, n^{-1/3} + O(n^{-2/3}) \longrightarrow 1.$$

La convergence est lente : pour $n \approx 3000$, $n^{1/3} \approx 14{,}4$ et le rapport vaut $1 - 0{,}046 \approx 0{,}954$. Le « 0,95 » mesuré est la valeur à cette taille de n, pas une limite. Correction : écrire $x^* \sim n^{2/3}$, et $a/n^{2/3} \approx 0{,}95$ pour $n \approx 3000$.

2. La constante $8C_2$ (p. 7, point 2) devrait être $12C_2$

La p. 2 donne, par point, $P = \frac{2}{\log x^*} \cdot \frac{2C_2\sigma(n)}{\log n}$. Avec $\log x^* \sim \frac{2}{3}\log n$:

$$P \approx \frac{3}{\log n} \cdot \frac{2C_2\sigma(n)}{\log n} = \frac{6\, C_2\, \sigma(n)}{\log^2 n}.$$

La fenêtre $\{a, b\}$ comporte deux points, donc

$$q_n \approx 1 - (1-P)^2 \approx 2P = \frac{12\, C_2\, \sigma(n)}{\log^2 n}.$$

Le coefficient $8C_2$ correspondrait à une bascule en $n^{1/2}$ ($2/\log x^* = 4/\log n$, d'où $P = 8C_2\sigma/\log^2 n$ par point). Correction : remplacer $8C_2$ par $12C_2$ (régime où q_n est petit), ou garder la formule exacte de la p. 2.

3. « PNT en progressions arithmétiques, provable, lui ! » (p. 6)

Le théorème des nombres premiers en progressions arithmétiques équirépartit les premiers dans les classes modulo q ($q \nmid n$). Il ne dit rien sur les paires $(p,\, n-p)$: l'équirépartition des résidus quadratiques de p et de $n-p$ simultanément est un énoncé de même nature que Goldbach (problème binaire, barrière de parité). Correction : « le partage 50/50 des décompositions est heuristique (il découle du modèle aléatoire, non du PNT) ».

4. Les vérifications « 8220/8220 », « 2052/2052 » sont des tautologies

Si $p_1 + p_2 = n$:

- pour $q^a \,\|\, n$ avec q premier impair : $p_2 \equiv -p_1 \pmod{q^a}$, donc $\chi(p_2) = \chi(-1)\chi(p_1)$ pour tout caractère χ modulo q^a ; en particulier pour $n = 98$ et $q = 7$, comme $\left(\frac{-1}{7}\right) = -1$: $\left(\frac{p_2}{7}\right) = -\left(\frac{p_1}{7}\right)$;
- $4 \mid n \Rightarrow p_2 \equiv -p_1 \pmod 4$ (classes opposées) ; $n \equiv 2 \pmod 4$ et p_1 impair $\Rightarrow p_2 \equiv 2 - p_1 \equiv p_1 \pmod 4$ (classes identiques) ;
- $8 \mid n \Rightarrow p_2 \equiv -p_1 \pmod 8$, et $\left(\frac{2}{p}\right)$ ne dépend que de $p \bmod 8$ avec $\left(\frac{2}{-p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right)$ ($\pm 1 \bmod 8 \mapsto +1$) : d'où $\left(\frac{2}{p_1}\right) = \left(\frac{2}{p_2}\right)$.

Ces énoncés sont des théorèmes immédiats, valables pour tout x (premier ou non) : les compter sur les 8220 paires n'ajoute aucune information. Correction : écrire « identités (démontrées), vérifiées pour mémoire ».

5. Le tableau de la p. 2 : « $0{,}21 \to 0{,}23$ » n'infirme pas la décroissance

Le texte affirme que le taux décroît comme $\sigma(n)/\log^2 n$, alors que le mesuré passe de 0,21 à 0,23 entre les deux dernières tranches. Deux raisons de ne pas s'en inquiéter :

- bruit : chaque tranche contient ≈ 500 pairs, d'où un écart-type $\sqrt{0{,}22 \cdot 0{,}78/500} \approx 0{,}019$ sur chaque taux (donc $\approx 0{,}026$ sur leur différence) ; l'écart observé est de $+0{,}02$;
- lenteur : $\log^2(1500) \approx 53{,}5$ et $\log^2(2500) \approx 61{,}2$, soit une baisse attendue de 13 % seulement entre les centres des deux tranches.

Correction : « la tendance décroissante est trop lente pour être visible avant $n = 3000$ (bruit de $\pm 0{,}02$) ».

6. La « consonance » h_n et le « comma qui enjambe 37 » (p. 4)

h_n est monotone. $h_n(x) = (n-x)\log 2 - x\log 3 = n\log 2 - x\log 6$ est affine décroissante en x, nulle en $x^* = n\frac{\log 2}{\log 6} = 0{,}38686\,n$. Pour $n = 98$: $h(19) = 33{,}9$, $h(31) = 12{,}4$, $h(37) = 1{,}63$. Le décomposant « le plus consonant » est donc simplement celui qui est le plus proche de $x^* = 37{,}9$ par en dessous : aucune information arithmétique n'entre dans ce classement.

Le comma modulo 49. On a bien $3^{12} = 531441$, $2^{19} = 524288$, $3^{12} - 2^{19} = 7153 = 146 \cdot 49 - 1$, donc $3^{12} \equiv 36$, $2^{19} \equiv 37 \pmod{49}$. Mais 37 est l'un des deux résidus : il n'est pas « enjambé ». Et deux résidus quelconques modulo 49 sont adjacents avec probabilité $\approx 2/49$; que 37 en fasse partie est une coïncidence, d'autant que le modulo $49 = 98/2$ est choisi après coup.

Origine du pressentiment. Pour $n = 98$, $x^* = 37{,}91$, et 37 est décomposant ($98 - 37 = 61$). Les décomposants de 98 sont $19, 31, 37$ parmi 23 impairs candidats de 3 à 47 : tomber juste a une probabilité d'environ $3/23$ par point sondé, ce qui n'est pas rare.

7. Verdict sur l'« idée sioux »

Rien dans cette piste n'irait vers une démonstration.

- La bascule de f_n est un localisateur archimédien : elle choisit un point de $[3, n/2]$ à partir de la taille de n seule.
- L'équation de Fermat ($2^x \equiv 2 \bmod x$, $2^{n-x} \equiv 2 \bmod (n-x)$) est un détecteur de primalité (erreur : pseudopremiers $341, 561, 645$ pour $n \leq 1000$) : elle reconnaît un décomposant qu'on lui donne, elle n'en prouve pas l'existence.
- Le seul lien multiplicatif entre les deux décomposants et la factorisation de n est $p_1 \equiv -p_2 \pmod{q}$ pour tout $q \mid n$, équivalent à $-p_1 p_2 \equiv p_1^2 \pmod{n}$; il vaut pour tout x, premier ou non, donc il ne contient aucune information de primalité. La primalité se lit dans les restes modulo les petits premiers ne divisant pas n (le crible), où l'on retrouve la barrière de parité.

Ce qui reste vrai et propre : les paires de Goldbach sont des orbites de l'involution $u \mapsto -u$ dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, et $[3, n/2]$ en est un domaine fondamental.