Coquilles Pile la moitié *(Denise Vella-Chemla, 21.10.2019)*

(une première coquille en haut de la page 3)

Toute puissance paire d'un non-résidu quadratique est un résidu quadratique alors que toute puissance impaire d'un non-résidu quadratique est un non-résidu quadratique (selon l'adage "moins par moins donne plus"). On peut regarder les deux chaînes de nombres ci-dessus comme "faisant la navette" entre l'ensemble des résidus quadratiques et l'ensemble des non-résidus quadratiques. L'ensemble des résidus quadratiques forment un groupe pour la multiplication (on n'en sort pas en en multipliant deux éléments) alors que l'ensemble des non-résidus quadratiques n'est pas un groupe puisque le résultat de la multiplication de deux non-résidus quadratiques est un résidu quadratique.

Voici les chaînes pour le module 19, on les a fait démarrer à 4 et 5 pour les résidus et à 2 et 10 pour les non-résidus :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4^x	4	$\to 16$	$\to 7$	$\to 9$	$\to 17$	$\to 11$	$\to 6$	$\to 5$	$\to 1$
5^x	5	$\to 6$	$\to 11$	$\to 17$	$\to 9$	$\to 7$	$\to 16$	$\to 4$	$\to 1$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2^x	$2\ (N)$	$\to 4\ (R)$	$\to 8\ (N)$	$\to 16\ (R)$	$\to 13\ (N)$	$\to 7\ (R)$	$\to 14\ (N)$	$\to 9\ (R)$	$\to 18\ (N)\ (\equiv -1)$
10^x	$10\ (N)$	$\to 5\ (R)$	$\to 12\ (N)$	$\to 6\ (R)$	$\to 3\ (N)$	$\to 11\ (R)$	$\to 15\ (N)$	$\to 17\ (R)$	$\to 18\ (N)\ (\equiv -1)$

Seuls les nombres premiers ont pour propriété de partager l'ensemble des résidus quadratiques exactement en 2. Du fait de redondances intervenant dans les factorisations ($4 \times 6 = 3 \times 8$ par exemple), les nombres composés ont moins de résidus quadratiques que de non-résidus quadratiques.

[...]

(une seconde coquille vers le bas de la page 4)

La loi de réciprocité quadratique facilite le calcul des relations qui lie deux nombres ($(x\ R\ y)$ *ou* $(x\ N\ y)$ d'une part et $(y\ R\ x)$ *ou* $(y\ N\ x)$ d'autre part) : on a la même relation entre x et y qu'entre y et x, soit $(x\ R\ y)$ *et* $(y\ R\ x)$ dès que l'un des 2 nombres est de la forme $4k+1$, ou bien on a x et y qui sont dans des relations opposées ($(x\ R\ y)$ *et* $(y\ N\ x)$) *ou exclusif* ((xNy) *et* $(y\ R\ x)$) si les deux sont de la forme $4k+3$. Cette relation n'est ni systématiquement symétrique ni systématiquement anti-symétrique.

La notion d'orientation de chaînes de nombres fait toucher du doigt cette grande complexité de la loi de réciprocité quadratique : si l'on place les classes de restes sur un cercle et qu'on relie entre eux des nombres espacés de 4, on voit que d'un tour à l'autre, les restes augmentent pour le module 17 de la forme $4k+1$ tandis qu'ils diminuent pour le module 19 de la forme $4k+3 (= 4k-1)$ (on indique cela en notant symboliquement les indices de deux tours successifs n et $n+1$ pour les restes 3 et 4 (pris au hasard) sur chaque cercle, en dégradant davantage le bleu à chaque tour - on voit que le dégradé décroît dans le sens anti-horaire pour le module 17 et dans le sens horaire pour 19, et en orientant les liens (correspondant à l'opération $+4$) par des flèches).